UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti
Esame del 23 luglio 2001

Esercizio 1 Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, che vengono estratte una dopo l'altra senza rimpiazzo.

a) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero più piccolo ($\le$) di 60?

b) Qual è la probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero dispari?

c) Qual è la probabilità che la pallina i-esima estratta sia proprio la numero i? Indichiamo con X il numero di volte che questa coincidenza si verifica (cioè il numero di volte che, nelle 90 estrazioni, succede che la i-esima pallina estratta sia proprio la numero i). Quanto vale $E(X)$?

Esercizio 2 Sei urne contengono tutte 3 palline rosse (R) e un numero variabile di palline bianche (B). Più precisamente l'urna i-esima contiene 3 palline R e i palline B ($i = 1, \dots, 6$). Un'urna viene scelta a caso e da essa vengono estratte,una dopo l'altra, due palline *con* rimpiazzo.

a) Qual è la probabilità che le due palline siano una B e una R?

b) Supponiamo che l'estrazione abbia dato come risultato una pallina B e una R. Qual è la probabilità p_i che l'urna prescelta sia la i-esima ? Qual è l'urna più probabile ?

c) Supponiamo invece che vi siano 2 urne contenenti 3 palline R e 6 B (le urne sono quindi 7). Se l'estrazione ha dato come risultato una pallina B ed una R, qual è ora la probabilità che l'urna prescelta sia di tipo i (cioè contenga i palline B)? Qual è ora il valore di i più probabile?

Esercizio 3 Consideriamo n numeri aleatori indipendenti, tutti di legge $N(0,1)$.

a) Qual è la densità di $X^* = \max(X_1, \dots, X_n)$? Se $n = 100$, qual è la probabilità che X^* sia più grande di 2.8? Quanto deve essere grande n perché la probabilità che X^* sia più grande di 2.8 sia maggiore di $\frac{1}{2}$?

b) Qual è la probabilità che almeno uno degli n numeri sia più piccolo di -1?

UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA
Facoltà di Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti
Soluzioni esame del 23 luglio 2001

Esercizio 1 a) La probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero più piccolo di 60 è, utilizzando la distribuzione ipergeometrica,

$$p = \frac{\binom{60}{10}\binom{30}{0}}{\binom{90}{10}} = 0.013.$$

(La realizzazione di questo calcolo numerico, che non era richiesta esplicitamente, richiede un po' d'attenzione per evitare gli errori di arrotondamento).
b) La probabilità che le prime 10 palline estratte portino tutte un numero dispari, sempre utilizzando la distribuzione ipergeometrica, è:

$$p = \frac{\binom{45}{10}\binom{45}{0}}{\binom{90}{10}} = 5.57 \cdot 10^{-4}.$$

c) Lo spazio di tutte le possibili combinazioni di 90 elementi di classe i è uno spazio equiprobabile, pertanto due insiemi aventi la stessa cardinalità hanno la stessa probabilità. Chiamiamo A_i l'evento l'i-esima pallina estratta ha il numero i (ovvero si ha una coincidenza), è immediato che $\mathrm{P}(A_1) = \frac{1}{n}$. Ma $\#A_1 = \#A_i$ per ogni $i = 1, \dots, 90$ e quindi $\mathrm{P}(A_i) = \frac{1}{n}$. Ora sia X_i la v.a. che vale 1 se si ha una coincidenza all'i-esima estrazione, 0 altrimenti. Le X_i sono v.a. di Bernoulli di parametro $\frac{1}{n}$ (non indipendenti!) e il numero di coincidenze su 90 estrazioni è dato dalla v.a. $X = X_1 + \ldots + X_{90}$. Per le proprietà della media

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{90} \mathbb{E}[\mathrm{X_i}] = \mathrm{n} \cdot \frac{1}{\mathrm{n}} = 1.$$

Esercizio 2 a) Siano U_i con $i = 1, \dots, 6$ gli eventi *"viene scelta l'urna"* e E l'evento *"vengono estratte due palline di colore diverso"*. L'urna i-esima contiene 3 palline rosse ed i bianche ($3 + i$ in totale). Se l'urna prescelta è la i-esima, quindi, poiché le estrazioni sono con rimpiazzo, il numero di palline bianche estratte segue una densità binomiale $B(2, \frac{i}{3+i})$. Inoltre l'evento E corrisponde al fatto che venga estratta esattamente una pallina bianca. Dubque

$$\mathrm{P}(E|U_i) = \binom{2}{1}\frac{i}{3+i}\frac{3}{3+i} = \frac{6i}{(3+i)^2}$$

