§1.2 Funzioni, dominio, codominio, invertibilità elementare, alcune identità trigonometriche

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

1.1.2 Determinare: dominio, immagine, monotonia e disegnare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni: $f_1(x) = \log_3 \sqrt{x^{-3}}$, $f_2(x) = \arccos \log_3 \sqrt{x^{-3}}$, $f_3(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

2.1.2 Studiare la invertibilità delle seguenti funzioni nei rispettivi domini di definizione oppure, in subordine, in qualche sottoinsieme del dominio. Per f_3 trovare l'inversa. $f_1(x) = x^3 + x$, $f_2(x) = x^3 - x$, $f_3(x) = x^2 + 2x - 3$;

3.1.2 Trovare per quali valori di x sono vere le seguenti identità trigonometriche
1) $\cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
2) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|}$
3) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\arccos \sqrt{1-x^2} = \arcsin x$, $\arccos \sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$,
4) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x$, $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = -2 \arctan x$,
5) $\arctan x = \operatorname{arc\,cot} \frac{1}{x}$, $\arctan x = \operatorname{arc\,cot} \frac{1}{x} - \pi$
6) $\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy} + \pi$, $\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$, $\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy} - \pi$,
7) $\arctan x + \arctan 1 = \arctan \frac{1+x}{1-x}$, $\arctan x + \arctan 1 = \arctan \frac{1+x}{1-x} + \pi$,
8) $\frac{1}{2} \arcsin x + \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{4}$

4.1.2 Tracciare i grafici delle funzioni $y = \arccos(\cos x)$, $y = \arcsin(\sin x)$ e $y = \arctan(\tan x)$ senza usare derivate

5.1.2 Senza usare derivate dire se le funzioni $y = \tan \arccos \frac{x|x|}{x^2+2}$ e $y = \tan \arcsin \frac{x|x|}{x^2+2}$ sono invertibili. In caso affermativo trovare le inverse e tracciarne il grafico con l'approssimazione massima possibile. Dimostrare che se una funzione è dispari ed è invertibile anche l'inversa è dispari.

6.1.2) Trovare le infinite funzioni inverse di: $\cos x$ per $x \notin [0, \pi]$, $\sin x$ per $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\tan x$ per $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cot x$ per $x \notin [0, \pi,]$

7.1.2) Sia data una funzione $f \colon X \to Y$ dotata di inversa f^{-1}. Si stabilisca se sono vere le seguenti affermazioni: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, ($A$ e B sono sottoinsiemi di X), $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, ($C$ e D sono sottoinsiemi di Y). Per le relazioni eventualmente non vere si dia un esempio concreto.

8.1.2) Si trovi il dominio delle seguenti funzioni: $(x^2 - x - 2)^{\ln \frac{x}{2}}$

9.1.2) Calcolare $\sin 9^\circ + \cos 9^\circ$

10.1.2) Si dimostri che la funzione $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ è costante in un intervallo $[a, b]$. Si trovi l'intervallo e il valore della costante.

