

§8.2 Successioni, serie e prodotti, sia numeriche che di funzioni

Il simbolo **Es:** significa la presenza di una o più domande a cui ancora non si è data una risposta o per motivi di tempo o perché non si è riusciti nell'intento

Sovente è riportata la fonte dell'esercizio il cui svolgimento può essere diverso da quello presente in queste pagine

L'ordine degli esercizi non è dato né per difficoltà né per argomento. Il presente capitolo non è a livello elementare. In generale gli esercizi richiedono una buona conoscenza della teoria delle serie esposta nei normali libri di testo. Inoltre una parte degli esercizi riguarda la teoria delle serie di potenze nel campo complesso.

1.8.2 Trovare la somma della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1})^{-1}$ [R.: 1, [S] pag.88]

2) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ [R.: 1, [K] pag.107]

3) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$ [Suggerimento: utilizzare $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = n \int_0^n \frac{dx}{x^2+n^2}$. R.: $\frac{\pi}{4}$, da [B] pag.49 e [K] pag.107]

4) Sapendo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \gamma$ (γ è la costante di Eulero), trovare la costante c tale che

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - c \ln n$ è finito e trovare tale limite [R.: $c = \frac{1}{2}$, $\ln 2 + \frac{\gamma}{2}$, da [B] pag.51]

5) Calcolare $\sum_{k=2}^{\infty} (-)^k \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ [R.: $3 \ln 2 - 2 \ln \pi$, da Ovidiu Furdui, *Journal of the School Science and Mathematics Association*, vol.108 (2), February 2008 (rivista online). La soluzione che segue è quella sottomessa da chi scrive]

6) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-)^{k-1}}{k}$ [R.: $\ln 2$, da [B] pag.56]

7) Dimostrare che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-)^k}{x+k}$ converge per ogni valore di x che non rende nullo nessuno dei denominatori [da [B] pag.66]

8) Dimostrare che $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+8} + \dots$ diverge per ogni valore di x [da [B] pag.66]

Dimostrare che $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+8} + \dots$ diverge per ogni valore di x [da [B] pag.66]

9) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ [R.: $\frac{1}{2}$, da [K] pag.107]

10) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$ [R.: $\frac{e}{e-1}$, da [K] pag.107 e [B] pag.528]

11) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} ((n+1)(n+2) \dots (n+n))^{1/n}$ [R.: $\frac{4}{e}$, da [K] pag.107]

12) Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) - 1 \right]$ [R.: $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$, da [B] pag.526. Sarà opportuno usare la formula di Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(n^{-1}))$$

13) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} (-)^{k-1} \frac{2k+1}{k^2+k}$ [R.: 1, da [K] pag.149. Si scomponga in fratti semplici]

14) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right)$ [R.: $\frac{3}{2} \ln 2$, da [K] pag.135. Si usi l'esercizio num. 4]

15) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)}$ [R.: $2 \ln 2 - 1$, da [B] pag.51. Si usi l'esercizio num. 4]

16) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(9k^2-1)}$ [R.: $\frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$, da [B] pag.51. Si usi l'esercizio num. 4]

17) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(36k^2-1)}$ [R.: $-3 + \frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2$, da [B] pag.52. Si usi l'esercizio num. 4]

18) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{12k^2-1}{k(4k^2-1)^2}$ [R.: $2 \ln 2$, da [B] pag.52. Si usi l'esercizio num. 4]

19) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(4k^2-1)^2}$ [R.: $\frac{1}{8}$, da [B] pag.52. Si usi l'esercizio num. 4]

20) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)^2}$ [R.: $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$, da [B] pag.51. Si usi l'esercizio num. 4]

21) Calcolare $\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx$ [R.: $1 - \gamma$]

22) Calcolare $\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\} \left\{ \frac{1}{1-x} \right\} dx$ [R.: $2\gamma - 1$. Problema U21 di *Mathematical Reflections* n.4 2006.]

23) Calcolare la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (-)^{k-1} \frac{\ln k}{k}$ [R.: $\frac{1}{2} \ln^2 2 - \gamma \ln 2$, da: *M.S.Klamkin A.M.M.* prob.4592]

24) Dopo aver dimostrato che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right)$ converge, calcolarne la somma.
[R.: $(\gamma - \ln \pi)/2$, da [B] pag.277.]

25) Dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ [Le dimostrazioni non sono semplici. Si tratta del celeberrimo risultato di Eulero. Sembra che Johann Bernoulli, una volta venuto a conoscenza del risultato cercato per anni dalle migliori menti matematiche dell'epoca, abbia esclamato : "Se solo mio fratello fosse ancora vivo". Tale citazione è presa dal bel libro [W.Dunham *Euler, the master of us all*, The Mathematical Association of America, 1999, pag.49] rich.17

26) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)}$ [R.: $\frac{4-\pi}{8}$. Si usi $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx$ e si faccia attenzione al passaggio al limite dentro certi integrali.] rich.45

27) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(k+1)}$ [R.: $\frac{2+6 \ln 2 - \pi}{10}$. Si usi $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx$ e si faccia attenzione al passaggio al limite dentro certi integrali.]

28) **Es:** Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(3k-1)}$ [R.: $\frac{12 \ln 2 - 9 \ln 3 + \sqrt{3}\pi}{6}$. Si usi $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx$ e si faccia attenzione al passaggio al limite dentro certi integrali. <http://people.missouristate.edu/lesreid/Advanced.html>, num.167]

- 29) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$
- 30) Calcolare $\prod_{k=2}^{+\infty} (k^3 - 1)/(k^3 + 1)$
- 31) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}$ [R.: $-\pi^3/32$]
- 32) Sia $a_k = a_0 < 1$ e $a_{k+1} = \frac{a_k^2}{a_k^2 - a_k + 1}$. Dimostrare che la serie converge e calcolarne la somma.
- 33) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}}$
- 34) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{a^4 n} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt[4]{k} + \sqrt[4]{k+1})}$ a intero
- 35) Calcolare $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m!n!}{(m+n+2)!}$
- 36) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$
- 37) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} (2^k k^2)^{-1}$ [suggerimento: fare il quadrato della serie al num.6 e usare $1/k = \int_0^1 t^{k-1} dt$]. [Vedi rich.47]
- 38) Calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} (k!)^2 2^{k+1} / (2k+1)!$
- 39) Calcolare $\int_0^{\pi/2} \sin x (\ln \sin x)^2 dx$ [B] p.520, ex.46]
- 40) Calcolare $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \frac{dx}{\ln x}$. (anche sul capito degli integrali e dei numeri complessi)
[<https://math.stackexchange.com/questions/280105/evaluating-int-01-frac1-x1x-frac-mathrm-dx-ln-x?noredirect=1&lq=1>]
- 41) Calcolare $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{x(1+x^2)}$.
- 42) Calcolare Sia $|x| > 1$. Dimostrare che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1}$ [B] pag.66 ex.8]
- 43) Calcolare Sia $|x| < 1$. Dimostrare che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k x^{2^k}}{1+x^{2^k}} = \frac{x}{x-1}$ [B] pag.25 ex.17]
- 44) Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m m}{(m+n)^2}$ [B] pag.90]
- 45) Calcolare $\sum_{k=2}^{+\infty} k(\coth k(4k^2 - 3))^{-1}$ [M.L.Glasser, *SIAM Review* Vol. 28, No. 2 (Jul., 1986), p. 242, Problem 85-9]

- 46) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6^k}{3^{k+1} - 2^{k+1}}$ [Putnam 1984]
- 47) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}}$ [[KN] ex.2.2.15 pag.28]
- 48) Calcolare $\prod_{k=0}^{+\infty} \left[1 + \frac{2}{x^{2^k} + x^{-2^k}} \right]$ [[KN] ex.2.2.16 pag.28]
- 49) Calcolare $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + x^{3^k} + x^{2 \cdot 3^k})$, al variare di $x \in \mathbf{R}$ [[KN] ex.2.2.17 pag.28]
- 50) Sia $a_1 = 1$ e $a_n = n(a_{n-1} + 1)$. Calcolare $\prod_{k=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{a_k} \right]$ [[KN] ex.2.5.10 pag.48]
- 51) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}}$ [[KN] ex.3.1.6 pag.64]
- 52) Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ [[KN] ex.3.1.8 pag.64]
- 53) Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m)}$ [[KN] ex.3.1.4 pag.64]
- 54) Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ [[KN] ex.3.1.10 pag.65]
- 55) Sia $a_1 > 1$ e $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n$ [[KN] ex.3.1.29 pag.68]
- 56) Sia $\{a_j\}$ una successione di termini positivi tale che $\sum 1/a_k = +\infty$. Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{(a_2 + b)(a_3 + b) \cdots (a_{n+1} + b)}$ [[KN] ex.3.1.15 pag.66]
- 57) Calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} 3^k \sin^3 \frac{x}{3^{n+1}}$ usando $\sin x = 3 \sin(x/3) - 4 \sin^3(x/3)$ [[KN] ex.3.1.18 pag.66]
- 58) Calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \sin^3(3^{n-1}x)$ usando $\sin x = 3 \sin(x/3) - 4 \sin^3(x/3)$ [[KN] ex.3.1.18 pag.66]
- 59) Calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} \arctan \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}$
- 60) Calcolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n^4 + n^2 + 1)}$ [[KN] ex.3.1.7 pag.64]
- 61) Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{8n}{n^4 - 2n^2 + 5}$ [[KN] ex.3.1.24 pag.68]

- 62) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{2k} \sin^4 \frac{x}{2^k}$
- 63) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-2k} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2^k}}$
- 64) Calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k}$ [[KN] ex.3.1.19 pag.67]
- 65) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{2xy}{k^2 - x^2 + y^2}$. Analizzare i casi speciali: 1) $x = y = 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{k^2}$
 [[KN] ex.3.1.24 pag.68], $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k^2}$, 3) $x = y = \frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2k^2}$
- 66) Calcolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{(1-a)a^n x}{1+a^{2n+1}x^2}$ $0 < a < 1$ [[KN] ex.3.1.20 pag.67]
- 67) Calcolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{(a-1)a^n x}{1+a^{2n+1}x^2}$ $x \neq 0, a > 1$ [[KN] ex.3.1.20 pag.67]
- 68) Calcolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{3+7n} + x^2 2^{5n+2} - x^4 2^{3n+1} - x^6 2^n}{(2^{4n+2} + 5x^2 2^{2n} + x^4)(2^{2n+1} + x^2)^2}$
- 69) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$ [[KN] ex.3.1.24 pag.68]
- 70) Calcolare $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos^3 3^k x}{3^k}$ [[KN] ex.3.1.16 pag.66]
- 71) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{4 - 2k^2}{k^4 + k^2 + 3}$
- 72) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan \left(\sum_{k=1}^{4n} \arctan \frac{-3k^2 + 1 - k^4}{-k^2 + 7 + k^4} \right)$
- 73) Calcolare $\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-2kx} - e^{-\pi k^2 x^2}) dx$ [da: *G.H.Hardy* NOTES ON SOME POINTS IN THE INTEGRAL CALCULUS XL, some cases of term-by-term integration of an infinite series, *Messenger of mathematics* Vol.44, (Mar.,1915),145-149]
- 74) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \arctan \frac{2x^2}{k^2}$ [[BM], [B] pag.314]
- 75) Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh 2^n}$

2.8.2 Siano date $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(x, k)$ e $G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k f(x, k)$ dove $f(x, 2k) = \nu f(\lambda(x), k)$

con $\nu \in \mathbf{R}$ e $\lambda(x)$ è una funzione reale. Allora

$$F(x) = (2\nu)^n F(\lambda^{[k]}(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} (2\nu)^j G(\lambda^{[j]}(x)), \quad \lambda^{[k]}(x) = \underbrace{\lambda \circ \dots \circ \lambda}_{k \text{ volte}}(x)$$

3.8.2 Applicare il risultato precedente alle funzioni $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$ e $G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + k^2}$ che possiamo dedurre da [rich.26](#) e seguenti del capitolo sugli integrali complessi.

4.8.2 Siano date $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(\frac{x}{k})$ e $G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k f(\frac{x}{k})$. Allora si ha $F(x) = 2^{-n} F(2^n x) + \sum_{k=1}^n 2^{-k} G(2^k x)$ e se F è limitata $F(x) = \sum_{k=1}^n 2^{-k} G(2^k x)$

5.8.2 Utilizzando il num.1-65) e 1-74) dell'esercizio num.1 dimostrare che a)

$$2 \arctan \frac{\tanh x}{\tan x} = 2 \arctan \frac{\tanh(2x)}{\tan(2x)} + \arctan \frac{\sinh(2x)}{\sin(2x)}$$

e b)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \arctan \frac{\sinh(2^k x)}{\sin(2^k x)} = \arctan \frac{\tanh x}{\tan x} - \frac{1}{2^n} \arctan \frac{\tanh(2^n x)}{\tan(2^n x)}$$

e mandando $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \arctan \frac{\sinh(2^k x)}{\sin(2^k x)} = \arctan \frac{\tanh x}{\tan x}$$

6.8.2 Assumendo che la serie converge, se ne trovi la somma $\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a+b}{x^3} + \frac{a+2b}{x^4} + \frac{2a+3b}{x^5} + \frac{4a+5b}{x^6} + \frac{6a+8b}{x^7} + \dots$ [da: *E.K.Clarke; E.B.Davis, A.M.M. Vol.22, No.5 (May, 1915), 164-165.* L'autore dice che la serie converge se e solo se $0 < r < 1$ ma questo è falso non appena si pensa ad $a=b=1$. In tal caso infatti la successione corrisponde alla successione di Fibonacci il cui termine diverge esponenzialmente.]

7.8.2 Dire se converge o diverge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - f(n))$ dove $f(n) = 2^{-p}$ se $2^{p-1} \leq n < 2^p$.

[I.Niven, C.F.Pincka *American Mathematical Monthly*, Vol.65, No.1 (Jan.,1958),44]

8.8.2 Sia data la serie $\sum a_k$.

- $\overline{\lim} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l < 1$ la serie converge (test di D'Alembert)
- Se esiste k_0 tale che $k > k_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$ la serie diverge
- Se $\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l > 1$ la serie diverge
- Se $\overline{\lim} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l > 1$ non si può trarre conclusione. Tale fatto fa sì che il criterio del rapporto è meno "preciso" del criterio della radice.
- Se $\underline{\lim} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l > 1$ la serie diverge
- Se $\underline{\lim} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l < 1$ non si può trarre conclusione.

