UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Facoltà d'Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti
Esame del 9 luglio 2001

Esercizio 1 Nel gioco del lotto ad ogni estrazione 5 numeri vengono estratti simultaneamente da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Lo stesso procedimento viene ripetuto per le 10 ruote. Fissiamo un numero, ad esempio 1, e indichiamo con p la probabilità che venga estratto in una singola estrazione su una singola ruota.

a) Quanto vale p?

b) Qual è la probabilità che il numero 1 esca almeno su una ruota?

Esercizio 2 Un componente elettronico è formato da due elementi in serie (funziona solo se funzionano entrambi), A e B, ciascuno dei quali ha un tempo di vita esponenziale di parametri $\lambda = 3$ e $\mu = 1$ rispettivamente.

a) Indichiamo con T la variabile aleatoria "tempo di vita" del componente. Qual è la densità di T? Quanto vale il tempo medio di vita del componente?

b) Per aumentare l'affidabilità e ridurre gli interventi di sostituzione viene aggiunto un elemento identico ad A in parallelo con A (in questo caso l'elemento funziona se almeno uno dei due funziona). Qual è la densità del tempo di vita del nuovo complesso? Quanto è ora il tempo di vita medio? E se invece avessimo messo un elemento identico a B in parallelo con B? Quale delle due soluzioni è migliore?

Esercizio 3 Ad una stazione ricevente possono giungere messaggi binari da due canali diversi, A e B. In ognuno di questi messaggi i singoli bit possono prendere i valori 0 e 1 a caso e in maniera indipendente. Nei messaggi provenienti da A ogni singolo bit è uguale a 1 con probabilità $\frac{7}{16}$ e a 0 con probabilità $\frac{9}{16}$. Nei messaggi provenienti da B ogni singolo bit è uguale a 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e 0 con probabilità $\frac{1}{2}$.

a) Qual è la probabilità che in un messaggio di 1600 bit proveniente dal canale A ci siano più di ($\geq$) 750 bit uguali a 1?

b) Per decidere se un messaggio proviene dal canale A o dal canale B usiamo la procedura seguente: se il messaggio contiene più di 750 ($\geq$) bit uguali a 1 decidiamo che esso proviene dal canale B. Qual è la probabilità che un messaggio proveniente da B venga effettivamente individuato?

c) Qual è la probabilità che in un messaggio proveniente da B il numero di bit uguali a 1 sia compreso tra 780 e 820?

UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA
Facoltà di Ingegneria

Corso di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*
P.Baldi, B.Pacchiarotti
Soluzioni esame del 9 luglio 2001

Esercizio 1 a) Usando la distribuzione ipergeometrica si trova facilmente che la probabilità che il numero 1 esca in una singola estrazione su una singola ruota è

$$p = \frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}.$$

b) Le estrazioni su ogni ruota sono indipendenti una dall'altra pertanto la probabilità che il numero 1 esca almeno su una ruota è 1 meno la probabilità che il numero 1 non esca su nessuna ruota, ovvero

$$1-(1-p)^{10} = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{10} = 0.435$$

Esercizio 2 a) Chiamiamo T_1 e T_2 i tempi di vita degli elementi A e B di legge esponenziali di parametri rispettivamente $\lambda = 3$ e $\mu = 1$, allora $T = \min\{T_1, T_2\}$. Per il calcolo della legge di T procediamo calcolando la funzione di sopravvivenza:

$$\mathrm{P}(T>t) = \mathrm{P}(\min\{T_1,T_2\}>t) = \mathrm{P}(T_1>t, T_2>t) = \\ \mathrm{P}(T_1>t)\mathrm{P}(T_2>t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\mu t} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}$$