SOLUZIONI

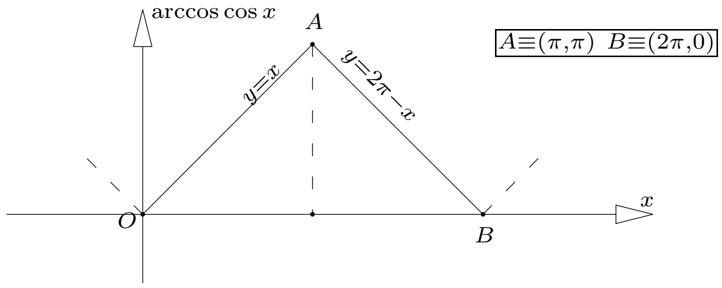
§1.2

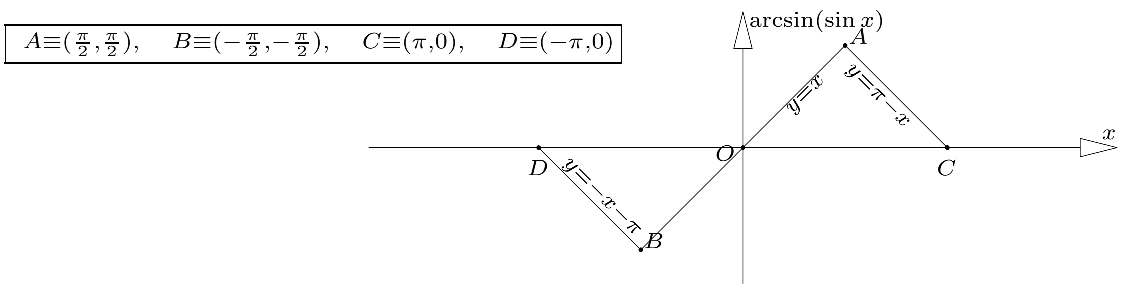
1.1.2) $Dom(f_1) = \mathbf{R}^+$, $Im(f_1) = \mathbf{R}$, f_1 è monotona decrescente. $Dom(f_2) = [3^{-2/3}, 3^{2/3}]$, $Im(f_2) = [0, \pi]$, f_2 è monotona crescente. $Dom(f_3) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geq 1, \}$ $Im(f_3) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1\}$. f_3 è pari ed è monotona crescente per $x \geq 1$ mentre è monotona decrescente per $x \leq -1$.

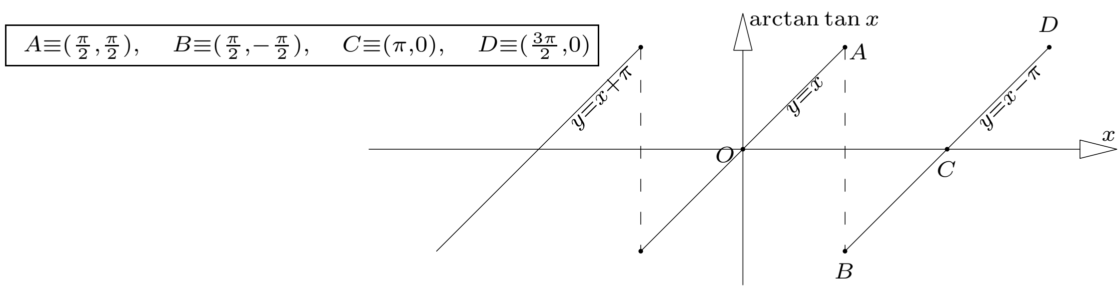
2.1.2) f_1 è invertibile. f_2 ed f_3 no.

3.1.2) 1) e 2): sono vere per ogni $x \in \mathbf{R}$, 3): è vera se $x \in \mathbf{R}$, la seconda per $0 \leq x \leq 1$, la terza per $-1 \leq x \leq 0$, 4): la prima è vera per $x \geq 0$ mentre la seconda per $x \leq 0$ 5): la prima per $x > 0$ e la seconda per $x < 0$, 6): se $\arctan x \pm \arctan y \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ vale la prima, se $\arctan x \pm \arctan y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vale la seconda, se $\arctan x \pm \arctan y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ vale la terza, 7): se $x < 1$ vale la prima, se $x > 1$ la seconda, 8) è vera per ogni $-1 \leq x < 1$

4.1.2)







5.1.2) Cominciamo dalla prima funzione. $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $Im(f) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$; la funzione è dispari, monotona decrescente ed ha un asintoto verticale per $x = 0$. È invertibile su tutto il suo dominio e la sua inversa è data da $y = \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+x^2}-1}}$
Per la seconda funzione si ha $Dom(f) = \mathbf{R}$ e $Im(f) = \mathbf{R}$. La funzione anche in questo caso è dispari e monotona crescente dunque invertibile con inversa data da $y = \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{2|x|}{\sqrt{1+x^2}-|x|}}$

6.1.2) Per la funzione $\cos x$, detta $q_n(x)$ la inversa nell'intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$, si ha $q_n(x) =$

$n\pi + \arccos x$ se n è pari mentre $q_n(x) = (n+1)\pi - \arccos x$ se n è dispari
Per la funzione $\sin x$, detta $q_n(x)$ la inversa nell'intervallo $[\frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}]$, si ha $q_n(x) = n\pi + \arcsin x$ se n è pari mentre $q_n(x) = n\pi - \arcsin x$ se n è dispari
Per la funzione $\tan x$, detta $q_n(x)$ la inversa nell'intervallo $[\frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}]$, si ha $q_n(x) = n\pi + \arctan x$ per ogni n
Per la funzione $\text{arccot}(x)$, detta $q_n(x)$ la inversa nell'intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$, si ha $q_n(x) = n\pi + \text{arccot} x$ per ogni n

7.1.2) Sono tutte vere tranne $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$. Infatti è vera $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$; si prenda ad esempio la funzione $f\colon [0,2] \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ e si prenda $A = [0,1]$ e $B = (1,2]$. $A\cap B = \emptyset$ mentre $f(A)\cap f(B) = [0,1]$.