- Se $\overline{\lim} |a_k|^{1/k} = l < 1$ $\sum a_k$ converge (test di Cauchy)
- Se $\overline{\lim} |a_k|^{1/k} = l > 1$ $\sum a_k$ diverge (test di Cauchy)

9.8.2 Data una qualsiasi successione di numeri positivi $\{a_k\}$ si ha: se $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}$ esiste allora esiste $\lim a_k^{1/k}$ e $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim a_k^{1/k}$. Dare un esempio in cui non esiste $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ma esiste $\lim a_k^{1/k}$

- Dimostrare che $\underline{\lim} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \underline{\lim} a_k^{1/k}$,
- Dimostrare che $\overline{\lim} a_k^{1/k} \leq \overline{\lim} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

Ne segue che $\underline{\lim} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \underline{\lim} a_k^{1/k} \leq \overline{\lim} a_k^{1/k} \leq \overline{\lim} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

rich.10

10.8.2 Sia data una successione $a_k > 0$. Dimostrare che ciascuno dei seguenti criteri implica convergenza: i) $\overline{\lim} a_k^{1/\ln k} < 1/e$, ii) $\overline{\lim} (ka_k)^{1/(\ln \ln k)} < 1/e$, iii) $\overline{\lim} (k \ln ka_k)^{1/(\ln \ln \ln k)} < 1/e$

11.8.2 Siano $\sum d_k$, $\sum c_k$ due serie a termini positivi la prima divergente e la seconda convergente. Dimostrare che $\overline{\lim} d_k/c_k = +\infty$ e $\underline{\lim} c_k/d_k = 0$.

rich.31

- Dare due serie $\sum d_k$, $\sum c_k$ come prima e tali che $\overline{\lim} c_k/d_k = +\infty$

12.8.2 Sia $a_k > 0$ e tale che $\underline{\lim} (a_k)^{1/\ln k} > 1/e$. Dimostrare che $\sum a_k$ diverge.

13.8.2 Raggruppamenti Sia data la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e sia data la successione $\{n_k\}$ e sia $b_1 = a_1 +$

$a_2 + \dots + a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$, e via dicendo. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ è detta *raggruppamento* della

serie. Ci si pone la domanda se dalla convergenza della serie raggruppata segue la convergenza della serie $\sum a_k$. In generale non è vero. Basti pensare alla successione $(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ e si facciano gruppi di due. Si hanno i tre risultati

- 1) se la serie $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum b_k$
- 2) Se $a_k \geq 0$ e se $\sum b_k$ converge, converge pure $\sum a_k$
- 3) Se $a_k \rightarrow 0$ e $n_{k+1} - n_k \leq N$ per ogni k , allora se $\sum b_k$ converge, converge pure $\sum a_k$.

rich.53

14.8.2 Sia data la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a^{\frac{1}{k}}$. Dimostrare che oscilla ma che raggruppando opportunamente i termini la si può far convergere ai suoi valori limiti. Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (1 - a^{\frac{1}{k}})$ converge [B] pag.66 ex. n.4

15.8.2 Sia $a_n \searrow 0$ e $\sum a_n$ convergente. Ne segue $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$. Utilizzare tale risultato per

dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\frac{1}{n}}$ diverge

rich.7

- Sia p_n una successione monotona tendente a $+\infty$ lentamente quanto si vuole. Trovare una serie $\sum a_k$ positiva monotona convergente a_n tale che $p_n a_n n$ non tende a zero.
- Sia p_n una successione non monotona tendente a $+\infty$ lentamente quanto si vuole. Trovare una serie $\sum a_k$ positiva monotona convergente a_n tale che $p_n a_n n$ non tende a zero.

16.8.2 Si dimostri che se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora converge pure $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_k + a_{k+1})$ e la differenza

fra la prima e seconda vale $a_1/2$. Dare un esempio in cui non vale il contrario ma dimostrare che il contrario vale se $a_k \geq 0$. [B] pag.66 ex. n.10]

17.8.2 Sia $v_k \searrow 0$ e tale che $\sum v_k = +\infty$. Dimostrare che la serie $\sum (a_1 v_{pk+1} + a_2 v_{kp+2} + \dots + a_p v_{kp+p})$ converge se e solo se $a_1 + \dots + a_p = 0$. [B] pag.68 ex. n.17]

18.8.2 Sia $\sum a_k$ convergente. Dimostrare che la successione $k(a_{k+1} - a_k)$ può oscillare o convergere a zero. [B] pag.68 ex. n.18]

19.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione tale che sia ka_k che $\sum k(a_k - a_{k+1})$ convergono. Dimostrare che $\sum a_k$ converge [K] ex.3.4.18 p.95]

20.8.2 Sia $a_n \geq a_{n+1} > 0$ e tale che per infiniti interni $\{n_k\}$ si ha $a_{n_k} \geq C/n_k$ per un valore $C > 0$. Dimostrare che la serie $\sum a_k$ diverge [RRA] pag.76 ex.2.3.10]

21.8.2 Teorema di Abel-Dirichlet Dopo avere dimostrato che $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} a'_k B_k$

dove $B_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k b_i$ e $a'_k \stackrel{\text{def}}{=} a_{k+1} - a_k$, si dimostrino i risultati

rich.11

Dirichlet Sia $a_k \searrow 0$ e $\sum_{k=0}^n b_k$ limitata per ogni n . Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ converge

Abel Sia $\sum a_k$ convergente e $b_n \geq b_{n+1} \geq b \geq 0$. Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ converge

• si dia un esempio di successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ tale che $a_k \rightarrow 0$ in modo non monotono, $\sum_{k=0}^n b_k$ limitata per ogni n e $\sum a_k b_k$ non converge.

• Sia data una successione $\{a_k\}$ tale che $\sum ka_k$ converge. Dimostrare che $\sum a_k$ converge.

Utile negli esercizi è anche la formula

$$\begin{aligned} \sum_{k=p+1}^q a_k b_k &= a_q B_q - \sum_{k=1}^{q-1} (a_{k+1} - a_k) B_k - a_p B_p + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k = \\ &= a_q (B_q - B_p) + a_q B_p - a_p B_p - \sum_{k=1}^{q-1} (a_{k+1} - a_k) (B_k - B_p) - \sum_{k=1}^{q-1} (a_{k+1} - a_k) B_p + \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) (B_k - B_p) + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_p = \\ &= a_q (B_q - B_p) - \sum_{k=p}^{q-1} (a_{k+1} - a_k) (B_k - B_p) \end{aligned}$$

22.8.2 Siano date le successioni di funzioni $\{a_k(x)\}$ e $\{v_k(x)\}$ ed un intervallo $I \ni x$, tali che 1) $\left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq K$, per ogni $x \in I$ 2) $v_k(x) \geq v_{k+1}(x)$ per ogni $x \in I$, 3) $v_k(x) \rightarrow 0$ uniformemente. Allora $\sum a_k(x) v_k(x)$ converge uniformemente [B] pag.125]

Siano date le successioni di funzioni $\{a_k(z)\}$ e $\{v_k(z)\}$ ed un insieme $I \subset \mathbf{C}$, tali che 1) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z)$, è uniformemente convergente, 2) $\sup_{z \in I} |v_k(z)| \leq V$ per ogni k , 3) $\sup_{z \in I} \sum_{k=1}^n |v_k(z) - v_{k+1}(z)| \leq V_1$

per ogni k . Allora $\sum a_k(z)v_k(z)$ converge uniformemente [B] pag.246]

23.8.2 Sia $a_k \searrow 0$ e $\sum a_k < +\infty$. Mostrare che $\sum k(a_{k+1} - a_k)$ converge. Inoltre se $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} > 0$ allora $k^2(a_{k+1} - a_k) \rightarrow 0$. [B] pag.68 ex.19 (Hardy)]

24.8.2 Sia $\sum a_k = A$ convergente e $m_{k+1} \geq m_k$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k = +\infty$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^n a_k m_k = 0 \quad [\text{B}] \text{ pag.66}]$$

25.8.2 Dimostrare che se $\sum na_n$ converge, converge pure $\sum a_n$ [HA] pag.24 ex.2.6]

26.8.2 Dimostrare che non esiste una successione $a_k \geq 0$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

converge [Twentieth Annual Iowa Collegiate Mathematics Competition University of Northern Iowa, Saturday, March 1, 2014]

27.8.2 Sia $a_k > 0$ e $\sum a_k$ convergente. Dimostrare che esiste $b_k \nearrow +\infty$ e $\sum a_k b_k$ converge, vedi pure [rich.29] [da [Sy], pag.215; Osservazione: se fosse $b_k \geq 0$ e $\sum b_k < +\infty$ non ci sarebbe nulla da dimostrare grazie al fatto che $\sum a_k b_k \leq \sum a_k \cdot \sum b_k$]

• Sia $a_k > 0$ e $\sum a_k = +\infty$. Trovare una successione $b_k \searrow 0$ e $\sum a_k b_k = +\infty$. È evidente che la stessa soluzione si avrebbe se $a_k \rightarrow +\infty$ vedi [rich.2] [rich.1]

28.8.2 Sia $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$, $C_n = c_1 + \dots + c_n$. Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_1 + \dots + C_n)/n$. [B] pag.91] [rich.55]

29.8.2 Sia $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$ e $\sum c_k = C$ dove $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$. Dimostrare che $AB = C$ [G.H.Hardy *The multiplication of conditionally convergent series*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) vol.6 (1908) pp.410–423 dove lo si attribuisce ad Abel] [rich.56]

30.8.2 Dimostrare che se $\sum a_k$ converge al valore A , $\sum b_k$ converge al valore B , almeno una delle due serie converge assolutamente, allora la serie $\sum c_n = AB$ con $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Dimostrare che il prodotto della serie $\sum (-)^k/\sqrt{k}$, per se stessa è una serie divergente (da cui segue che il prodotto di due serie semiconvergenti non è detto converga) [rich.54]

31.8.2 Sappiamo che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k$ esiste allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$. Trovare un esempio tale

che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=[n/2]+1}^n a_k$ esiste ma $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$ non esiste [problema 1380 qui http://pme-math.org/wp-content/uploads/2022/01/PME2021_Fall_NewProbSolns.pdf]

32.8.2 Sia $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = C$. Dimostrare che $A \cdot B = C$. [La

dimostrazione più breve fa uso di [rich.37] ed il risultato è attribuito da Hardy ad Abel. G.H.Hardy *The multiplication of conditionally convergent series*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) vol.6 (1908) pp.410–423]. Vedi anche [rich.56]

33.8.2 Siano $\sum a_k$ e $\sum b_k$ assolutamente convergenti. Allora $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \doteq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n a_j b_{n+1-k}$

converge assolutamente [G.H.Hardy *The multiplication of conditionally convergent series*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) vol.6 (1908) pp.410–423 dove lo si attribuisce a Cauchy]

34.8.2 Sia $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$, $na_n = o(1)$, $nb_n = o(1)$. Dimostrare che $\sum c_k = C$ dove $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1$ e $C = AB$ [G.H.Hardy *The multiplication of conditionally convergent series*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) vol.6 (1908) pp.410-423] rich.57

35.8.2 Sia $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$, $na_n = O(1)$, $nb_n = O(1)$. Dimostrare che $\sum c_k = C$ dove $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1$ e $C = AB$ [G.H.Hardy *The multiplication of conditionally convergent series*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) vol.6 (1908) pp.410-423]

36.8.2 Sia $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$, e $\psi(n)$ una funzione della forma $\psi(n) = \prod_{k=1}^n (\ln_{(k)} n)^{a_k}$, $a_k \geq 0$. Inoltre $na_n\psi(n) \rightarrow 0$, $nb_n/\psi(n) \rightarrow 0$. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n a_kb_{n+1-k}$

converge [G.H.Hardy *The multiplication of conditionally convergent series*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) vol.6 (1908) pp.410-423]

37.8.2 Siano date le serie $\sum (-1)^{k-1}a_k = A$ e $\sum (-1)^{k-1}b_k = B$ con $|a_k| + |b_k| \searrow 0$. Allora per la convergenza del prodotto di Cauchy le seguenti condizioni sono: 1) $|c_n| = a_1b_n + \dots + a_nb_1 \rightarrow 0$ necessaria e sufficiente 2) $(a_1 + \dots + a_n)b_n \rightarrow 0$ e $(b_1 + \dots + b_n)a_n \rightarrow 0$ necessaria e sufficiente 3) $\sum a_kb_k$ convergente sufficiente ma non necessaria 4) $\sum (a_nb_k)^{1+\varepsilon}$ convergente per ogni $\varepsilon > 0$ necessaria ma non sufficiente [G.H.Hardy *The multiplication of conditionally convergent series*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (2) vol.6 (1908) pp.410-423]

38.8.2 Es: Si diano due serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ convergenti ma non assolutamente il cui prodotto di Cauchy converge assolutamente [Roy O.Davies, Alfred Weinman, Prob. num.5502, *American Mathematical Monthly* vol.75, No.6(Jun.-Jul., 1968), 688-689]

39.8.2 Sia $a_k \rightarrow 0$. Dimostrare che le sue serie $\sum a_k$ e $\sum (a_k + a_{k+1})$ convergono o divergono entrambi [ex. 3.4.15 da [KN] pag.95]

40.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione monotona decrescente tale che $\sum a_k = +\infty$. Mostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}} = 1$ [ex. 3.2.54 da [KN] pag.81]

41.8.2 Sia $a_k \searrow 0$ e tale che $(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)$ è limitata da sopra. Dimostrare che $\sum a_k$ converge. [ex. 3.2.60 da [KN] pag.82]

42.8.2 Sia $a_k \geq 0$ e $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq 2ea_1$ [ex. 3.2.67 da [KN] pag.83]

43.8.2 Sia $p_k \rightarrow +\infty$ e $\sum a_k$ convergente. Dimostrare che $(a_1p_1 + \dots + a_np_n)/p_n \rightarrow 0$. [ex. 3.4.26 da [K] pag.95]

44.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Dimostrare che se $\sum a_kb_k$ converge, allora $a_n(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = o(1)$. [da [MGLP] ex.2.6. pag.37, ex. 3.4.27 da [K] pag.97] rich.35

• Sia $a_k \searrow 0$. Dare una successione $\{b_k\}$ tale $a_n(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = o(1)$ ma $\sum a_kb_k$ diverge [da [MGLP] ex.2.6. pag.37]

Dire se nei precedenti esempi la monotonia di $\{a_n\}$ è necessaria [da [MGLP] ex.2.6. pag.37]

45.8.2 Sia $a_k \searrow 0$ e $\sum b_k$ convergente. Dimostrare che $\sum a_kb_k$ converge e $\sum_{k=n}^{+\infty} a_kb_k = o(a_n)$ [da [MGLP] ex.2.7. pag.37]

46.8.2 Sia $\{\varepsilon_k\}$ una successione composta da $+1$ e -1 e $\{a_k\}$ una successione tale che $a_k \searrow 0$ e $\sum a_k\varepsilon_k$ converge. Allora $a_n(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) \rightarrow 0$

47.8.2 Sia $\sum a_k k$ convergente con $a_k \in \mathbb{C}$. Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{n} = 0$ dove $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

48.8.2 (Cauchy) Sia $a_k \searrow 0$ negli esempi che seguono. Allora la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum 2^k a_{2^k}$ **rich.3**

- dare un esempio di successione positiva $\{a_k\}$ che tende a zero in modo non monotono tale che $\sum a_k$ converge e $\sum 2^k a_{2^k}$ non converge
- dare un esempio di successione positiva $\{a_k\}$ che tende a zero in modo non monotono tale che $\sum a_k$ non converge e $\sum 2^k a_{2^k}$ converge
- Dimostrare che $\sum a_k$ e $\sum \min\{a_k, 1/k\}$ convergono o divergono assieme [da [MGLP] ex.2.2. pag.36]
- Dimostrare che $\sum a_k/k$ e $\sum \min\{a_k, 1/\ln k\}/k$ convergono o divergono assieme [da [MGLP] ex.2.2. pag.36]

49.8.2 Sia $\{a_k\}$ monotona. Dimostrare che anche $2^k a_{2^k}$ è monotona ovvero trovare un controesempio. [da: *R.W.Hamming A.M.M. Vol.52, No.2 (Feb., 1945), 70-72*]

50.8.2 Dimostrare ovvero trovare un controesempio alla seguente affermazione: sia $\sum a_k$ una serie convergente (quindi $a_k \rightarrow 0$). Allora converge pure la serie $\sum a_k^2$

51.8.2 Si dimostri: $a_k > 0 \quad \sum a_k < \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} k a_k = 0$. Altrimenti si dia un controesempio. **rich.5**

52.8.2 Sia $\{a_k\}$ tale che $a_k \geq 0$, $\sum a_k < +\infty$, e sia $\beta_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Dimostrare che $\sum a_k e^{-\beta_k} < 1$.