Quindi T ha legge esponenziale di parametro $\lambda+\mu$ e la sua media è $\frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{1}{4}$

b) Se raddoppiamo A e indichiamo con S_1 ed S_2 rispettivamente i tempi di vita dei due elementi, allora il tempo di vita T del componente è ancora dato dal minimo tra T_1 e T_2 dove però T_1 è il massimo S_1 e S_2 e T_2 è ancora esponenziale di parametro μ. Calcoliamo la legge di T_1. Trattandosi di un massimo, calcoliamo la funzione di ripartizione:

$$F_{T_1}(t) = \mathrm{P}(T_1 \le t) = \mathrm{P}(\max\{S_1,S_2\} \le t) = \mathrm{P}(S_1 \le t, S_2 \le t) = \\ \mathrm{P}(S_1 \le t)\mathrm{P}(S_2 \le t) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda t})(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2$$

Pertanto la densità di T_1 è data da:

$$f(t) = \frac{dF_{T_1}}{dt}(t) = 2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$$

Possiamo quindi passare a calcolare la legge di T e come già fatto in precedenza trattandosi di un minimo si ricorre alla funzione di sopravvivenza:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(\min\{T_1, T_2\} > t) = \mathrm{P}(T_1 > t, T_2 > t) = \\ \mathrm{P}(T_1 > t)\mathrm{P}(T_2 > t) = (1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2)\mathrm{e}^{-\mu t} = \\ 2\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} - \mathrm{e}^{-(2\lambda+\mu)t}.\end{gathered}$$

Se ne deduce che il tempo di vita medio è

$$\frac{2}{\lambda+\mu} - \frac{1}{2\lambda+\mu} = \frac{5}{14}.$$

Se avessimo raddoppiato B, avremmo ottenuto una situazione identica a quella appena trattata, ove basta scambiare il ruolo di λ con quello di μ. Pertanto in tal caso la vita media del componente sarebbe stata

$$\frac{2}{\lambda+\mu} - \frac{1}{\lambda+2\mu} = \frac{3}{10}.$$

La prima soluzione è migliore della seconda.

Esercizio 3 a) Nel caso in cui il messaggio provenga dal canale A il numero X di bit uguali a 1 segue una legge binomiale di parametri $p = \frac{7}{16}$ e $n = 1600$. Sappiamo che possiamo approssimare questa distribuzione con una distribuzione normale avente la stessa media $\mu = np = 700$ e la stessa varianza $\sigma^2 = np(1-p) = 393.75$. Pertanto detta Z una variabile aleatoria avente distribuzione normale standard ed indicata con Φ la sua funzione di ripartizione si ha:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(X \geq 750) = \mathrm{P}\Big(Z \geq \frac{750-700}{19.84}\Big) = \\ 1 - \Phi(2.52) = 1 - 0.99413 = 0.00587\end{gathered}$$

Se avessimo utilizzato la correzione per le v.a. a valori interi, avremmo ottenuto

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(X \geq 750) = \mathrm{P}\Big(Z \geq \frac{749.5-700}{19.84}\Big) = \\ 1 - \Phi(2.495) = 1 - 0.9937 = 0.0063\end{gathered}$$

Il calcolo esatto, usando un software che disponga delle tavole della f.r. di una legge $B(1600, \frac{7}{16})$ darebbe il risultato 0.00639.

b) Se il messaggio proviene dal canale B allora la variabile aleatoria che conta il numero di bit uguali ad 1 è binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 1600$. In questo caso la probabilità richiesta è

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(X \geq 750) = \mathrm{P}\Big(Z \geq \frac{749.5-800}{20}\Big) = \\ 1 - \Phi(-2.525) = 1 - 0.006 = 0.994\end{gathered}$$

c) Di nuovo se il messaggio proviene da B il numero di bit uguali a 1 è una binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 1600$. Pertanto la probabilità richiesta è

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(780 \leq X \leq 820) = \mathrm{P}\Big(\frac{779.5-800}{20} \leq Z \leq \frac{820.5-800}{20}\Big) = \\ = \Phi(1.025) - \Phi(-1.025) = 0.8473 - 0.1526 = 0.6946\end{gathered}$$