8.1.2) $Dom(f) = (2,+\infty) \cup \{x \in (0,2)\colon x = 2e^{\frac{p}{q}} < 2,\ q \text{ dispari}, p \text{ e } q \text{ primi fra di loro}\}$. La proprietà p e q primi fra di loro si indica con $(p,q) = 1$

9.1.2) $\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}$

10.1.2) l'intervallo è $[1,2]$ e il valore è 2. Si calcoli $f^2(x)$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.1.2) f_1 : Essendo in presenza di una radice quadrata, il radicando deve essere positivo o nullo e dunque $x^{-3} \ge 0$. $x = 0$ va scartato poiché non si può dividere per lo zero e quindi il dominio della funzione è dato dalle $x > 0$. Ora di tutto $\mathbf{R}^+$ bisogna vedere quali valori, facenti parte del dominio della funzione f_1, si possono tenere. f_1 è il risultato della composizione di quattro funzioni $g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ g_4$ dove $g_4\colon \mathbf{R}^+ \ni x \to \frac{1}{x} \in \mathbf{R}^+$; $g_3\colon \mathbf{R}^+ \ni x \to x^3 \in \mathbf{R}^+$ [(1.1.2)]; $g_2\colon \mathbf{R}^+ \ni x \to \sqrt{x} \in \mathbf{R}^+$; $g_1\colon \mathbf{R}^+ \ni x \to \log_3 x \in \mathbf{R}$. Come ben noto, affinché ciascuna composizione abbia senso, è necessario che $\text{Im}(g_j) \subset Dom(g_{j+1})$ e ciò e facilmente verificabile. Dunque il dominio della funzione f_1 è $\mathbf{R}^+$ e la sua immagine è $\mathbf{R}$. Per quel che riguarda la monotonia si può dire che $g_1 \circ g_2 \circ g_3 \doteq h$ è la composizione di tre funzioni monotone crescenti mentre g_4 è monotona decrescente. Ora la composizione di $h \circ g_4 \equiv f_1$ è monotona decrescente. Sia infatti $x < x'$. Ne segue che $g_4(x) > g_4(x')$ data la decrescenza di g_4. Essendo h crescente si ha $h(g_4(x)) > h(g_4(x')$ da cui la decrescenza di $h \circ g_4$.
Va detto che la funzione $k\colon \mathbf{R}\backslash\{0\} \ni x \to \frac{1}{x} \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$; è diversa da $g_4\colon \mathbf{R}^+ \ni x \to \frac{1}{x} \in \mathbf{R}^+$; in quanto si è cambiato il suo dominio. Una funzione infatti è costituita da un dominio e dall'azione di una applicazione sul dominio. Cambiare il dominio lasciando inalterata l'applicazione cambia di fatto la funzione. Lo stesso discorso può ripetersi per g_3.

$f_2 = g_o \circ f_1$ con $g_o\colon [-1,1] \supset x \to [0,\pi]$ e quindi, per quel che riguarda il dominio bisogna vedere quali x sono tali che $-1 \le f_1 \le 1$ ossia $g_2 \circ g_3 \circ g_4 \in [3^{-1}, 3] \Rightarrow g_3 \circ g_4 \in [9^{-1}, 9] \Rightarrow x \in [3^{-\frac{2}{3}}, 3^{\frac{2}{3}}]$. Dunque abbiamo $Dom(f_2) = [3^{-\frac{2}{3}}, 3^{\frac{2}{3}}]$. $\text{Im}(f_2) = [0,\pi]$ e la funzione è monotona decrescente in quanto l'arccos è monotona decrescente.

$f_3 \equiv \sqrt{\frac{P}{Q}}$: $\frac{x^2-1}{x^2+1} \ge 0$ per $|x| \ge 1$ e quindi $Dom(f_3) = \{|x| > 1\}$. Poiché $P < Q$ per ogni x nel dominio, risulta che $\text{Im}(f_3) \subset [0,1)$. Facciamo vedere ora che qualsiasi numero reale $y \in [0,1)$ fa parte dell'immagine della funzione. Bisogna risolvere la equazione $\frac{x^2-1}{x^2+1} = y^2$ ossia

(1.1.2) Si può notare che come dominio di g_4 sia stato preso $\mathbf{R}^+$. Qualora fosse stato preso tutto $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ avremmo avuto $Img_4 \circ g_3 = \mathbf{R}\backslash\{0\}$ sarebbe stato in contrasto con la esistenza della radice ossia della funzione g_2.