53.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che se la serie $\sum a_k$ converge allora converge pure la serie $\sum \sqrt{a_k}/k$. È vera la affermazione se si toglie l'ipotesi che $a_k > 0$ e si considera $\sum \sqrt{|a_k|}/k$?

54.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum \sqrt{a_k a_{k+1}}$. Il viceversa non è vero e si dia un controesempio nella cui ricerca è utile avere presente che se $a_k \searrow 0$ allora $\sqrt{a_k a_{k+1}} \geq a_{k+1}$ e quindi se converge $\sum \sqrt{a_k a_{k+1}}$ converge pure $\sum a_k$. **rich.24**

55.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum (a_k^{-1} + a_{k+1}^{-1})^{-1}$. Il viceversa non è vero e si dia un controesempio. È utile tenere presente la stessa osservazione dell'esempio precedente.

56.8.2 Sia $\sum a_k < +\infty$ e $a_k - a_{k+1}$ monotona decrescente. Dimostrare che $a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1} \rightarrow +\infty$ [da: *R.O. Davies, A.M.M. Vol.75, No.8 (Oct., 1968), pag.915-916*]

57.8.2 Sia $a_n > 0$ e tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right] = L < 1$. Dimostrare che $\sum a_k$ converge [RRA pag.83 ex.2.3.19]

58.8.2 Sia d_k una successione monotona decrescente tale che $\sum d_k = +\infty$. Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_2 + d_4 + \dots + d_{2n}}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + \dots + d_{2n}} = \frac{1}{2}$

59.8.2 Si dia una successione $\{a_k\}$ tale che $a_k \rightarrow 0$ ma $\sum (-1)^k a_k$ non converge.

60.8.2 Si dimostri che se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum a_k^3$ ovvero si dia un controesempio

61.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Dire se converge o meno la serie $\sum (-1)^k \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$ [da [K] ex. 3.4.19 pag.95]

62.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione di termini positivi. Dimostrare che: 1) se $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) >$

0 allora la serie $\sum (-1)^k a_k$ diverge 2) se $\overline{\lim} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 0$ oppure $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 0$ allora la serie $\sum (-1)^k a_k$ diverge

63.8.2 Sia $a_k \nearrow +\infty$. Dare un esempio tale che $\sum \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1} + a_k}$ converga oppure dimostrare che diverge sempre

64.8.2 Sia $0 \leq a_k \leq Aa_n$ per $n \leq k \leq 2n$ con $A > 1$ e $\sum a_k$ convergente. Mostrare che $na_n \rightarrow 0$ [Putnam 1963]

65.8.2 Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k, b_k > 0$ e inoltre, definitivamente in k $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Allora se $\sum b_k$ converge, converge pure $\sum a_k$.

66.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum \frac{a_k}{1 + a_k}$

67.8.2 Sia $a_k > 0$. Studiare che relazione intercorre fra la convergenza o la divergenza della serie $\sum a_k$ e la divergenza o convergenza delle serie: 1) $\sum \frac{a_k}{1 + k^2 a_k}$, 2) $\sum \frac{a_k}{1 + a_k^2}$ 3) $\sum \frac{a_k}{1 + ka_k}$. In quest'ultimo caso dimostrare che se $a_k \searrow 0$, e la serie $\sum a_k$ diverge, diverge pure la serie $\sum \frac{a_k}{1 + ka_k}$.

68.8.2 Dimostrare o produrre un controesempio alla seguente affermazione: se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{1 - \frac{a_k}{a_{k-1}}} = 0$ la serie $\sum a_k$ converge, mentre diverge se il limite è diverso da zero [A.M.M., vol.25, No.1 (Jan.,1918),21]

69.8.2 Siano date due successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ tali che $\sum a_k^2 < +\infty$, $\sum b_k^2 < +\infty$. Dimostrare che per ogni intero $p \geq 2$ $\sum (a_k - b_k)^p$ converge [Putnam 1940]

70.8.2 Sia $\sum a_k$ convergente. Dire se converge o meno la serie $\sum 1 - (\sin a_k)/a_k$ [KZ] ex.3.4.3 pag.92]

71.8.2 Sia α_n monotona crescente e $f(x): [\alpha_1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ crescente tale che $\int_{\alpha_1}^{+\infty} (xf(x))^{-1} dx < +\infty$. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right) \frac{1}{f(\alpha_n)} < +\infty$. [KZ] ex.3.3.14 pag.91]

72.8.2 (Test di Kummer) Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ due successioni positive tali che $b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \geq c$ per una costante positiva c . Allora $\sum a_k$ converge. Dimostrare anche la proposizione inversa ossia se $\sum a_k$ converge allora esiste una successione $\{b_k\}$ tale che è vera la relazione scritta rich.23

73.8.2 (Test di Kummer) Se $b_k > 0$, $a_k > 0$, $\sum 1/b_k$ diverge e $b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \leq 0$ allora $\sum a_k$ diverge. Viceversa se $\sum a_k$ diverge, allora esiste $\{b_k\}$ tale che $\sum 1/b_k$ diverge e $b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \leq 0$ rich.23

74.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione. Se la successione converge, allora esistono i limiti i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ e ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{m2^k}$ per ogni intero $m \geq 1$. Sia ora $\{a_k\}$ una successione tale che la successione $\{ka_k\}$ è non-decrescente. Sono sufficienti i) e ii) (separatamente) per la convergenza di $\{a_k\}$? [da: Klaus Schurger; Ellen Hertz, A.M.M. Vol.94, No.5 (May, 1987), prob. num. 6502, pp.470-471]

75.8.2 (The Hardy–Landau converse of Cauchy’s first theorem) Sia: i) $\{a_k\}$ una successione di reali, ii) $n(a_n - a_{n+1}) < K$, oppure $n(a_{n+1} - a_n) < K$, iii) $b_n = (a_1 + \dots + a_n)/n \rightarrow l$. Allora $a_n \rightarrow l$. [da [B] p.423. In ogni caso se $n(a_n - a_{n+1})$ converge, deve convergere a zero]

Il primo Teorema di Cauchy asserisce che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - a_n = l$ allora $a_n/n \rightarrow l$ converge allo

stesso limite. La generalizzazione è $b_k \searrow +\infty$, e $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} = l$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k/b_k = l$.

[Quello che qui, nella definizione di [B] è detto “Primo teorema di Cauchy”, è stato chiamato “Teorema di Cesàro–Stolz”. Si veda pure [MGLP pag.19 ex.2.1 dove la condizione è $(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) = o(n)$] **rich.38**

76.8.2 Sia $(a_1 + \dots + a_n)/n \rightarrow l$ e $n(a_{n+1} - a_n)$ monotona crescente. Allora $a_n \rightarrow l$. [da [B] pag.426. Affinché l’esercizio abbia un minimo di interesse rispetto al precedente è opportuno che $l \in \overline{\mathbf{R}}$.]

77.8.2 Utilizzare il Teorema di Cesàro–Stolz per dimostrare il risultato di **rich.7** [B] pag.50 ex.13]

78.8.2 (Abel, Dini) Sia $a_k > 0$. Dimostrare che la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum a_k/S_k$ dove $S_k = a_1 + \dots + a_k$. **rich.8**

- Dimostrare che $\sum a_k/S_k^{1-\delta}$, $\delta > 0$, converge se e solo se converge $\sum a_k$
- Dare un esempio di serie (i cui termini evidentemente non hanno segno definito) tale che $\sum a_k$ converge ma $\sum a_k/S_k$ non converge ed inoltre supponiamo che $S_k \neq 0$ e $S_k \nearrow 0$. [da: *Raimond Struble, A.M.M. Vol.113, No.10 (Dec., 2006), prob. num. 11257. Erroneamente l’autore invita a dimostrare che dalla convergenza di $\sum a_k$ segue la convergenza di $\sum a_k/S_k$]*
- Dare un esempio di serie (i cui termini evidentemente non hanno segno definito) tale che $\sum a_k$ non converge ma $\sum a_k/S_k$ converge ed inoltre supponiamo che $S_k \neq 0$ [da: *Raimond Struble, A.M.M. Vol.113, No.10 (Dec., 2006), prob. num. 11257. L’autore, cadendo in errore, invita a dimostrare che dalla convergenza di $\sum a_k/S_k$, segue la convergenza di $\sum a_k$]*

79.8.2 (Abel, Dini) Sia $a_k > 0$. Dimostrare viceversa che la serie $\sum a_k/S_k^{1+\delta}$, converge sempre se $\delta > 0$ **rich.21**

80.8.2 Dare un esempio di serie divergente a termini positivi $\sum a_k$ tale che $\sum a_k/S_{k-1}^\alpha$, diverge per ogni $\alpha > 0$.

81.8.2 (Abel, Dini) Sia $\sum c_k$ una serie convergente di termini positivi e sia $r_k = \sum_{j=k+1}^{+\infty} c_k$. Allora $\sum c_k/r_{k-1}^{1+\alpha}$ è convergente per $\alpha < 0$ e divergente per $\alpha \geq 0$. **rich.29**

82.8.2 Sia data una funzione $f(x) \searrow 0$ e una successione $\{a_k\} > 0$ tale che $\sum a_k = +\infty$. Allora $\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty \Rightarrow \sum a_k f(S_k) < +\infty$ e $\int^{+\infty} f(x)dx = +\infty \Rightarrow \sum a_k f(S_{k-1}) = +\infty$ **rich.20**

- Si dia un esempio di $f \searrow 0$ e serie positiva divergente $\sum a_k$ tale che $\int^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ e $\sum a_k f(S_k) < +\infty$.
- Si dia un esempio di $f \searrow 0$ e serie positiva divergente $\sum a_k$ tale che $\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ e $\sum a_k f(S_{k-1}) = +\infty$.

83.8.2 Sia $f(x) > 0$. Allora $\sum a_k/f(S_k)$ diverge per qualsiasi serie positiva divergente $\sum a_k$ se e solo se $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ [da: *A.Torchinsky; Leon Gerber; M.J.Pelling A.M.M. Vol.84, No.2 (Feb., 1977), 138–139*]

84.8.2 Sia data una funzione $f(x) \searrow 0$ e una serie $\sum a_k = +\infty$ tale che $a_k > 0$. Sia inoltre verificata una delle seguenti tre proprietà : 1) a_k limitata, 2) $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ limitata. Allora

$$\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty \iff \sum a_k f(S_k) < +\infty$$

Es: 3) $\frac{S_{k+1}}{S_k}$ limitata e stesse conclusioni

[da: C.T.Rajagopal A.M.M. Vol.48, No.3 (Mar., 1941), 180–185 ma le dimostrazioni sono assenti; soprattutto di 3)]

rich.27

• Il punto 1) implica il seguente: se $D_{n+1} > D_n$, $D_0 = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = +\infty$, e $D_n - D_{n-1} = O(1)$ allora $\sum (D_n - D_{n-1})f(D_n)$ converge se e solo se converge $\int^{+\infty} f(x)dx$ [da: J.E.Littlewood *Messenger of mathematics* Vol.39, (Mar., 1910), 191–192]

rich.4

85.8.2 Sia $a_k \nearrow +\infty$. Studiare la convergenza della serie $\sum \arccos(a_k/a_{k+1})$ [Problem E 2170 A.M.M. Vol.77 num.1 p.83]

86.8.2 Sia $a_k \nearrow +\infty$. Studiare la convergenza della serie $\sum \arccos^2(a_k/a_{k+1})$ [[MGLP p.36]]

87.8.2 Sia $a_k \geq 0$, $p > 0$, $q, Q \in \mathbf{N}$, $Q > 1$ intero. Dimostrare che sono equivalenti 1) $\sum a_k/k^p < +\infty$, 2) $\sum A_{n^q}/(n^{1+pq}) < +\infty$, 3) $\sum A_{Q^n}/Q^{pn} < +\infty$ [[MGLP p.37]]

88.8.2 Sia $(a_1 + \dots + a_n)/n \rightarrow 0$ e $r > 0$. Dimostrare che $\sum a_n/n^{1+r}$ converge. [[MGLP p.37]]

1) Si dica se converge pure $\sum |a_n|/n^{1+r}$ 2) Si dica se $\sum a_k/k$ pure converge

89.8.2 Sia $a_k \searrow 0$ e $\sum a_k = +\infty$. Dimostrare che è possibile definire una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $n_k < n_{k+1}$, $a_{n_k} < 1/k$ e $\sum a_{n_k} = +\infty$. [[MGLP p.38]]

90.8.2 (Hardy) Sia $\{a_k\}$ tale che $a_k \geq 0$ e $\sum a_k^2 < +\infty$. Dimostrare che converge pure $\sum (S_k/k)^2$, $S_k = a_1 + \dots + a_k$.

Corollario Dimostrare che converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m a_n}{n+m}$ dove $a_k \geq 0$.

[1] G.H.Hardy, *Messenger of Mathematics*, NOTES ON SOME POINTS IN THE INTEGRAL CALCULUS, XLI. On the convergence of certain integrals and series, vol.48 (1919) pp.107–112, 2) [RRA] pag.99, 3) A.Kufner, L.Maligranda, L-E Persson *The Prehistory of the Hardy Inequality*, American Mathematical Monthly, Vol.113, No.8(Oct.,2006), pp.715–732, 4) K.Grandjot *On some identities relating to Hardy's convergence theorem* Fournal of London mathematical Society, vol.3 (1928) 114–117. Il risultato del Corollario è la famosa disuguaglianza di Hilbert]

91.8.2 Sia $a_k \geq 0$, $S_k = a_1 + \dots + a_k$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k}$. Dimostrare che le 5 serie convergono o divergono simultaneamente e che convergono se $\sum a_k^2 < +\infty$. 1) $\sum (S_k/k)^2$, 2) $\sum (a_k S_k)/k$, 3) $\sum S_k^2$, 4) $\sum a_k R_k$, 5) $\sum (a_k a_p)/(p+k)$ [G.H.Hardy, *Messenger of Mathematics*, Notes on some points in the integral calculus, LI. On Hilbert's double-series theorem, and some connected theorems concerning the convergence of infinite series and integrals, vol.48 (1919) pp.107–112,]

92.8.2 (Hardy–Landau) Sia $p > 1$, $\{a_k\} \geq 0$ e $\sum a_k^p < +\infty$. Dimostrare che $\sum (S_n/n)^p < +\infty$ $S_k = a_1 + \dots + a_k$.