Usando la formula della partizione dell'evento certo, si trova

$$\mathrm{P}(E) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}(E|U_i)\mathrm{P}(U_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \frac{6i}{(3+i)^2} = $$
$$= \frac{1}{4^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{6^2} + \frac{4}{7^2} + \frac{5}{8^2} + \frac{6}{9^2} = 0.459$$

b) Si tratta di calcolare $\mathrm{P}(U_i|E)$. Ora

$$p_i = \mathrm{P}(U_i|E) = \frac{\mathrm{P}(E|U_i)\mathrm{P}(U_i)}{\mathrm{P}(E)} = \frac{1}{\mathrm{P}(E)}\frac{i}{(3+i)^2}.$$

Per calcolare qual è l'urna più probabile si possono calcolare numericamente i valori

$$p_1 = 0.136,\ \ p_2 = 0.174,\ \ p_3 = 0.181,\ \ p_4 = 0.177,\ \ p_5 = 0.170,\ \ p_6 = 0.161,$$

Oppure si può considerare la funzione $\varphi(t) = \frac{t}{(3+t)^2}$ e studiarne la crescenza. Derivando si ottiene $\varphi'(t) = \frac{(3-t)}{(3+t)^3}$ pertanto il massimo è raggiunto per $t = 3$. L'urna più probabile è la numero 3.
c) Basta ripetere gli argomenti dei punti a) e b), solo che ora $\mathrm{P}(U_i) = \frac{1}{7}$ per $i = 1, \ldots, 5$ e $\mathrm{P}(U_6) = \frac{2}{7}$. in questo caso

$$\mathrm{P}(E) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}(E|U_i)\mathrm{P}(U_i) = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{5} \frac{6i}{(3+i)^2} + \frac{2}{7}\frac{6\cdot 6}{9^2} = 0.457$$

Analogamente possiamo calcolare p_i:

$$p_i = \mathrm{P}(U_i|E) = \frac{\mathrm{P}(E|U_i)\mathrm{P}(U_i)}{\mathrm{P}(E)}.$$

Per valutare il valore più grande un calcolo numerico mostra che tra le prime 5 urne la più probabile resta la n.3 ($p_3 = 0.156$). Ora però

$$p_6 = \frac{2}{7}\frac{6\cdot 6}{9^2\mathrm{P}(E)} = 0.277.$$

Ora il valore più probabile è $i = 6$.
Esercizio 3 a) Per il calcolo della densità del massimo, indicando con Φ la funzione di ripartizione di una normale standard, abbiamo:

$$F_{X^*}(x) = \mathrm{P}(X^* \le x) = \mathrm{P}(X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x) =$$
$$\mathrm{P}(X_1 \le x)\mathrm{P}(X_2 \le x)\ldots\mathrm{P}(X_n \le x) = (\mathrm{P}(X_1 \le x))^n = \Phi(x)^n.$$

Per il calcolo della densità basta derivare la funzione di ripartizione:

$$f_{X^*}(x) = \frac{dF_{X^*}}{dx}(x) = n\Phi(x)^{n-1}\Phi'(x) = n\Phi(x)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Passando al calcolo delle probabilità richieste, abbiamo:

$$\mathrm{P}(X^* > 2.8) = 1 - \mathrm{P}(X^* \le 2.8) = 1 - F_{X^*}(2.8) = 1 - \Phi(2.8)^n = 1 - (0.99745)^n.$$

Per $n = 100$ si trova

$$\mathrm{P}(X^* > 2.8) = 1 - (0.99745)^{100} = 22.57\%.$$

Per rispondere all'ultima domanda basta osservare che $1 - (0.99745)^n \ge \frac{1}{2}$ se $(0.99745)^n \le 0.5$ e che quest'ultima è verificata per $n \ge \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99745)} \approx 271.4$.
b) Si tratta di calcolare la probabilità che il minimo sia più piccolo di -1. Pertanto

$$\mathrm{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le -1) = 1 - \mathrm{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > -1) =$$
$$= 1 - \mathrm{P}(X_1 > -1)\ldots\mathrm{P}(X_n > -1) =$$
$$= 1 - \mathrm{P}(X_1 > -1)^n = 1 - (1 - \Phi(-1))^n = 1 - 0.84134^n$$