$(1-y)x^2 = 1+y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1+y^2}{1-y^2}$ e quindi $x = \pm\sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}}$. Per quel che riguarda la monotonia si può scrivere $f_3 = \sqrt{1-\frac{2}{x^2+1}}$ ed osservare che $\frac{1}{x^2+1}$ è monotona crescente per $x<0$ e decrescente per $x>0$. Dunque f_3 è monotona crescente per $x>0$ e decrescente per $x<0$ (fatto evidente dalla parità di f_3).

2.1.2 f_1 : È somma di due funzioni monotone crescenti e dunque è monotona crescente $\Rightarrow$ invertibile sul dominio che è tutto $\mathbf{R}$.
f_2 : non vale lo stesso discorso per via del segno meno. Si può osservare che $f_2(1) = f_2(0)$ e quindi la inversa non può esistere. Come conseguenza si ha che certamente la f_2 non è monotona in quanto se lo fosse sarebbe invertibile ma abbiamo fatto appena vedere che non è possibile. Si badi bene che in casi analoghi, ossia la differenza di due funzioni monotone crescenti o decrescenti, può essere possibile stabilire la monotonia (non esiste però una regola generale ed ogni caso va trattato singolarmente). Ad esempio si consideri la seguente somma $2x - x = x$. Come nel caso in questione si è in presenza della differenza di due funzioni monotone crescenti che però danno luogo ad una funzione crescente.
f_3 : Riscriviamo $f_3(x) = (x+1)^2 - 4$ e poniamo $x = t-1$ ottenendo $f_3(x(t)) = \tilde{f}_3(t) = t^2 - 4$. È una funzione pari $\tilde{f}_3(t) = \tilde{f}_3(-t)$ e quindi non può essere invertibile su tutto il suo dominio in quanto i punti t e $-t$ hanno la stessa ordinata. Quello che si può fare è invertire sui sottoinsiemi $t \geq 0$ e $t<0$. Si ottiene $t = +\sqrt{y+4}$ per $t>0$ e $t = -\sqrt{y+4}$ per $t<0$.

3.1.2 1) $\cos\arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ si ottiene osservando che $\tan\arctan x = \frac{\sin\arctan x}{\cos\arctan x} = \frac{x}{|x|}\frac{\sqrt{1-\cos^2\arctan x}}{\cos\arctan x} = x$. Detto $z \doteq \cos\arctan x$, l'equazione diventa $z^2 = \frac{1}{1+x^2}$ ossia $|z| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ed essendo z sempre positivo (perché?) si ha $z = \cos\arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ottenere $\sin\arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è ora immediato. Basta fare $x = \frac{\sin\arctan x}{\sqrt{1-\sin^2\arctan x}}$ ossia $|\sin\arctan x| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ Ora $x\sin\arctan x > 0$ per cui si ottiene il risultato.

2) Si applica $\sin x$ a sinistra ed a destra ottenendo $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x|x|}{1+x^2} + \frac{|x|}{x(1+x)^2} = \frac{|x|}{x}$ e dunque $\sin(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}) = \frac{|x|}{x}$. Essendo $\frac{|x|}{x} = \sin\frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}$ si ha $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|}$ oppure $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \pi - \frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|}$ ma per $x<0$ quella con la seconda è falsa essendo $\pi - \frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|} > \pi$ per $x<0$ mentre $\pi - \frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|} = \frac{\pi}{2}\frac{x}{|x|}$ per $x>0$

3) La prima relazione è è definita per $|x| \leq 1$ ed è equivalente a $-\arccos x + \frac{\pi}{2} = \arcsin x$. Applicando $\sin x$ ad ambedue i membri si ottiene $x = x$ per ogni valore reale.
La seconda relazione è definita ugualmente per $|x| \leq 1$ ed applichiamo sin a sinistra ed a destra ottenendo $\sin(\arccos\sqrt{1-x^2}) = x$. La relazione fondamentale della trigonometria ci dice che $\sin(\arccos\sqrt{1-x^2}) = +\sqrt{1-\cos(\arccos\sqrt{1-x^2})}$. Davanti alla radice vi è il segno più in quanto $\arccos\sqrt{1-x^2} \in [0,\pi]$ e quindi $\sin(\arccos\sqrt{1-x^2}) \geq 0$. Ciò vuol dire che delle due possibilità $\sin\xi = \pm\sqrt{1-\cos^2\xi}$ va presa quella con il segno più. Dunque abbiamo $x = \sqrt{1-\cos(\arccos\sqrt{1-x^2})} = \sqrt{1-(1-x^2)} = |x|$ e quest'ultima relazione è vera solo se $x \geq 0$. Se invece $x<0$ la stessa sequenza di passaggi conduce (ricordando che $\arcsin x$ è una funzione dispari) a $-x = |x|$ che è vera per $x<0$.