Come conseguenza si faccia vedere che $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (vedi **rich.60** per una di-

mostrazione alternativa) [1] G.H.Hardy, *Messenger of Mathematics*, NOTES ON SOME POINTS IN THE INTEGRAL CALCULUS, XLI. On the convergence of certain integrals and series, vol.48 (1919) pp.107–112, 2) A.Kufner, L.Maligranda, L-E Persson *The Prehistory of the Hardy Inequality*, American Mathematical Monthly, Vol.113, No.8(Oct.,2006), pp.715–732, 3) E.B.Elliott *A simple exposition of some recently proved facts as to convergence* Journal of London Mathematical Society vol.1 (1926) 93–96]

93.8.2 Sia $p > 1$, $\lambda_i > 0$, $a_i > 0$, $\Lambda_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $A_n = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} \leq \sum_{n=1}^N \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p$$

se $\lambda_i \geq 0$ allora si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n})^{1/\Lambda_n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n$ [1] E.T.Copson *Note on series of positive terms* Journal of London Mathematical Society vol.2 (1927) 9–12, 2) A.Kufner, L.Maligranda, L-E Persson *The Prehistory of the Hardy Inequality*, American Mathematical Monthly, Vol.113, No.8(Oct.,2006), pp.715–732, 3) G.H.Hardy, *Messenger of Mathematics*, NOTES ON SOME POINTS IN THE INTEGRAL CALCULUS, LX, *An inequality between integrals*, vol.54 (1925) pp.150–156. In 3 La dimostrazione segue da quella analoga per gli integrali prendendo delle opportune funzioni a gradino]

94.8.2 Sia $p > 1$, $a_k > 0$, $\lambda_k > 0$, $\Lambda_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $A_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k \lambda_k}{\Lambda_k}$. Dimostrare che

$\sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p \leq p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n A_n^{p-1} \leq p^p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p$ da cui segue che se $\sum \lambda_k a_k^p < +\infty$ allora convergono anche le serie maggiorate. [E.T.Copson *Note on series of positive terms* Journal of London Mathematical Society vol.2 (1927) 9–12]

95.8.2 Applicare [rich.27](#) per dimostrare il seguente risultato. Se $d_k > 0$, $D_n = \sum^n d_k \rightarrow +\infty$, $D_k/D_{k-1} = O(1)$, allora la serie $\sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_n}{D_n} \right)^q$ converge se $p > 1$ oppure $p = 1$ e $q < -1$. Diverge altrimenti. [da C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec.,1944), 566–570. Sembra che $D_k/D_{k-1} = O(1)$ sia inutile e infatti la 3) di [rich.27](#) non sono sicuro sia vera]

96.8.2 Es: Sia $\sum d_k = +\infty$, $d_k > 0$, $D_n = \sum^n d_k$, $D_k/D_{k-1} = O(1)$. Sia inoltre $\{a_k\}$ una successione e $A_n = a_1 d_1 + \dots + a_n d_n$. Allora $\sum \frac{d_k}{D_k^p} A_k^q \leq K \sum \frac{d_k}{D_k^p} (a_k D_k)^q$ dove $K = K(p, q)$, $p > 1$, $q \geq 1$. [da C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec.,1944), 566–570. Se si prende $d_k=1$, $p=q>1$, si ha la famosa disuguaglianza di Hardy e la costante è $(p/(p-1))^p$ ma il suo valore fu trovato da E.Landau]

97.8.2 Sia $d_k > 0$, $D_n = \sum^n d_k \rightarrow +\infty$, $D_k/D_{k-1} = O(1)$. Sia inoltre $\{a_k\}$ una successione tale che $\sum a_k d_k$ converge e sia $\{A_n\} = \{a_n d_n + a_{n+1} d_{n+1} + \dots\}$. Allora se $\sum \frac{d_k}{D_k^p} (a_k D_k)^q$ converge, $\sum \frac{d_k}{D_k^p} A_k^q \leq K \sum \frac{d_k}{D_k^p} (a_k D_k)^q$ dove $K = K(p, q)$, $p < 1$, $q \geq 1$. [da C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec.,1944), 566–570. Nella referenza non c'è traccia della frase “se $\sum \frac{d_k}{D_k^p} (a_k D_k)^q$ converge”. D'altra parte, guardando la dimostrazione, sembra necessario porre tale condizione. Lo stesso problema si trova nell'articolo all'origine dell'articolo appena citato ossia *Hardy–Littlewood “Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions”*, Journal für Mathematic, vol.157, (1927), 141–145 (Teorema 1). In quel caso gli autori prendono $d_k \equiv 1$ e il risultato del teorema passa attraverso la dimostrazione che $\sum_M^\infty n^{-c} (na_n)^p \rightarrow 0$ per $M \rightarrow +\infty$ ma la successione $a_k = 1/(k \ln^2 k)$ ne è un controesempio. $\sum_M^\infty n^{-c} (na_n)^p \rightarrow 0$ è l'analogo di $\sum_{k=M}^{+\infty} \frac{d_k}{D_k^p} (a_k D_k)^q \rightarrow 0$]

98.8.2 1) Sia data $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e sia $F(x) = \sup_{y \geq x} f(y)$. Allora $\sum a_k f(S_k) < +\infty$ per qualsiasi serie positiva divergente $\sum a_k$ se e solo se esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\int_\alpha^{+\infty} F(x) dx < +\infty$ [da: A.Torchinsky; Leon Gerber; M.J.Pelling A.M.M. Vol.84, No.2 (Feb., 1977), 138–139; la parte “se” dell'esercizio risolve la prima parte dell'esercizio n.7, [B] pag.49. Vedi [rich.20](#)]

2) Sia data $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e sia $F(x) = \inf_{y \geq x} f(y)$. Sia inoltre $\sum a_k < +\infty$ e $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Allora se $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ converge, converge pure $\sum a_k F(r_k^{-1})$ mentre se $\int_0^{+\infty} F(x)dx$, diverge pure $\sum a_k F(r_{k+1}^{-1})$ [da: *J.E.Littlewood Messenger of mathematics* Vol.39, (Mar., 1910), 191–192]

99.8.2 (Abel, Dini) Sia $a_k > 0$, la serie $\sum a_k$ convergente e $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Dimostrare che la serie $\sum a_k/R_k$ diverge.

- Dimostrare lo stesso risultato per la serie $\sum a_{k+1}/R_k$ oppure trovare un controesempio.
- Dimostrare inoltre che la serie $\sum a_k/R_k^{1-\delta}$ diverge per ogni $\delta > 0$
- Si dia un esempio di serie (evidentemente non a segno definito) $\sum a_k$ convergente ad S tale che $S_k - S \neq 0$ ed inoltre $\sum a_k/R_k$ converge. [da: *Raimond Struble, A.M.M.* Vol.113, No.10 (Dec., 2006), prob. num. 11257. L'autore, cadendo in errore, invita a dimostrare che dalla convergenza di $\sum a_k$, segue la divergenza di $\sum a_k/R_k$]

100.8.2 Dimostrare ovvero trovare un controesempio alla seguente affermazione: sia $\sum a_k$ una serie convergente e sia b_k una serie tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$. Allora converge pure la serie $\sum b_k$

101.8.2 Senza fare ricorso agli integrali, dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-p}$ converge se e solo $p > 1$ (si

supponga di conoscere la serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ con $|x| < 1$).

102.8.2 Senza far uso del Teorema di Leibnitz, dimostrare che la serie $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

103.8.2 Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k > 0$. Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \neq 0$, allora $\sum a_k$ converge se e solo se $\sum b_k$ converge.

104.8.2 Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k > 0$. Se $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \neq 0$, allora $\sum a_k$ converge se e solo se $\sum b_k$ converge.

- Dare un esempio di successioni positive $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ tali che $\sum a_k < +\infty$, $\sum b_k < +\infty$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$ non esiste. Si consideri anche il caso di successioni monotone.

105.8.2 (Criterio di Raabe) Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k > 0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} E(k)$ con $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(k) = 1$. Se $\alpha > 1$ la serie $\sum a_k$ è convergente mentre se $\alpha < 1$ la serie $\sum a_k$ è divergente. Se $\alpha = 1$ il criterio non dice nulla e quindi esistono casi in cui $\sum a_k$ diverge ($a_k = k^{-1}$) e casi in cui converge ($a_k = (k \ln^2 k)^{-1}$) [[Sy], [KN] pag.76 ex.3.2.20] rich.6

- Dire sotto quali condizioni converge la serie

$$1 + \frac{(1+\alpha)}{(1+\beta)} + \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)} + \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)(1+3\beta)} \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^k (1+i\alpha)}{\prod_{i=0}^k (1+i\beta)}$$

[da [B] pag.48 ex.3]

- Ad eccezione di $\alpha = 1$, trovare per quali α la serie converge oppure diverge $\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^k (2 - e^{\frac{\alpha}{i}})$ [da *G.Pölya–G.Szegö – Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.36, per $\alpha=1$ anche in [B] pag.49]

• Dimostrare che per $b > a + 1$ converge la serie $1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)}$ e la somma è pari a $\frac{b-1}{b-a-1}$ (Suggerimento: detto $a_n := \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)}$ scrivere $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e poi maneggiare quanto ottenuto per ottenere $v_n - v_{n+1} \dots$ con v_n opportuna). Dimostrare che per $b < a + 1$ la serie diverge. Per $b = a + 1$ il criterio non dice nulla e bisogna usare il **criterio di Gauss** ossia rich.43

• Dimostrare che per $b > a + 2$ converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)}$ e la somma è pari a $\frac{ab-a}{(b-a-1)(b-a-2)}$ [Suggerimento: si scriva la serie come differenza di due serie del tipo della precedente; da [B] pag.48]

106.8.2 Sia data $\{a_k\}$ tale che $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}/n^2$. Dire se converge o non la serie $\sum 1/a_k$. [KN] pag.75 ex.3.2.20]

107.8.2 Sia data una successione $a_k > 0$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/a_k)}{\ln k} = \alpha$. Si dimostri che se $\alpha > 1$ la serie $\sum a_k$ converge e diverge se $\alpha < 1$. [È detto anche “Secondo criterio di Cauchy”. *J.Michelw*, The A.M.M., vol 67 No.6 (jun.–Jul., 1960), 581–583]

108.8.2 Dimostrare che il Criterio di Raabe si può scrivere come $\lim_{k \rightarrow +\infty} [k(1 - a_{k+1}/a_k)] = \alpha$ [*J.Michelw*, The A.M.M., vol 67 No.6 (jun.–Jul., 1960), 581–583]

109.8.2 Dimostrare che se $\lim_{k \rightarrow +\infty} [k(1 - a_{k+1}/a_k)] = \alpha$ allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/a_k)}{\ln k} = \alpha$ (anche $\alpha = +\infty$). [*J.Michelw*, The A.M.M., vol 67 No.6 (jun.–Jul., 1960), 581–583]

110.8.2 (**Criterio di Gauss**) Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k > 0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} + \frac{f(k)}{k^s}$, $s > 1$, $|f(k)| < A$. Se $\alpha > 1$ la serie $\sum a_k$ converge mentre se $\alpha \leq 1$ la serie $\sum a_k$ diverge. Da ciò segue che se abbiamo una serie $\sum a_k$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{c}{k \ln k} + O(1/k^2)$ e $c < 0$, essa diverge in quanto definitivamente $(1 - \frac{\alpha}{k} + \frac{f(k)}{k^s})|_{\alpha=1} \leq 1 + \frac{c}{k \ln k} + O(1/k^2)$ rich.43

111.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione tale che $a_n - a_{n+1} = o(a_n/n)$. A meno che $a_n = 0$ definitivamente, dimostrare che diverge e 1) $a_1 + \dots + a_n \sim na_n$, 2) $a_n = n^{1+o(1)}$ [*G.H.Hardy, J.E.Littlewood* “Contributions to the arithmetic theory of series”, *Proceedings of the London mathematical society*, (2), vol.11, 1912, Teorema 27 pag.453]

112.8.2 Dire per quali $x \geq 0$ converge e diverge la serie $\sum (1 - \frac{x}{n} \ln n)^n$

113.8.2 Dire se converge oppure diverge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^k (2 - e^{\frac{1}{i}})$ [R.: da [B] pag.49]

114.8.2 Dire se convergono le serie (la prima con $0 < a < 1$ e la seconda al variare di k e N intero) $\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} e^{-j^{-a}}$, $\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} \frac{1}{j^N}$,

115.8.2 Sia $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{(k-1)\pi}{2n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}}$. Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/n^3$. [Putnam 2019, num.B2]

116.8.2 Sia $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$. Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{k^2}$

117.8.2 Dimostrare che diverge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (a+1+k)}$

118.8.2 Dire se converge o diverge al variare di $a > 0$, e $b > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (a+k \ln k)}{\prod_{k=1}^n (b+k \ln k)}$

119.8.2 Dimostrare che i criteri di convergenza di D'Alembert, Raabe e Gauss discendono in realtà dal criterio di Kummer rich.23

120.8.2 Sia $a_n > 0$ e $a_{n+1} \leq a_n(1+c/n)$, ($c > 0$) e inoltre $\sum a_n < +\infty$. Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ rich.51

121.8.2 Sia $\{a_k\}$ monotona e positiva tale che $\sum a_k$ converge. Se anche $\{2^k a_{2^k}\}$ è monotona, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} ka_k \ln(k) = 0$ [da: R.W.Hamming A.M.M. Vol.52, No.2 (Feb., 1945), 70-72]

• Sia p_n una successione tendente a $+\infty$ lentamente quanto si vuole. Dimostrare che esiste una successione positiva monotona convergente a_n tale che $2^n a_{2^n}$ è anche essa monotona e $p_n a_n n \ln n$ non tende a zero [È interessante notare che la questione viene affrontata in una nota a piè pagina in [K] pag.303. Inoltre l'autore sembra non confutare il fatto che verso la fine del 1860, si ritenesse $na_n \ln n$ condizione necessaria per la convergenza]

122.8.2 Sia $a_n \searrow 0$. Dimostrare che se $\sum a_k$ converge allora converge pure $\sum k(a_k - a_{k+1})$ [si veda: 1) [B] pag.514 dove si dice testualmente $\ll the convergence of \sum n(a_n - a_{n+1}) can be deduced from that of \sum a_n \gg$ e 2) [Ba1] pag.6 dove c'è solo il teorema per cui la divergenza di $\sum a_k$ implica la divergenza di $\sum n(a_n - a_{n+1})$.;]

Dal precedente risultato si ricava pure il seguente: $a \geq 0$, e $\sum a_k = a$, allora, detta $\sum^k a_j = S_k$, si ha $\sum(a - S_k)$ converge se e solo se converge $\sum ka_k$. Basta considerare $a - S_k$ al posto della a_k precedente [da: L.Sennott; L.R.Newcombe A.M.M. Vol.90, No.5 (May., 1983), pp.336-337]

• Si faccia vedere che se $\sum a_k = +\infty$ e $ka_k \rightarrow 0$ allora $\sum k(a_k - a_{k+1}) = +\infty$
 • Togliendo l'ipotesi che a_k sia monotona ma mantenendo il fatto che $a_k \rightarrow 0$ e $a_k > 0$, si diano i due controesempi: $\sum a_k < +\infty$ ma $\sum k(a_k - a_{k+1})$ non converge e $\sum a_k = +\infty$ ma $\sum k(a_k - a_{k+1})$ convergente

123.8.2 Si dia un esempio di due serie divergenti $\sum a_k$ e $\sum b_k$, $a_k > 0$, $a_k \rightarrow 0$, $b_k > 0$, $b_k \rightarrow 0$ ma $\sum \min\{a_k, b_k\}$ converge.

• Si risolva l'esercizio precedente con $a_k \searrow 0$ e $b_k \searrow 0$. [I.J.Schoenberg - American Mathematical Monthly Vol.94, No.7 (Aug.-Sept., 1987), 693]

124.8.2 Dimostrare che data una qualsiasi serie convergente $\sum c_k$, $c_k \geq c_{k+1} > 0$, si possono trovare due serie divergenti $\sum a_k$, $a_k \geq a_{k+1} > 0$, e $\sum b_k$, $b_k \geq b_{k+1} > 0$, tali che $c_k = \min\{a_k, b_k\}$. [da: 1) P.Ungar; A.Novikoff - A.M.M. Vol.56, No.6 (Jun.-July., 1949), 423-424, 2) D. McLean; R.Poppen - A.M.M. Vol.81, No.9 (Nov., 1974), 1029]

125.8.2 Dimostrare che data una qualsiasi serie convergente $\sum c_k$, $c_k \geq c_{k+1} > 0$, si possono trovare N serie $\{a_k^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ divergenti $\sum a_k^{(i)}$, $a_k^{(i)} \geq a_{k+1}^{(i)} > 0$, tali $c_k = \min_{1 \leq i \leq N} \{a_k^{(i)}\}$ e $\sum \min_{\substack{1 \leq i \leq N \\ i \neq i_0}} \{a_k^{(i)}\} = +\infty$ qualsiasi sia $1 \leq i_0 \leq N$. [da: 1) P.Ungar; A.Novikoff - A.M.M. Vol.56, No.6 (Jun.-July., 1949), 423-424, 2) D. McLean; R.Poppen - A.M.M. Vol.81, No.9 (Nov., 1974), 1029]

126.8.2 Sia $\sum d_k = \sum d'_k = +\infty$, con $0 < d_{k+1} \leq d_k$ e $0 < d'_{k+1} \leq d'_k$ tale che $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$. Allora vale $\lim_{k \rightarrow +\infty} (kd_k)^{-1} = +\infty$

• Data una successione $d_k \searrow 0$ tale che $\sum d_k = +\infty$ trovare una successione $d'_k > 0$ tale che $\sum d'_k = +\infty$ e $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$.

L'esercizio è diverso dal precedente perché il punto di partenza è l'esistenza di d_k che diverge e non $\sum c_k$ che converge. Inoltre delle due serie divergenti che si trovano, una è esattamente d_k .

127.8.2 Es: È data una successione $d_k \searrow 0$ tale che $\sum d_k = +\infty$ e tale che $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} (kd_k)^{-1} = +\infty$. Trovare un'altra successione $d'_k \searrow 0$ tale che $\sum d'_k = +\infty$ e $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$. [da: 1) *P.Ungar; A.Novikoff – A.M.M. Vol.56, No.6 (Jun.–July., 1949), 423–424*]

128.8.2 Sia $m_k, m_0 = 0$ una successione strettamente crescente di interi. Dire se converge o diverge la serie $\sum \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$.

- Si studi lo stesso problema nell'ipotesi che gli m_k siano positivi, strettamente crescenti ma una quantità infinita di essi non sia intero (volendo si può pensare che siano tutti non interi) [da *H.E. Chrestenson; W.C. Waterhouse; R.H. Breusch; J.L. Brown, Jr.; Albert Wilansky – A.M.M. Vol.67, No.10 (Dec., 1960), 1029–1030*]

- Sia $m_k \nearrow +\infty$. Dimostrare che la serie $\sum \frac{m_{k+1} - m_k}{m_k^{p-1} m_{k+1}}$ converge se $p > 1$. [B pag.36]

- Supponendo che $m_k > 0$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k = 0$ si dimostri che $\sum \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$ diverge oppure si trovi un esempio per cui converge.

- Supponendo che $m_k > 0$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k$ non esista, si dimostri che $\sum \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$ può divergere oppure convergere.

129.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Dire se convergono oppure divergono le serie $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}}$ e $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k}$ [da *C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec., 1944), 566–570*]

rich.25

130.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Si dimostri che le seguenti serie convergono per ogni $p < 1$ e divergono per ogni $p > 1$ $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}^p}$ e $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k^p}$ per ogni $p < 1$. [da *C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec., 1944), 566–570*]

131.8.2 Sia $a_k \searrow 0$, e $f(x) \nearrow +\infty$ per $x \rightarrow 0$. Allora se $\int_0 f(x)dx < +\infty$ abbiamo $\sum (a_k - a_{k+1})f(a_k) < +\infty$. Se invece $\int_0 f(x)dx = +\infty$ allora $\sum (a_k - a_{k+1})f(a_{k+1}) = +\infty$. [da *C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec., 1944), 566–570*]

rich.26

132.8.2 Sia $a_k \searrow 0$ e $f \nearrow +\infty$ per $x \rightarrow 0$. Se è vera almeno una delle seguenti tre condizioni: 1) $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_k^{-1} - a_{k-1}^{-1} < +\infty$, 2) $\underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} (a_k - a_{k+1})/(a_{k-1} - a_k) > 0$, 3) $\underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_k/a_{k-1} > 0$, allora

$\sum (a_k - a_{k-1})f(a_{k+1})$ converge o diverge con $\int_0 f(x)dx$ [da *C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec., 1944), 566–570*. Sembra che la 1) e la 3) siano sbagliate]

133.8.2 Siano $a_k > 0, d_k > 0, \sum d_k = +\infty$ e $D_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k$. Allora ciascuna delle due condizioni seguenti assicurano la convergenza della serie $\sum a_k$: i) $(a_k/d_k)^{1/D_k} \leq \lambda < 1$, ii) $\frac{1}{d_k} \left(\frac{a_{k+1}/d_{k+1}}{a_k/d_k} - 1 \right) \leq -\rho < 0$ [da *C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec., 1944), 566–570*]

134.8.2 Siano $a_k > 0, c_k > 0, \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k < +\infty$ e $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k$. Allora ciascuna delle due condizioni seguenti assicurano la divergenza della serie $\sum a_k$: i) $(a_k/c_k)^{R_k} \geq \lambda > 1$, ii)

$\frac{1}{R_k^{-1} - R_{k-1}^{-1}} \left(1 - \frac{a_{k-1}/c_{k-1}}{a_k/c_k} \right) \geq \rho > 0$ [da C.T.Rajagopal, The American Mathematical Monthly, Vol.51, No.10 (Dec.,1944), 566-570]

135.8.2 Sia $d_k \nearrow +\infty$. Trovare una serie convergente $\sum c_k$ tale che $\sum c_k d_k$ diverge. [La soluzione è quella di [B] pag.47 che però *non implica* la monotonia di c_k . Senza la monotonia di d_k la dimostrazione di [B] non funziona e bisogna ricorrere alla dimostrazione dell'esercizio [rich.1](#) in cui si usa l'ipotesi $\sum d_k = +\infty$ e che consente di trovare c_k monotona. $\sum d_k = +\infty$ del resto è gratis dal fatto che $d_k \nearrow +\infty$.] [rich.2](#)

136.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Trovare una serie divergente $\sum d_k$ tale che $\sum a_k d_k$ converge [La soluzione è quella di [B] pag.47 e [K] pag.302 (paragrafo 9) Se si avesse $\sum a_k$ convergente, indipendentemente dal fatto che a_k sia monotona, si potrebbe usare la soluzione dell'esercizio [rich.1](#) che dà una $\{d_k\}$ monotona. Vedi anche Aryeh Dvoretzky – American Journal of Mathematics Vol.70, No.1 (Jan., 1948), 167-173]. [rich.3](#)

Es: Sia $a_k \rightarrow 0$, $a_k \geq 0$ e $\sum a_k = +\infty$. Trovare una serie divergente $\sum d_k$ tale che $\sum a_k d_k$ converge oppure fornire un esempio di successione $\{a_k\}$ per la quale non è possibile trovare una $\{d_k\}$ con le richieste citate. Nel paragrafo 10 a pag. 302 di [K], si afferma che è possibile trovare $\{d_k\}$ a partire da $\{a_k\}$ (lì è p_n) ma si fa riferimento alla dimostrazione del paragrafo 9 in cui $\{p_n\}$ è *monotona*.

137.8.2 Si dica per quali valori di a converge la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} k^{-1 - \frac{1}{(\ln k)^a}}$

138.8.2 • Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ converge per qualsiasi valore di x . [Suggerimento: si usi il Teorema di Abel [rich.11](#) anche per l'ultima domanda.] [rich.9](#)

• Dimostrare che la convergenza è uniforme solo nell'intervallo $0 < x \leq x_0 < 2\pi$. [Si veda il capitolo sulle serie trigonometriche.]

• Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k}$ converge per qualsiasi valore di $x \neq 0$

139.8.2 Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\sin kx|}{k}$ converge solo per x multiplo di π

[da R.S.Underwood; H.Tate – A.M.M. Vol.45, No.6 (June. – Jul., 1938), 393-394]

140.8.2 Sia $a_0(x) = x$, $a_n(x) = \sin_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(\sin(\sin \dots \sin))(x)$ $0 < x < \pi$ (composizione n volte).

• Dire se convergono le due serie $S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x)$ e $S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)$ [da Nickolas Konopoli; D.C.B.Marsh – A.M.M. Vol.68, No.5 (May, 1961), 507-508]

• Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} a_n(x) = 1$ (come conseguenza si ha la divergenza della serie $S_1(x)$) [da G.Pòlya-G.Szegö – Problems and Theorems in Analysis I Springer-Verlag Ed. pag.38. Il problema A3, Putnam 2021 chiede di dimostrare o meno la convergenza della serie $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots$ e chiaramente diverge.]

141.8.2 Dare due serie $\sum 1/a_k$, e $\sum 1/(a_k - 1)$ con $a_k \neq 0, 1$ tale che una sia convergente mentre l'altra divergente [da R.D. Carmichael; E.B.Wilson – A.M.M. Vol.21, No.10 (Dec.,1914), 334-335]

142.8.2 Sia: $a_k \rightarrow 0$, $S_n = \sum^n a_k$, $\overline{\lim} S_n = L$, $\underline{\lim} S_n = l$, $l \neq L$ (l può essere $-\infty$ e L può essere $+\infty$). Dimostrare che $\{S_n\}$ è denso nell'intervallo (l, L) ossia $\{S_n\} = [l, L]$. [da G.Pòlya-G.Szegö Problems and Theorems in Analysis I Springer-Verlag Ed. num.100, pag.23. [MGLP] pag.18 ex.1.21] [rich.18](#)

143.8.2 Sia $a_k \rightarrow 0$. Dimostrare che l'insieme dei punti limite della successione $\{S_n\}$ è connesso. Si proceda dapprima nel caso in cui la successione diverga a $+\infty$ o $-\infty$. Poi si consideri il caso in cui converga ed infine il caso in cui sia indeterminata. Si usi rich.18

144.8.2 Data $a_k > 0$, e detta $A_n = \sum^n a_k$, sappiamo che se $\sum a_k$ diverge allora diverge pure $\sum a_k/A_k$. Sia ora $B_{k+1} > B_k > 0$ tale che $\sum a_k/B_k = +\infty$. Detta $M_k = \max\{A_k, B_k\}$ si dimostri che $\sum a_k/M_k = +\infty$ [da Paul Erdos; N.J.Fine; J.B.Kelly - A.M.M. Vol.58, No.6 (Jun. - Jul., 1951), 425-426]

145.8.2 Es: Siano: 1) $a_k > 0$, $A_n = \sum^n a_k$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty$ 2) $\{g_k\}$ una successione tale che $g_k \rightarrow +\infty$ e $\sum \frac{a_k}{A_k g_k} = +\infty$. Mostrare che esiste una successione non decrescente $f_n \leq f_{n+1}$ tale che $\sum a_k/f_k = +\infty$, ma $\sum \min\{\frac{a_k}{A_k g_k}, \frac{a_k}{f_k}\} < +\infty$, [da Paul Erdos; N.J.Fine; J.B.Kelly - A.M.M. Vol.58, No.6 (Jun. - Jul., 1951), 425-426]

146.8.2 Sia $\{q_k\}$ l'insieme degli interi la cui espressione decimale non contiene la cifra 9. Dire se converge o diverge la serie $\sum q_k^{-1}$ [da G.E.Šilov *Analisi Matematica, funzioni di una variabile* edizioni Mir 1978, pag.216]

147.8.2 Sia $d_k \rightarrow 0$ (eventualmente monotona), $d_k > 0$, $\sum d_k = +\infty$. Definire una serie convergente $\sum c_k$, $c_k \geq 0$, tale che per infiniti k si abbia $c_k \geq d_k$. Si consideri anche il caso in cui $\liminf c_k/d_k = +\infty$. L'interesse dell'esercizio consiste nel fatto che d_k può andare a zero lentamente quanto si vuole.

Si tenga presente che per avere $\sum c_k$ convergente è necessario che $\liminf c_k/d_k = 0$. [da 1) R.W. Hamming - A.J. of M. Vol.68, No.1 (Jan., 1946), 133-136, 2) Aryeh Dvoretzky - A.J. of M. Vol.70, No.1 (Jan., 1948), 167-173]

148.8.2 Sia $d_k \geq d_{k+1} > 0$, $\sum d_k = +\infty$. Sia I_k una sottosuccessione crescente di numeri naturali. Dimostrare che se I_k/k è limitata allora $\sum d_{I_k} = +\infty$. Viceversa, data I_k/k non limitata, costruire una serie $\sum \tilde{d}_{I_k}$ convergente mentre $\sum \tilde{d}_k = +\infty$ con $\tilde{d}_k \geq \tilde{d}_{k+1}$. [da 1) R.W. Hamming - A.M.M. Vol.54, No.8 (Oct., 1947), 462-463, 2) R.W. Hamming - A.M.M. Vol.54, No.6 (Jun.-Jul., 1948), 360]

149.8.2 Si trovi una successione $\{a_k\}$ tale che $\sum a_k$ converge non assolutamente ma $\sum \operatorname{sgn}(a_k)|a_k|^a$ diverge per ogni $a > 0$, $a \neq 1$. L'interesse dell'esercizio nasce dal fatto che gli esempi di serie convergenti ma non assolutamente prodotti nei testi d'analisi sono tali che $\sum \operatorname{sgn}(a_k)|a_k|^a$ converge sempre se $a > 0$ (si pensi alla serie di Leibnitz $\sum \frac{(-)^k}{k}$ oppure $\sum \frac{(-)^k}{\ln k}$) [da G.R.MacLane; R.J.Driscoll; O.P.Lossers - A.M.M. Vol.76, No.9 (Nov., 1969), 1073]

150.8.2 Sia $\ln_{(k)}(x) = \ln \ln \ln \dots \ln(x)$ (composizione di k volte il logaritmo). Sia $P(x)$ il prodotto di x e di quei fattori $\ln_{(k)}(x)$ tali che $\ln_{(k)}(x) > 1$. Dimostrare che la serie $\sum (P(n))^{-1}$ diverge. La serie è interessante in quanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{n \ln_{(k)}(n)} = +\infty$ qualsiasi sia il valore di k . Questo vuol dire che la serie diverge più lentamente di qualunque serie della forma

$$\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n \ln(n)}, \sum \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}, \sum \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n)) \ln(\ln(\ln(n)))} \text{ etc.}$$

Ciascuna delle precedenti serie è divergente ma la successiva diverge più lentamente della precedente. Ebbene la serie $\sum 1/P(n)$ diverge più lentamente di ciascuna delle precedenti. [da R.P.Agnew A.M.M. Vol.54, No.5 (May., 1947), 273-274]

151.8.2 Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \quad \sum \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{n!}, \quad \sum n^{-a-\frac{b}{n}}, \quad \sum \frac{n^q}{(n+1)^{p+q}}, \quad \sum \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad \sum \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}, \quad \sum \frac{n^n}{e^n n!}, \quad \sum \frac{n^n}{e^n (n+1)!}, \quad \sum \frac{n^{n-1}}{e^n n!}, \quad \sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$$

$$\sum \frac{1}{n} \frac{1}{(\ln n)^{1+\frac{1}{\ln n}}}, \quad \sum \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} (b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}) \right) \quad [\text{http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=313803}]$$

• Dimostrare oppure confutare con un esempio: se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ allora la serie $\sum n^{-1-f(n)}$ diverge.

152.8.2 Dire se convergono le serie $\sum \frac{1}{\ln n!}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \dots 3^{\frac{1}{k}}}$ [da Putnam 1950].