4) Ambedue le relazioni sono definite per $x \in \mathbf{R}$. Per quanto riguarda la prima solo $x \in \mathbf{R}^+$ può eventualmente andar bene. Applicando il cos a sinistra ed a destra si ottiene $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos 2\arctan x = \cos^2\arctan - \sin^2\arctan x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}$ (usando l'esercizio 1)). Dunque la prima relazione è vera per ogni $x \in \mathbf{R}^+$. Se $x<0$, $\arctan x < 0$ e quindi la relazione diventa

$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = -2\arctan x = 2\arctan(-x)$ che conduce allo stesso risultato.

5) Le relazioni hanno senso per $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Per $x \to +\infty$ si esclude la seconda in quanto $\arctan x > 0$. Applicando tan si ottiene $x = x$. Identico discorso vale per la seconda solo che bisogna ricordarsi della periodicità della tangente.

6) Chiaramente $y \neq \frac{1}{x}$. Se $x = \frac{1}{y}$ vale la 2). Ovvia trigonometria dà $\tan(x \pm y) = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos(x\pm y)} = \frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$. Ora sia $x = x' + \pi k_x$ e $y = y' + \pi k_y$ dove $x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $k_x \in \mathbf{Z}$, $k_y \in \mathbf{Z}$; $x' + y' \in [-\pi, \pi]$. Data la periodicità della tangente si ha $\tan(x \pm y) = \tan(x' \pm y') = \frac{\tan x'\pm\tan y'}{1\mp\tan x'\tan y'}$. Inoltre è possibile definire $x' = \arctan a$ e $y' = \arctan b$ poiché (è essenziale) $x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $y' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ora possono aversi tre possibilità. Se $x' \pm y' \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ $\tan(x' \pm y') = \tan(x' \pm y' + \pi) \Rightarrow x' \pm y' + \pi = \arctan(\frac{\tan x'\pm\tan y'}{1\mp\tan x'\tan y'})$ in quanto $x' \pm y' + \pi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sostituendo ora $x' = \arctan a$ e $y' = \arctan b$ si ottiene $\arctan a \pm \arctan b + \pi = \arctan(\frac{a\pm b}{1\mp ab})$ Se $x' \pm y' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ allora $\arctan a \pm \arctan b = \arctan(\frac{a\pm b}{1\mp ab})$ mentre se $x' \pm y' \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ allora $\arctan a \pm \arctan b - \pi = \arctan(\frac{a\pm b}{1\mp ab})$

7) Si può applicare l'esercizio precedente facendo le opportune corrispondenze fra i vari simboli. In questo caso si ha $b = 1$ ed $a = x$. Quindi si ha $y' = \frac{\pi}{4}$ e dunque $x' + y' \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$. Se $x' + y' \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]$ ossia $x' \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ allora vuol dire che $a > 1$ e quindi la seconda delle due relazioni è vera per $a > 1$ (nell'esercizio vi è x) ossia $\arctan x + \arctan 1 = \pi + \arctan\frac{1+x}{1-x}$. Se invece $x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ allora $a < 1$ e quindi vale $\arctan x + \arctan 1 = \arctan\frac{1+x}{1-x}$.

8) Scrivendo la relazione come $-\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{\pi}{4} = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ed applicando sin a sinistra ed a destra si ottiene il risultato dopo avere osservato che la quantità $\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ è definita per $-1 \leq x < 1$ ed appartiene a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

4.1.2 $y = f(x) = \arccos\cos x : Dom_f = \mathbf{R}$; è chiaramente periodica di periodo 2π e continua essendo composizione di funzioni continue. Se $0 \leq x \leq \pi$ la funzione vale x in quanto si compongono una funzione e la sua inversa. Se invece $\pi \leq x \leq 2\pi$ allora si deve fare $\cos x = \cos(2\pi - x)$ dove stavolta $0 \leq 2\pi - x \leq \pi$ e dunque posso applicare di nuovo la funzione arccos. È chiaramente sbagliato pensare che il grafico della funzione sia $y = x$ (non è neppure periodica) in quanto la funzione arccos è quella funzione che inverte cos *esclusivamente nell'intervallo* $[0, \pi]$.

$y = \arctan\tan x$ è definita per ogni x eccetto per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ed inoltre è continua essendo composizione di due funzioni continue. Inoltre è periodica di periodo π Se $-\pi \leq x \leq \pi$ $y = x$ e quindi il grafico è dato da una successione di segmenti tutti paralleli alla bisettrice del primo e terzo quadrante che intersecano l'asse delle x nei punti $x = k\pi$ con k intero.

5.1.2 Scriviamo la funzione come $y = \tan\arccos\frac{x|x|}{2+x^2} \doteq f_1 \circ f_2 \circ f_3(x) = f_o$ (chi sono le varie f_i è ovvio). Prima di tutto troviamo il dominio. Si verifica che $\{\xi \in \mathbf{R} : \xi = \frac{x|x|}{2+x^2},\ x \in \mathbf{R}\} = (-1, 1)$. La dimostrazione di questo fatto (semplice) è posposta. Poiché $\xi \in (-1, 1)$ si può applicare arccos ed osservare però che se $x = 0$ allora il corrispondente valore di ξ vale $\frac{\pi}{2}$ e la tangente non può essere ivi applicata. Quindi alla fine $Dom(f_o) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Le seguenti osservazioni (dimostrate successivamente) consentono di restringersi a considerare $f_o|_{\mathbf{R}^+}$

1) f_o è strettamente decrescente, 2) f_o è dispari, 3) l'inversa (che esiste da 1)) è dispari pure essa

Grazie ai punti 1)–3) ci basta studiare la inversa per valori positivi di x.

$f_3(x)$ è monotona crescente per $x \geq 0$ essendo $f_3(x) = \frac{x^2}{2+x^2} = 1 - \frac{1}{2+x^2}$ ed essendo $\frac{1}{2+x^2}$; decrescente (quindi crescente con il segno - davanti). Essendo $\{y \in \mathbf{R} \mid y = f_3(x)\ x \geq 0\} = [0,1)$ (in altre parole l'immagine di f_3 per $x \geq 0$ è l'intervallo $[0,1)$). f_2 è decrescente ed inoltre ci interessa tutta e solo la parte compresa fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. $f_2 \circ f_3$ è monotona decrescente ed anche in questo caso il grafico di $f_2 \circ f_3$ assume tutti i valori compresi fra il sup e l'inf dell'immagine ossia $\{y \in \mathbf{R} \mid y = f_2 \circ f_3(x),\ x \geq 0\} = (0, \frac{\pi}{2}]$. Fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ f_3 è monotona crescente e quindi f_o è monotona decrescente; $Im(f_3)$ è l'insieme $\mathbf{R}^+$. Dunque si può invertire la funzione e indichiamola con $g\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$. È da notare come l'immagine di g non coincida esattamente con il dominio di f_o e quindi $g \circ f_o = f_o \circ g(x) \equiv x$ vale solo per $x \in (0,+\infty)$. Usando la formula **3.1.2** 1), si arriva alla formula dell'inversa data da $y = \frac{2\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ Infatti da $y = f_1 \circ f_2 \circ f_3(x)$ si ottiene $f_1^{-1}(y) = \arctan y = f_2 \circ f_3(x)$ da cui deriva $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}(y) = \cos\arctan y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = f_3(x)$ e da ultimo $f_o^{-1} = f_3^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}(y) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+y^2}-1}}$. Si verifichi che $\tan\arccos \frac{g(y)|g(y)|}{2+g^2(y)} = y$.

Veniamo ora alle dimostrazioni delle proprietà preannunciate prima.
$\{\xi \in \mathbf{R} \mid \xi = \frac{x|x|}{2+x^2}\ x \in \mathbf{R}\} = (-1,1)$. Essendo $\frac{x|x|}{2+x^2}$ una funzione dispari ci basta mostrare che $\{\xi \in \mathbf{R} \mid \xi = \frac{x|x|}{2+x^2}\ x \geq 0\} = [0,1)$ ossia bisogna dimostrare che è possibile risolvere la equazione $x^2 = 2a + ax^2$ per ogni $a \in [0,1)$. Infatti la soluzione è $x = \sqrt{\frac{2a}{1-a}}$ che è accettabile essendo il radicando positivo.