153.8.2 Dire se convergono o divergono le serie $\sum \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$ e $\sum (-1)^n \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\ln n}{(-1)^n n^{3/4}}\right)^{(-1)^n n^{3/4}}$

154.8.2 Studiare la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k^k}{k! e^k} - \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \right)$ [problema num. 10832 D.E.Knuth A.M.M. Vol.107, (2000), p.863]

155.8.2 Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin k)^2}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\cos k)^2}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin kx)^2}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin kx)^2}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\cos kx)^2}{k^2}$

156.8.2 Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \arctan x^{2n+1}$ [N.J.Fine *American Mathematical Monthly* Vol.57, No.6 (Jun.-Jul., 1950), 418-419]

157.8.2 Sia $\{c_n\}$ una successione crescente illimitata. Trovare l'insieme di convergenza delle serie 1) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{c_k^k}$ 2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x - c_k} \frac{x^{k-1}}{c_k^{k-1}}$ [[B] pag.67 ex.11]

158.8.2 Se $|c_n| \nearrow +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - c_n} + \frac{1}{c_n} + \frac{x}{c_n^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{c_n^n} \right)$ converge assolutamente per ogni valore di x ad eccezione dei valori $(c_1, \dots, c_n)$ [[B] pag.67 ex.12]

159.8.2 Sia $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$. Trovare i valori interi r tale che converge assolutamente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - c_n} + \frac{1}{c_n} + \frac{x}{c_n^2} + \dots + \frac{x^{r-1}}{c_n^r} \right)$ [[B] pag.67 ex.12]

160.8.2 Dire se converge o meno la serie $\sum \cos k^2$.

161.8.2 Dire se converge o diverge la serie $\sum |\cos(2^k)|/k$ [[MGLP] pag.25]

162.8.2 Dire per quale valore di α converge o diverge la serie $\sum |\sin k|^\alpha$. [da E.O.Thorp; Julius Vogel A.M.M. Vol.71, No.1 (Jan.,1964), 97]

163.8.2 Dire se converge o diverge la serie $\sum (\sin k)^k$ [da e J.R.Holdsworth; J.R.Smith; John B.Kelly A.M.M. Vol.65, No.9 (Nov.,1958), 718-719 e [K] pag.96 ex.3.4.22]

164.8.2 Dire se converge o diverge la serie $\sum (\cos k)^k$ [da [K] pag.96 ex.3.4.22]

165.8.2 Dire in quali insiemi converge puntualmente, assolutamente, uniformemente e totalmente la serie $\sum \frac{(-1)^k}{k} e^{-kx^2}$

• a) Dare una successione di funzioni continue non negative su $[-1, 0]$ che converge uniformemente ma non totalmente ad una funzione (continua ovviamente).

• b) Dimostrare che la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-|x|-k}$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

• c) Studiare la convergenza uniforme in $[0, +\infty)$ della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(1+x^k)^k}$

166.8.2 Studiare la convergenza uniforme al variare di $p, q \geq 0$ e almeno uno di essi maggiore di 1, della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p + n^q x^2}$ [B] pag.141-142 ex.4]

167.8.2 Studiare la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^3 + n^4 x^2} \doteq f(x)$ e dimostrare che $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x^2 n^4}{(n^3 + n^4 x^2)^2}$ [B] pag.141-142 ex.5]

Studiare la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + n^4 x^2} \doteq f(x)$ e mostrare che $f'(0)$ non esiste (finito) [B] pag.141-142 ex.5]

168.8.2 Sia $p > 1$. Dare condizioni sufficienti affinché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p + n^q x^2} \doteq f(x)$ possa derivarsi termine a termine [B] pag.141-142 ex.6]

169.8.2 Detta $f(x) \doteq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x^n)$, $0 \leq x \leq 1$ far vedere che $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n(1-x^n)$, [B] pag.141-142 ex.7]

170.8.2 Mostrare che $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [B] pag.141-142 ex.8]

171.8.2 Se $\sum a_n$ converge oppure oscilla, allora $\sum a_n/n^\alpha$ converge uniformemente per $\alpha \geq a_0$.
Ne segue, ad esempio, che $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^{-x} = \ln 2$ [B] pag.141-142 ex.9]

172.8.2 Sia $f_n: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ convergente uniformemente e tale che $\sum \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ e $\int_0^{+\infty} \sum f_n(x) dx$ convergono. Allora sono uguali [B] pag.144 ex.19]

173.8.2 Sia $\{f_k(x)\}$ una successione tale che $|\sum_{k=0}^m f'_k(x)| \leq M$ per ogni m e per ogni $x \in (a, b)$.
Se la serie $\sum f_k(x)$ converge puntualmente allora converge uniformemente [B] pag.144 ex.20]

174.8.2 Siano date tre serie di funzioni $\{a_k(x)\}, \{b_k(x)\}, \{c_k(x)\}$ definite sull'intervallo (a, b) e tali che $A_n(x) \leq B_n(x) \leq C_n(x)$ con $\sum_{k=0}^n a_k(x) \doteq A_n(x)$, $\sum_{k=0}^n b_k(x) \doteq B_n(x)$, $\sum_{k=0}^n c_k(x) \doteq C_n(x)$, Inoltre sappiamo che esistono i limiti $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(x) \doteq A(x)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(x) \doteq C(x)$ e che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b A_n(x) dx = \int_a^b A(x) dx$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b C_n(x) dx = \int_a^b C(x) dx$. Dimostrare che esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(x) \doteq B(x) \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b B_n(x) dx = \int_a^b B(x) dx$$

175.8.2 Dimostrare il seguente teorema (**Dini**): sia $K \subset \mathbf{R}$ compatto e $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue tale che $f_n \nearrow f$ con f continua. Allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

• Dare esempi di successioni di funzioni non uniformemente convergenti che verificano tutte le ipotesi del teorema precedente tranne una.

176.8.2 Sia data una successione di funzioni continue $\{f_n\}$, $f_n: E \rightarrow \mathbf{R}$ con E compatto, convergenti puntualmente a una funzione continua f e tale che $f_n: E \rightarrow \mathbf{R}$ è monotona per ogni n . Allora la convergenza è uniforme

177.8.2 Una successione di funzioni continue $\{f_n\}$, $f_n: E \rightarrow \mathbf{R}$, è detta *equicontinua* se $\forall \varepsilon \exists \delta: |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \forall n$ (praticamente δ non deve dipendere da n)

Dimostrare i tre teoremi che seguono:

- Se f_n converge per ogni $x \in D \subset E$ con $\overline{D} = E$ allora f_n converge per ogni valore di $x \in E$.
- Con un esempio si faccia vedere che se manca la equicontinuità, allora non è detto vi sia convergenza su tutto E
- Se E è compatto e f_n converge per ogni $x \in E$ allora la convergenza è uniforme.
- Con un esempio si faccia vedere che se manca la equicontinuità, allora non è detto vi sia convergenza uniforme

178.8.2 Si dimostri il seguente Teorema (**Abel**): Sia data la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k$ convergente per $t = t_1 > 0$.

1) La serie converge uniformemente nell'intervallo $[0, t_1]$. Come corollario si ha che

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t_1^k$$

2) Dimostrare inoltre che se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k t_1^k = +\infty$, allora $\lim_{t \rightarrow t_1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k = +\infty$.

3) Se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k t_1^k$ oscilla ossia $l = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k t_1^k$ e $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k t_1^k$, $l \neq L$, allora $l \leq \underline{\lim}_{t \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k$

$$\text{e } L \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k$$

[rich.37]

179.8.2 Corollario del Teorema di Abel. Sia $\lim_{x \rightarrow 1^-} v_n(x) = 1$ e $v_n(x) \geq v_{n+1}(x)$ e sia $\sum a_n$

convergente. Allora $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n v_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

180.8.2 Sia $\sum a_k x^k \doteq f(x)$ una serie di potenze reale avente raggio di convergenza pari a 1. Se $\sum k a_k$ converge allora $\sum k a_k = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ **[B] pag.201**

181.8.2 Teorema di Abel per serie complesse Sia dato il cerchio di raggio 1 ed una serie

di potenze $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k$ che ha 1 come raggio di convergenza e tale che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge. Dimostrare

che $\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ se z verifica la relazione (limaçon) $|1 - z| \leq K(1 - |z|)$, $K > 1$ **[rich.39]**

182.8.2 Sia $b_n > 0$ e sia data la successione $\{a_k\}$. Sia $|A_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \rightarrow +\infty$ e $B_n = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow$

$+\infty$. Inoltre supponiamo che le serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k$ siano assolutamente convergenti per

$|x| < 1$. Si dimostri: 1) $a_k/b_k \rightarrow l$ allora $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \left[\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k \right]^{-1} = l$ 2) $A_k/B_k \rightarrow l$ allora

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \left[\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k \right]^{-1} = l$ [B] pag.149–150. Sembra però esserci una imprecisione. Il testo in [B] recita

“If a_n/b_n or A_n/B_n tends to a definite limit, finite or infinite, then $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ where $\sum b_k$ is a divergent series of positive terms.” È vero che $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} \Leftarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} \Leftarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$, ma non è vero che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ [rich.40]

183.8.2 Dimostrare che se una serie converge $C1$ in $\mathbf{R}$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

184.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione e $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Diremo che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è sommabile (con-

vergente) $C1$ se esiste il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k$ ossia il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n}{n}$.

[B] pag.149–150 [rich.41]

1) Dimostrare il seguente risultato (Frobenius): se la serie è $C1$ sommabile al valore l allora

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k = l \quad [\text{B] pag.149–150}]$$

2) Usare [rich.40] per dimostrare che la convergenza $C1$ è sufficiente per le conclusioni del teorema di Abel [rich.37] [B] pag.149–150]

3) Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nA_1 + (n-1)A_2 + \dots + 2A_{n-1} + A_n}{n^2/2} = l$ allora $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k = l$ [B]

pag.149–150]

4) Dare un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che esiste il limite secondo Abel $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ ma

non esiste il limite $C1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$. Non esiste neppure il limite Ck con qualsiasi $k > 1$. [H] pag.109]

185.8.2 Inversione del teorema di Abel in (rich.37,39) Sia data la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ che

converge per $|z| < 1$ e tale che $\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = A$. Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge e vale A , se almeno

una delle prossime condizioni è verificata: 1) se $a_k \geq 0$ definitivamente e il limite avviene lungo l’asse reale (Pringsheim, *Münchener Sitzungsberichte*, Bd, 30, 1900, p.37) 2) se $na_n \rightarrow 0$ si ha lo stesso risultato se il limite è soggetto alla condizione (limaçon) $|1 - z| \leq K(1 - |z|)$ con $K > 1$. (Tauber) 3) se $na_n \not\rightarrow 0$, ma $(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) = o(n)$ ed il limite è soggetto alla

condizione (limaçon) $|1 - z| \leq K(1 - |z|)$ con $K > 1$. (Tauber)

[rich.42]

Es: È possibile estendere il risultato di Pringsheim al caso in cui esista il limite $z \rightarrow 1$ nel limaçon?

• Fatou nella sua tesi dimostra il risultato 1) $a_k \rightarrow 0$, 2) la funzione $f(z) = \sum a_k z^k$, è regolare in $z = 1$ allora $\sum a_k = \lim_{z \rightarrow 1} \sum a_k z^k$ (ed è il risultato descritto in **[rich.20]** degli esercizi sugli integrali complessi)

186.8.2 Come applicazione di **[rich.40]** si risolvano i seguenti esercizi [B] pag.150

- 1) calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}(x + x^4 + x^9 + x^{16} + \dots)$
- 2) calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + x^a + x^{a^2} + x^{a^3} + \dots) / \ln(1-x)$
- 3) calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^p (1^{p-1}x + 2^{p-1}x^2 + 3^{p-1}x^3 + \dots)$
- 4) calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \dots)$

187.8.2 Sia data una successione $\{a_k\}$ tale che $ka_k \rightarrow 0$. Dimostrare che se la serie converge $C1$, allora converge in senso classico. [G.H.Hardy, *Theorems Relating to the Summability and Convergence of Slowly Oscillating Series*, Proceeding of the London Mathematical Society, vol.s2-8, Fasc.1, 1909, pp.301-320. Vedi pure [WW] pag.156. Un'altra referenza è [K] pag.500-501]

188.8.2 Sia data una successione $\{a_k\}$ tale che $|ka_k| \leq K$. Dimostrare che se la serie converge $C1$, allora converge in senso classico. Ovviamente il presente caso ingloba il precedente ma la dimostrazione è più complicata. [G.H.Hardy, *Theorems Relating to the Summability and Convergence of Slowly Oscillating Series*, Proceeding of the London Mathematical Society, vol.s2-8, Fasc.1, 1909, pp.301-320]

189.8.2 Sia $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n S_k$, Se esiste il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_1^{(1)} + \dots + S_n^{(1)}}{n^2}$ si dice che

la serie è $C2$ sommabile. Detta $S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n S_k^{(1)}$. Se esiste il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_1^{(2)} + \dots + S_n^{(2)}}{n^3}$ si dice

che la serie è $C3$ sommabile.

Dimostrare che se $|ka_k| \leq K$ e la serie $\sum a_k$ è Cr sommabile, è convergente

Corollario La serie $\sum k^{-1-\alpha} a_k$ con $\alpha \neq 0$ non è Cr sommabile per nessun r . Ciò vuol dire che la funzione Zeta di Riemann non può essere estesa attraverso la sommabilità Cr .

190.8.2 Sia $\sum a_k$ Cr sommabile al valore A e $\sum b_k$ Cs sommabile al valore B , $r, s > -1$. Dimostrare che il prodotto secondo Cauchy è $C(r+s+1)$ sommabile al valore AB . [B] pag.228]

- Trovare un esempio per cui la serie $\sum c_k$ non è sommabile Ck con $k < r + s + 1$.
- Trovare un esempio per cui la serie $\sum c_k$ non è sommabile Cs sommabile ($r = -1, s \geq -1$).

191.8.2 (Problema aperto per Hardy e chiuso da Littlewood) Si può estendere il Teorema di Tauber, vedi **[rich.42]**, al caso in cui $|ka_k| \leq K$? Nell'articolo del 1909 "*Theorems Relating to the Summability and Convergence of Slowly Oscillating Series*", Proceeding of the London Mathematical Society, vol.s2-8, Fasc.1, 1909, p.308, Hardy dice "*I have not been able to prove this theorem and I am inclined to think that it is not true. At the same time, I have been quite unsuccessful in my attempts to construct an example to the contrary*". Il problema è stato risolto da Littlewood in "*The converse of Abel's theorems on power series*", Proceeding of the London Mathematical Society, vol.s2-9, Fasc.1, 1911, p.434-448. La dimostrazione è presa da [T] e si riferisce al caso di serie reale e con limite $x \rightarrow 1^-$.

Es: Si può estendere la dimostrazione alle serie complesse in cui $z \rightarrow 1$ eventualmente all'interno

del limaçon?

192.8.2 Convergenza $R(\cdot, \cdot)$; R sta per Riesz (Marcel) Sia data la successione $\{\mu_k\}$ tale che $\mu_k \searrow 0$ (anche solo definitivamente) e $\sum \mu_k = +\infty$. Sia $\lambda_n = \mu_1 + \dots + \mu_n$, e chiediamo che $\lambda_{n+1}/\lambda_n \rightarrow 1$. Diciamo che la serie $\sum a_k$ converge $R(1, \mu_k)$ se esiste il limite s di $(\mu_2 S_1 + \dots + \mu_{n+1} S_n)/\lambda_{n+1}$ e diremo che s è la somma della serie.

Un modo equivalente di porre il limite è $S_n - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \rightarrow s$

Se $\mu_1 = 0$, $\mu_k = 1$ per ogni $k \geq 1$ è la convergenza $C1$.