Il secondo punto da dimostrare è che f_o è dispari. Infatti f_3 è chiaramente dispari. Dunque si ha $f_2 \circ f_3(-x) = f_2(-f_3(x))$. Ora il grafico della funzione arccos ci dice che $\arccos(x) = \pi - \arccos(-x)$ ossia $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$. Dunque $f_1(f_2(-f_3(x))) = f_1(\pi - f_2(f_3(x))) = f_1(-f_2(f_3(x))) = -f_1(f_2(f_3(x)))$ e quindi si ha $(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(-x) = -(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x)$. Si verifichi l'applicazione del fatto che f_1 è periodica di periodo π e del fatto che è dispari.

La terza ed ultima dimostrazione da dare è costituita dalla affermazione secondo cui se una funzione invertibile è dispari allora anche l'inversa è dispari. Dunque supponiamo di avere una funzione f invertibile in un certo sottoinsieme del suo dominio e tale da verificare la proprietà $f(x) = -f(-x)$. Sia g l'inversa; $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$. $-x = (g \circ f)(-x) = (g \circ (-f))(x))$. Del resto $-x = (-g \circ f)(x)$ e quindi si ha $(g \circ (-f))(x)) = (-g \circ f)(x)$ ossia il risultato.

Per avere la inversa in $(-\infty, 0)$ si può usare la disparità di f_o. Infatti dalla disparità di f_o si arriva alla disparità della sua inversa. Dunque si ha $g(-x) = -g(x)$ e dunque per $x < 0$ l'inversa è $y = -\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+y^2}-1}}$. La notazione unificata consente di dire che l'inversa della funzione in $\mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^-$ è $y = \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+x^2}-1}}$.
Alternativamente si può dire che per $x < 0$ $f_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e quindi bisogna invertire $\tan x$ con $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Quando si applica $f_1^{-1}(y)$ si ottiene $\arctan y + \pi = f_2 \circ f_3(x)$ e quando si inverte f_2 si ha $-\cos\arctan y = -\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} < 0$ per cui l'inversa di f_3 dà $-\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+y^2}-1}}$.

6.1.2) È ben noto che $\arccos x\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, per definizione, inverte la funzione $\cos x$ solamente nell'intervallo $[0,\pi]$. È però evidente che la stessa funzione $\cos x$ è invertibile in ogni intervallo della forma $[n\pi, (n+1)\pi]$ con $n \in \mathbf{Z}$ solo che la funzione inversa è diversa in ognuno di questi intervalli. Se ad esempio $x \in [\pi, 2\pi]$ e quindi $n = 1$ indichiamo con $q_1(x)$ la funzione inversa in questione che sappiamo esistere. Sappiamo inoltre che $\cos x = \cos(2\pi - x) \doteq p$ solo che $2\pi - x \in [0,\pi]$. Ciò vuol dire che $q_1(p) = x = 2\pi - \arccos p$ e quindi $q_1(p) = 2\pi - \arccos(p)$. Va notato che l'uguaglianza $q_1(p) = x$ è conseguenza della definizione di q_1 mentre la seconda uguaglianza deriva dal fatto che $\arccos(\cos(2\pi - x)) = x$ per $x \in [\pi, 2\pi]$.
Se invece $x \in [2\pi, 3\pi]$ e quindi $n = 2$ sia $q_2(x)$ la funzione inversa della funzione coseno. Abbiamo

$\cos x = \cos(x-2\pi) = p$ e $x-2\pi \in [0,\pi]$. Quindi $q_2(p) = x = 2\pi + \arccos(p)$.
Se $x \in [3\pi, 4\pi]$ e quindi $n=3$ sia $q_3(x)$ la funzione inversa della funzione coseno. Abbiamo $\cos x = \cos(4\pi - x) = p$ e $4\pi - x \in [0,\pi]$. Quindi $q_3(p) = x = 4\pi - \arccos(p)$.
Proseguendo in questo modo otteniamo che se n è pari la funzione inversa è data da $q_n(x) = n\pi - \arccos x$ mentre se n è dispari si ha $q_n(x) = (n+1)\pi + \arccos x$