Un altro esempio è $\mu_0 = 0$, $\mu_k = 1/k$, $\lambda_n \sim \ln n$, La convergenza $R(1, \mu_n)$ è definita come l'esistenza del limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k}$

• Dimostrare che se $m_k/\mu_k \searrow 0$, allora se è $R(1, \mu_n)$ sommabile, è anche $R(1, m_n)$ sommabile. (vedi [rich.44](#))

•• La serie $\sum k^{-1-\alpha i}$ non è $C1$ sommabile ma è $R(1, 1/n)$ sommabile. Ciò segue da $\sum_{k=1}^n k^{-1-\alpha i} = \frac{-n^{-\alpha i}}{\alpha i} + \zeta(1 + \alpha i) + O(\frac{1}{n})$

••• Dare una serie $\sum a_k$ che converge $R(1, \mu_k)$ per un certo $\{\mu_k\}$ ma non converge $C1$. L'esempio dato da Hardy con $\{\mu_k\} = \{1/k\}$ non è di semplice risoluzione. La successione è $\{a_k\} = \{(1, -1, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, \dots, 0, 1, \dots)\}$ dove i termini pari a 1 e -1 occupano i posti 2^k . Nella dimostrazione di Hardy, bisogna fare riferimento al lavoro "On Certain oscillating series", Quarterly journal of pure and applied mathematics, vol.38, 1907, pp.269–288. Lì si dimostra che la serie $x - x^2 + x^4 - x^8 + \dots$ oscilla per $x \rightarrow 1^-$. Se $\sum a_k$ fosse convergente $C1$ allora per [rich.41](#) esisterebbe $\lim_{x \rightarrow 1^-} x - x^2 + x^4 - x^8 + \dots$

193.8.2 • Dimostrare che se $\sum a_k$ converge $R(1, \mu_n)$ ad s e $S_n e^{-\lambda_n x} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, per ogni x positivo, Allora $\sum a_k e^{-\lambda_k x}$ converge e tende ad s per $x \rightarrow 0$. (**Analogo del Teorema di Frobenius**, [rich.41](#), per serie $R(1, \mu_n)$ convergenti)

•• Se $\lambda_n a_n / \mu_n \rightarrow 0$ e la serie (certamente convergente per $x > 0$) $\sum a_k e^{-\lambda_k x}$ tende al limite s per $x \rightarrow 0$, allora $\sum a_k$ converge ad s . (**Analogo del Teorema di Tauber**, [rich.41](#), per serie $R(1, \mu_n)$ convergenti)

••• Se $|\lambda_n a_n / \mu_n| < K$ e la serie $\sum a_k$ è $R(1, \mu_n)$ sommabile, allora è sommabile in senso classico.

194.8.2 È facile convincersi del fatto che più la successione $\{\lambda_n\}$ diverge lentamente, più è probabile che esista il limite $x \rightarrow 0$ della serie $\sum a_k e^{-\lambda_k x}$ a patto che converga per ogni $x > 0$. Infatti

Non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sum k^{-1-\alpha i} e^{-kx}$ ma esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sum k^{-1-\alpha i} k^{-x}$

Non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sum k^{-x} (\ln k)^{1-\alpha i}$ ma esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sum k^{-1} (\ln k)^{1-\alpha i} (\ln k)^{-x}$

Hardy dimostra il seguente teorema:

Se $\sum a_k k^{-x}$ converge per ogni $x > 0$, e se $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_k x^k = s$ esiste, allora esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \sum a_k k^{-x} = s$

195.8.2 Es: Dimostrare il seguente risultato. Se $\varphi(n)$ è una funzione positiva di n che diverge

a $+\infty$ in modo monotono e $\operatorname{Re}(x) > 0$, allora

$$\int_0^{+\infty} \sum a_k e^{-t\varphi(k)} t^{x-1} dt = \Gamma(x) \sum \frac{a_k}{(\varphi(k))^x}$$

a patto che la seconda serie converga. Se ne deduce che se $\sum a_k e^{-x\varphi(k)} \rightarrow s$ per $x \rightarrow 0$, allora $\sum a_k/(\varphi(k))^x \rightarrow s$ per $x \rightarrow 0$.

196.8.2 Sia data una successione $\{a_n\}$ tale che $a_n - a_{n+1} = O(a_n/n)$ e tale che $\sum a_n$ è $C1$ -sommabile. Dimostrare che $na_n \rightarrow 0$ e che la serie converge. [G.H.Hardy, J.E.Littlewood "Contributions to the arithmetic theory of series", *Proceedings of the London mathematical society*, (2), vol.11, 1912, Teorema 27 pag.445]

197.8.2 Es: Sia data una successione $\{a_n\}$ tale che $na_n = O\left(\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n}\right)$ e tale che $\sum a_n$ è $C1$ -sommabile. Allora $na_n = O(1)$ e che la serie converge. [G.H.Hardy, J.E.Littlewood "Contributions to the arithmetic theory of series", *Proceedings of the London mathematical society*, (2), vol.11, 1912, Teorema 27 pag.449]

198.8.2 Sia data una successione $\{a_n\}$ tale che $a_n - a_{n+1} = O(a_n/n)$ e tale che $\sum a_n e^{-nx} \rightarrow s$ per $x \rightarrow 0$. Dimostrare che $na_n \rightarrow 0$ e che la serie converge. [G.H.Hardy, J.E.Littlewood "Contributions to the arithmetic theory of series", *Proceedings of the London mathematical society*, (2), vol.11, 1912, Teorema 27 pag.446]

199.8.2 Siano date le due serie numeriche

$$1) \sum \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}, \quad a, b \neq 0, -1, -2, \dots$$

2) $\sum (-1)^n \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}, \quad a, b \neq 0, -1, -2, \dots$. Si dica per quali valori di a e b convergono.

200.8.2 Si trovi il raggio di convergenza delle serie di potenze:

1) $\sum \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)} z^{n-1}, \quad a, b \neq 0, -1, -2, \dots$. Inoltre si studi la convergenza per $z = \pm 1$.

2) Stesse domande per $\sum \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)} z^n, \quad a, b, c \neq 0, -1, -2, \dots$

201.8.2 Trovare l'insieme dei numeri complessi per i quali converge la serie di potenze $\sum z^k/k$

202.8.2 Sia $a_k \geq 0$. Se $f(t) = \sum a_k t^k \leq C$ per ogni $0 \leq t < 1$ allora esiste il limite $t \rightarrow 1$ e vale $\sum a_k$.

• Si trovino dei controesempi nel caso venga a mancare l'ipotesi che $a_k \geq 0$ ma $|\sum a_k t^k| \leq C$ per ogni $0 \leq t < 1$ oppure che $a_k \geq 0$ ma $\sum a_k t^k$ è illimitata per $0 \leq t < 1$.

203.8.2 Sia data la serie di potenze $\sum a_k z^k$ con $a_k > 0$ il cui raggio di convergenza è 1. Si dimostri che $z = 1$ è un punto di singolarità della serie di potenze (Teorema di Pringsheim). Per "punti di singolarità" si intende un punto in cui la funzione non può essere sviluppabile in serie di potenze. Se la funzione non è limitata in un qualsiasi intorno del punto $z = 1$, ad esempio $\sum z^k = 1/(1-z)$, non c'è nulla da dimostrare. D'altra parte la serie $\sum z^k/k^2$ converge assolutamente e uniformemente per $|z| \leq 1$ ma in base al teorema di Pringsheim il punto $z = 1$ è di singolarità. Quindi, come evidenziato in [T] pag.217-218, non c'è nessuna relazione fra la convergenza della serie $\sum a_k z^k$ in $z = z_0$ sul bordo del cerchio di convergenza e la sviluppabilità della funzione $\sum a_k z^k$ nel punto $z = z_0$. [K1] pag.30, [M] pag.389, [T] pag.214, G.E.Šilov *Analisi Matematica, funzioni di una variabile* edizioni Mir 1978, prob.1 pag.405]

204.8.2 Dire per quali valori reali di a e b converge o diverge la serie $\sum \frac{\sin n}{n^a + b \sin n}$ [B] pag.514]

205.8.2 Si dimostri che per quasi tutti i numeri reali tranne al più un insieme di misura nulla, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k \ln |\sin(k\pi\vartheta)|$ converge per $|x| < 1$ [Joseph Lehner and P.T.Bateman A.M.M. Vol.63, No.1 (Jan.1956), pp.49–50, Problema 4610]

206.8.2 Dire per quali valori di $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 2$ la serie $\sum k^{-a-\sin k}$ converge oppure diverge. Si dica inoltre se converge o diverge la serie $\sum k^{-1-|\sin k|}$ [da P.Perfetti A.M.M. Vol.112, No.6 (Jun.,2005), problema num. 11162]

207.8.2 Si dica per quali valori di α e β positivi converge la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \prod_{k=2}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + (k+1) \ln(k+1)}$ e si calcoli la somma della serie. [da P.Perfetti A.M.M. problema num.11260, Vol.115, No.5 (May.,2008)]

208.8.2 Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n n \ln n \prod_{k=2}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + (k+1) \ln(k+1)}$, con $\beta > \alpha > 0$, si dimostri che converge. [da P.Perfetti A.M.M. problema num.11409, Vol.116, No.1 (Jan.,2009)]

209.8.2 Siano α e β reali tali che per ogni intero si abbia $k \geq 2$, $\alpha \neq -(2k) \ln(2k)$, $\alpha \neq (2k+1) \ln(2k+1)$, $\beta \neq 1 + (2k+1) \ln(2k+1)$, $\beta \neq -1 - (2k+2) \ln(2k+2)$. Definiamo

$$T(\alpha, \beta) \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \prod_{k=2}^n \frac{\alpha + (-1)^k \cdot k \cdot \ln k}{\beta + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot \ln(k+1)}$$

$$U(\alpha, \beta) \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N ((n+1) \ln(n+1)) \prod_{k=2}^n \frac{\alpha + (-1)^k \cdot k \cdot \ln k}{\beta + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot \ln(k+1)}$$

Dimostrare che

a) Se $-1 < \alpha + \beta < 1$, il limite esiste

b) $T(\alpha, -\alpha) + 2U(\alpha, -\alpha) + \alpha + 2 \ln 2 = 0$ [da P.Perfetti A.M.M. problema num.11473, Vol.116, No.10 (Dec.,2009). Per un errore di battitura, nel testo del problema c'è scritto $T+2U=0$]

210.8.2 Sia $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $S_n = \sum_{m=2}^n (\ln m)^\gamma \prod_{k=2}^m \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + (k+1) \ln(k+1)}$. Trovare la relazione fra α, β, γ tale che la serie $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ converge [Prob.5657, SSMA, Nov.2021]

211.8.2 La serie $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\sin \ln \ln k}{k \ln k}$ non converge

212.8.2 Es: Dire se converge o meno la serie $\sum_k \frac{\cos(k \ln \ln k)}{k \ln k}$ [La non convergenza della serie implicherebbe che la seguente serie divergente in ogni punto (Steinhaus, 1929) $\sum \frac{\sin k(x - \frac{\ln \ln k}{\ln k})}{\ln k}$ non è una serie di Fourier. Personalmente non sono riuscito a trovare una dimostrazione pubblicata che la serie di Steinhaus non è di Fourier a dispetto del fatto che nel suo libro A.Zygmund lo affermi chiaramente. Per un approfondimento della materia si può consultare l'appendice sulle serie trigonometriche]

213.8.2 Sia $d_k \rightarrow +\infty$. Allora è possibile trovare una successione monotona convergente $\{c_k\}$ tale che $kd_k c_k \geq \alpha > 1$ per infiniti k (anche $\overline{\lim} kd_k c_k = +\infty$)

214.8.2 Dare un esempio di serie monotona convergente a termini positivi a_k tale che $na_n \ln n$ non ammette limite. Se ammette limite esso è chiaramente zero [da: *R.W.Hamming A.M.M.* Vol.52, No.2 (Feb., 1945), 70–72]

• Sia p_n una successione tendente a $+\infty$ lentamente quanto si vuole. Allora esiste una successione positiva, monotona convergente a_n , con $2^n a_{2^n}$ monotona, tale che $p_n a_n n \ln n$ non tende a zero.

215.8.2 Dopo avere dimostrato che converge, trovare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+m)(k+m+1)\dots(k+n)} \quad n-m \geq 1$$

216.8.2 Sia $a_k \geq 0$. Dimostrare che converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)}$ e trovarne la somma [B] pag.25, [K] pag.267, [KN] ex.3.1.9 pag.65]

217.8.2 Sia data la serie $\sum \frac{n^{a-1}}{a+n^\beta \sin^2(n\pi\lambda)}$. Si dimostri che con $a > 0$ la serie diverge sempre se λ è razionale. Se λ è un irrazionale algebrico di ordine m allora converge per $\beta > a + 2m - 2$. Dimostrare che qualunque sia il valore di β , esistono numeri irrazionali λ tali che la serie diverge [B] pag.515 dove però si dà $\alpha > \beta + 2m$ quale condizione per la convergenza. Ciò probabilmente è dovuto al fatto che usa la minorazione $|\lambda - p/q| > (Mq^{m+1})^{-1}$ che è quella usata a pag.444 del lavoro richiamato a pag.515 di [B] ossia *G.H.Hardy On a class of analytic functions*, Proceedings of London Mathematical Society (2) vol.3, pp.441–460.]

218.8.2 Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)m+1} + \dots + \frac{1}{km-1} - \frac{x}{km}$ converge per un sol valore di x . Trovare tale valore e calcolare la somma della serie [da: *T.K.Leong; T.A.Peng; K.C.Yeo; T.J.Cullen* Esercizio num. 2244 di *A.M.M.* Vol.78, No.5 (May., 1971), 547–548]

219.8.2 Dimostrare che le serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2x) \sin kx}{k}$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k^2x) \sin kx}{k}$ convergono uniformemente. Dimostrare inoltre che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2x) \cos kx}{k}$ converge per alcuni punti e diverge per altri. [da: *O.E.Stanaitis; E.M.Wright* Problema num. 4536 di *A.M.M.* Vol.61, No.7 (Aug.–Sep., 1954), 480–481]
Si dimostri che $\sum \cos(k^2x)$ diverge se $\frac{x}{\pi}$ è razionale.

220.8.2 Si consideri la serie armonica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ e si definisca una nuova serie in cui ai primi p elementi fanno seguito i secondi p con il segno cambiato e così via. Si dimostri che la serie converge.

221.8.2 Si determini la convergenza della serie ottenuta dalla serie armonica prendendo il primo elemento con il segno più, il secondo e terzo con il segno meno, il quarto, quinto e sesto con il segno più eccetera [da: *E.P.Starke; R.P.Stephens; Fritz Herzog* *A.M.M.* Vol.56, No.4 (Apr., 1949), 263–265. L'esercizio si trova pure a pag.351 num.8 di *G.H.Hardy A Course of Pure Mathematics*, terza edizione 1921. Secondo M.Klamkin sta pure a pag.391, num.8 della nona edizione.] rich.15

222.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione strettamente crescente di interi tale che $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ e sia data la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{n_k} / k$ dove $a_{n_k} < k \leq a_{n_k+1}$. Dimostrare che converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$. [da: *E.P.Starke; R.P.Stephens; Fritz Herzog* *A.M.M.* Vol.56,

No.4 (Apr., 1949), 263–265. rich.15 ne è un caso particolare.]