Per quanto riguarda la funzione $\sin x$ si divide l'asse reale in intervalli del tipo $[-\frac{\pi}{2} + n\pi, , \frac{\pi}{2} + n\pi] = [\frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}]$ ed indichiamo con $q_n(x)$ l'inversa in ciascuno di tali sottointervalli (chiaramente $q_0(x) = \arcsin x$). Se $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ allora $n=1$ ed inoltre $\sin x = \sin(\pi - x)$ dove stavolta $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per cui $q_1(p) = x = \pi - \arcsin(p)$.
Se $n=2$ e $x \in [\frac{3}{2}\pi, , \frac{5}{2}\pi]$ allora $\sin x = \sin(-2\pi + x) = p$ e quindi $q_2(p) = 2\pi + \arcsin(p)$.
Alla fine il risultato è quello dato ossia se n è dispari $q_n(x) = n\pi - \arcsin x$ mentre se n è pari $q_n(x) = n\pi + \arcsin x$.

Per quanto riguarda la funzione $\tan x$ si divide l'asse reale così come per il seno ed il risultato è che per ogni n $q_n(x) = n\pi + \arctan x$

Nel caso della funzione $\mathrm{arccot}(x)$ si divide l'asse come per la funzione coseno e $q_n(x) = n\pi + \mathrm{arccot}(x)$ per ogni n.

7.1.2) Cominciamo da $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Dobbiamo far vedere che $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ e che $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.
$\subset$: $f(A \cup B) \doteq \{y \in Y \mid y = f(x) \ \wedge \ x \in A \cup B\}$ e quindi la x sta in A oppure in B od in tutti e due se la loro intersezione è non nulla. Se $x \in A$ allora $f(x) \in f(A)$ e quindi $f(x) \in f(A) \cup f(B)$, Se $x \in B$ allora $f(x) \in f(B)$ ed analogamente $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Se $A \cap B \neq \emptyset$ e $x \in A \cap B$ allora $x \in A$ (oppure B) e quindi $f(x) \in f(A)$.
$\supset$: Sia $y \in f(A) \cup f(B)$ ossia $y \in \{y \in Y \mid y = f(x) \ \wedge \ x \in A\} \cup \{y \in Y \mid y = f(x) \ \wedge \ x \in B\}$. Essendo x appartenente tanto ad A che a B ne segue che appartiene alla loro intersezione e quindi $x \in A \cup B$ da cui il risultato.

Vediamo ora $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. $f(A \cap B) = \{y \in Y \mid y = f(x) \ \wedge \ x \in A \cap B\}$ e quindi $x \in A$ da cui $f(x) \subset f(A)$. Del resto $x \in B$ ugualmente per cui $f(x) \subset f(B)$ e quindi $f(x)$ deve stare anche in $f(A) \cap f(B)$.

Ora dimostriamo che $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Dobbiamo far vedere che $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ e che $f^{-1}(C \cup D) \supset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
$\subset$: $f^{-1}(C \cup D) = \{x \in X \mid f(x) \in C \cup D\}$ e quindi $f(x) \in C \ \vee \ f(x) \in D$. Di conseguenza $x \in f^{-1}(C) \ \vee \ x \in f^{-1}(D)$ ossia $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
$\supset$: $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in C\} \cup x \in X \mid f(x) \in D\}$; ciascuno dei due insiemi $\{x \in X \mid f(x) \in C\}$ e $\{x \in X \mid f(x) \in D\}$ è sottoinsieme di $\{x \in X \mid f(x) \in C \cup D\}$ per cui $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

Da ultimo è rimasto $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Dobbiamo far vedere che $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ e che $f^{-1}(C \cap D) \supset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
$\subset$: $f^{-1}(C \cap D) = \{x \in X \mid f(x) \in C \cap D\}$ e quindi $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C)$ e $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(D)$ e quindi della loro intersezione da cui la tesi
$\supset$: $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in C\} \cap \{x \in X \mid f(x) \in D\}$ e quindi $f(x) \in C \cap D$ da cui la tesi.

8.1.2) Una funzione del tipo $(P(x))^{\ln(Q(x))}$ è certamente definita quando $P(x) > 0$ e $Q(x) > 0$. Dunque si deve avere: $x > 0$ a causa del logaritmo, $x^2 - x - 2 > 0$ ossia $x < -1 \ \vee \ x > 2$. L'intersezione dei due insiemi dà $x > 2$. $x = 2$ va scartato poiché darebbe 0^0. D'altro canto se $\ln \frac{x}{2} = \frac{p}{q}$ con q dispari e $(p,q) = 1$ allora la base può essere negativa. Da ciò segue il risultato.