223.8.2 Si determini la non convergenza della serie costruita sulla stessa falsariga dell'esercizio rich.15 ma ottenuta raggruppando 2^k termini ogni volta [da: *E.P.Starke; R.P.Stephens; Fritz Herzog* A.M.M. Vol.56, No.4 (Apr., 1949), 263–265]

224.8.2 Si dimostri che esiste il limite $\gamma_1 \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$. rich.16

225.8.2 Si dimostri che $\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{xy} \right\} dx dy = 1 - \gamma - \gamma_1$
[da O.Furdui <http://www.siam.org/journals/problems/downloadfiles/07-002.pdf>]

226.8.2 Calcolare $\int_0^{+\infty} \ln^2 \frac{x}{x+a} dx$.

Si calcoli $\int_0^{+\infty} \ln^2 \frac{x^2}{x^2+3x+2} dx$ [da: O.Furdui <http://ssmj.tamu.edu/problems/April-2008.pdf>. La soluzione esposta è quella sottomessa]

227.8.2 Sia $a_k > 0$ e $\sum a_k$ convergente.

- Dimostrare che converge pure $\sum a_k^{\frac{k}{k+1}}$ [Putnam competition, 1988, prob.B4].
- Dimostrare che converge pure $\sum a_k^{\frac{\ln k}{\ln k+1}}$ [C.J.Hillar, P.Fitzsimmons A.M.M. problema 10928, Vol.110, No.5 (May, 2003), 444–445].
- Trovare due successioni positive $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ con $b_k \nearrow 1$ tali che $\sum a_k$ converge mentre $\sum a_k^{b_k}$ diverge. rich.22

228.8.2 Si generalizzi alla seguente proposizione: Se $a_k > 0$, $b_k > 0$, $b_k = O(1/\ln n)$ e $\sum a_k$ converge, allora converge pure $\sum a_k^{1-b_k}$ [da: *J.Wimp* A.M.M. problema num. 10428, Vol.102, No.1 (Jan., 1995), 71. Si veda pure *J.Wimp, K.Schilling* A.M.M. Serendipitous solution, Vol.110, No.5 (May, 2003), 445 ed inoltre *C.J.Hillar, P.Fitzsimmons* A.M.M. problema 10928, Vol.110, No.5 (May, 2003), 444–445]

229.8.2 Sia dato il numero $A > 0$ ed una serie a termini non negativi convergente tale che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = A$. Si dica quale range di valori può assumere la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$. In altre parole, fissato A , bisogna individuare il range di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$ al variare della successione $\{a_k\}$. Si risolva poi lo stesso esercizio nell'ipotesi in cui gli a_k siano strettamente positivi. [Da Putnam 2000, A1]

230.8.2 Siano date due successioni $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, tali che 1) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{k} b_k \rightarrow 0$, 2) la serie $\sum \sqrt{k} |b_k - b_{k+1}|$ converge, 3) $S_n/\sqrt{n}$ è limitata ($S_n \doteq \sum_{k=1}^n a_k$). Allora $\sum a_k b_k$ converge. [da [VLA] pag.20, [K] pag.454, [K1] pag.10] rich.12

231.8.2 Utilizzare rich.12 per dimostrare che $\sum (-1)^{[\sqrt{k}]} z^k/k$ converge non assolutamente su tutti i punti del cerchio di raggio 1.

L'esercizio presenta interesse in quanto negli esempi presenti nei libri di testo, solitamente sulla circonferenza che circonda il cerchio di convergenza di una serie di potenze si danno funzioni con una o più delle seguenti possibilità : 1) La serie diverge in ogni punto, ad esempio $\sum z^k$, 2) la serie diverge in almeno un punto e converge altrove, ad esempio $\sum z^k/k$, 3) la serie converge in ogni punto, ad esempio $\sum z^k/k^2$ ma la convergenza è assoluta. L'esempio in oggetto mostra che la convergenza ovunque della serie sul bordo del cerchio di convergenza può non essere assoluta.

Es: Una volta scritte la/le funzioni e verificato che la convergenza non è assoluta, si investighi la convergenza uniforme. [da [VLA] pag.68, [K] pag.454, [K1] pag.31. Inoltre altre referenze sono 1) *H.F.Sandham* A.M.M. Vol.58, No.8 (Oct., 1951), 573, 2) *D.J.Newman* A.M.M. Vol.59, No.9 (Nov., 1952), 650, 3) *W.S.Loud* A.M.M. Vol.63, No.9 (Nov., 1956), 670. In 3) si danno ulteriori indicazioni su dove trovare una risposta. Una è data

da **rich.14**. Un'altro esempio, dovuto al grande *G.H.Hardy*, è $\sum z^n b^n / \ln n$ dove $(1-z)^{-i} = \sum b_n z^n$ e può trovarsi nel libro di Dienes, *The Taylor series*, 464–465. L'esempio di Pringsheim si trova in [B], pag.252] **rich.13**

232.8.2 Si consideri la serie $\sum a_k z^k$ dove $a_1 = 1$, $a_2 = -1/2$, $a_3 = -1/3$, $a_4 = 1/4$, $a_5 = 1/5$, $a_6 = 1/6$, $a_7 = -1/7$, $a_8 = -1/8$, $a_9 = -1/9$, $a_{10} = -1/10$, e via dicendo. Si dimostri che la serie converge sul cerchio di raggio uno e sulla circonferenza converge non assolutamente. In tal senso è un'altra risposta all'esercizio in **rich.13** [da *H.F.Sandham A.M.M.* Vol.58, No.8 (Oct., 1951), 573. L'ivi esempio è leggermente diverso per quanto riguarda la dislocazione dei segni più e meno. Inoltre ivi si dimostra che $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}) - (\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}) - \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{k} \sinh(\pi\sqrt{k})}$. Più in generale $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x+9} + \dots = \frac{\pi}{\sqrt{x} \sin(\pi\sqrt{x})}$] **rich.14**

233.8.2 Data la successione $a_k = 1/(k \ln k)$ formiamo una nuova successione $\{b_k\}$ in cui a gruppi di 2^p , $p = 1, 2, \dots$ cambiamo segno ad a_k . Verificare che: 1) la serie $\sum b_k z^k$ ha raggio di convergenza pari a 1 2) La serie converge per $|z| = 1$ 3) Verificare se nell'insieme $|z| \leq 1$ la convergenza è uniforme.

234.8.2 Dimostrare che la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ costituisce una frontiera naturale di analiticità per le tre serie 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$, 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1+z^n}$, 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ [da [K1] pag.31]

235.8.2 Si costruisca una serie di potenze $\sum a_k z^k$ con raggio di convergenza pari a 1, che diverge a N dati punti del cerchio di raggio 1 e converge negli altri punti [da [K1] pag.13]

236.8.2 Es: Si costruisca una serie di potenze $\sum a_k z^k$ con raggio di convergenza pari a 1, che diverge in tutti i punti ad eccezione di $z = 1$ dove converge. [da [K1] pag.13]

237.8.2 Si dimostri che $\int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x} dx = -\pi^4/180$ [da: *G.Rutledge; R.D.Douglas Evaluation of $\int_0^1 \frac{\ln u}{u} \ln^2(1+u) du$ and related Definite Integrals A.M.M., Vol.41, No.1 (Jan.,1934),29–36, H.Lam A.M.M. problema num. 6382, Vol.90, No.9 (Nov.,1983),649. Suggestimento: scrivere $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$, osservare che $f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n^2$, $0 \leq x \leq 1$ ed usare **rich.17**]*

238.8.2 Sia dato un numero algebrico quadratico α . Dimostrare che converge la serie $\sum n^{-2} |\sin(n\pi\alpha)|^{-1}$ [da: $\pi\mu\epsilon$ journal, Spring 2006, soluzione di Cecil Rousseau e Paul Bruckman. Si potrebbe dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\varepsilon} |\sin(\alpha\pi n)|^{-1}$ converge per qualsiasi numero algebrico α e $\varepsilon > 0$ ma bisogna usare il teorema di Thue–Siegel–Roth; roba da Medaglia Fields.]

239.8.2 Sia $\sum a_k$ una serie convergente. Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k a_k = 0$. **rich.19**

240.8.2 Sia $\{a_n\}$ una successione crescente di termini positivi. Dimostrare che $\sum (1 - \frac{a_n}{a_{n+1}})$ converge se e solo se $\{a_n\}$ è limitata.
[da: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=296&t=352167>]

241.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione tale che $\sum a_k$ converge. Dimostrare che diverge la serie $\sum \left| 1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ oppure dare un esempio per cui converge.
[da <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=67&t=591450>]

242.8.2 Sia data la serie convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Si calcoli quanto vale la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n(n+1)}$ [da [K2] pag.11]

243.8.2 Sia data la serie convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Si calcoli quanto vale la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \quad [\text{da [K2] pag.11}]$$

244.8.2 Sia data la successione $x_n \rightarrow a \in \mathbf{R}$. Inoltre sappiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} - 1 \right) = L \neq 0$. Dimostrare che $a = 0$. [<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=67&t=377450>]

245.8.2 Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni tali che $\sum a_n/b_n$ converga, $\sum a_n^2/b_n^2$ converga e $b_n(a_n + b_n) \neq 0$ per ogni n . Dimostrare che $\sum \frac{a_n}{a_n + b_n}$ converga. [da [G] pag.22]

246.8.2 Sia $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ una biiezione. Dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kf(k)}$ converga.

Es: Dare inoltre un esempio di biiezione $f(n)$ tale che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+f(k)}$ converga [da: "The 20th Annual Vojtech Jarník competition, March 2010". Credo che la prima parte segua già dalla iniettività]

247.8.2 Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ continua, positiva e monotona non crescente tale che $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$. Dimostrare che $\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx$ diverga. [Putnam 2010, vedi <http://kskedlaya.org/putnam-archive/2010s.pdf>]

248.8.2 Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi. Dimostrare che $\sum \frac{1}{k} \frac{1+a_{k+1}}{a_k}$ diverga. [da [MGLP] pag.38 ed anche [KN] prob.3.2.39, pag.79]

249.8.2 Sia $\{b_n\}$ una successione di numeri positivi e sia $b_k \searrow 0$ con $\sum b_k = +\infty$. Sia inoltre $a_k > 0$. Dire se $\sum b_k \frac{1+a_{k+1}}{a_k}$ diverga. [da [MGLP] pag.38 e [KN] pag.79 3.2.28]

• Trovare se esistono due successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ tali che $a_k > 0$, $b_k \rightarrow 0$ e $\sum b_k = +\infty$ ma tali che $\sum b_k \frac{1+a_{k+1}}{a_k}$ converga

250.8.2 Si dia un esempio di serie convergente $\sum a_k$ a termini positivi ed intero N tale che converga pure la serie $\sum k^{-N} (a_k)^{-N+1}$ [da [MGLP] pag.38]

251.8.2 Sia $\{a_k\}_{k \geq 1}$ una successione di numeri positivi e sia $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Dimostrare che se

$a_{k+1} \leq a_k e^{a_{k+1}}$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n e^{-S_n} = 0$ [Problema n.6 della rivista Matheproblems, vol.1 num1, website: <http://mathproblems-ks.com/>]

252.8.2 Sia $p > 1$ e $a_k \searrow 0$. Dimostrare che se converge $\sum a_k^{p-1}/k^{1/p}$ allora converge pure $\sum a_k^p$ [da [MGLP] pag.39]

253.8.2 Sia $a_1 > 0$ e $a_{n+1} = \ln \frac{e^{a_n} - 1}{a_n}$. Si calcoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n a_k$ [da [KN] pag.69]

254.8.2 Sia $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = \ln(e^{a_n} - a_n)$. Dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converga e trovare la somma della serie. [Putnam, 2016, Problem B1]

255.8.2 Sia $a_k > 0$ e $\sum a_k < +\infty$. Detta $A_k = \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$. Dimostrare che $\sum A_k$ diverge ma $\sum \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k}$ converga. [La seconda domanda è connessa alla disuguaglianza di Carleman. Una dimostrazione si trova qui http://en.wikipedia.org/wiki/Carleman's_inequality]

rich.60

256.8.2 Si trovino i valori di α per cui la serie seguente diverge oppure converge

$$\sum \frac{(-1)^k \cos(\ln k)}{k^\alpha}$$

257.8.2 Sia $a_k > 0$ e sia $A_n = \sum^n a_k$ divergente. Allora $\sum \frac{a_k}{A_k(\ln A_k)^{1+r}}$ converge per $r > 0$.

[T.H.Hildebrand, *Remarks on the Abel-Dini theorem* A.M.M. vol.49, no.7 (Aug. Sept., 1942), pag.441-445]

rich.28

258.8.2 Sia $a_k > 0$ e sia $A_n = \sum^n a_k$ divergente. Supponiamo inoltre che $A_{n-1}/A_n \geq c > 0$ per ogni n . Allora $\sum \frac{a_k}{A_k(\ln A_k)^{1+r}}$ converge per $r > 0$ e diverge per $r \leq 0$. [T.H.Hildebrand,

Remarks on the Abel-Dini theorem A.M.M. vol.49, no.7 (Aug. Sept., 1942), pag.441-445]

rich.30

259.8.2 Sia $d_k > 0$ una successione tale che $\sum d_k = +\infty$. Detta $\sum^n d_k$, dimostrare che se $\alpha > 0$ allora la serie $\sum \frac{d_k}{s_k \ln s_k (\ln \ln s_k)^{1+\alpha}}$ converge. Se inoltre $s_{k-1}/s_k \geq c > 0$ definitivamente in k , allora la serie diverge se $\alpha \leq 0$. [T.H.Hildebrand, *Remarks on the Abel-Dini theorem* A.M.M. vol.49, no.7 (Aug. Sept., 1942), pag.441-445]

260.8.2 Sia $\sum d_k = +\infty$, $d_k > 0$. Si trovi una successione $\{c_k\}$ tale che $0 < c_k \leq d_k$, e $\sum c_k < +\infty$, $\sum c_k^\alpha = +\infty$ $\alpha < 1$. [T.H.Hildebrand, *Remarks on the Abel-Dini theorem* A.M.M. vol.49, no.7 (Aug. Sept., 1942), pag.441-445]

261.8.2 Siano α e β numeri reali non negativi e siano

$$a_n = (n + \ln(n+1)) \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)},$$

$$p_n = (\alpha + n + 1 + \ln(n+1)) \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)}.$$

Si trovino quegli α e β per i quali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

converge e determinare la relazione fra α e β per cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - p_n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) = (\alpha + 1)(\alpha + 2 + \ln 2) - \frac{(\alpha + 1)^2}{2}$$

[Prob. num. 3583, *Crux Mathematicorum with mathematical Mayhem*, vol. 36-7, 2010]

262.8.2 Es: Studiare la convergenza della seguente serie $\sum \frac{(-1)^k |\sin k|}{k}$

[<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=67&t=66549&p=392834#p392834> oppure l'articolo di N.V.Rao *Diophantine Approximations and Convergence of Alternating Series*, *Proceedings of the American Mathematical Series*, Vol.93, No.3 (May.,1985), pp.420-422]

263.8.2 Es: Studiare la convergenza della seguente serie $\sum \frac{(-1)^k}{\ln k + 2 \cos(2nx)}$ al variare di x

[<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=67&t=60673&p=366241#p366241>]

264.8.2 Sia $a_k > 0$ tale che $\sum \frac{1}{a_k}$ converge. Dimostrare che converge pure $\sum \frac{a_n n^2}{(a_1 + \dots + a_n)^2}$

265.8.2 Sia $a_k > 0$ tale che $\sum \frac{1}{a_k}$ converge. Dimostrare che converge pure $\sum \frac{n}{a_1 + \dots + a_n}$

[Putnam, 1964]

266.8.2 Sia $A \subset \mathbf{N}$. Dimostrare che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n} > 0$ allora $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = +\infty$ [da <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=67&t=595683>. È un risultato noto in letteratura.]

267.8.2 Sia data la successione $\{a_k\}$ tale che $0 < a_k \leq a_{2k} + a_{2k+1}$ $k \geq 1$. Dimostrare che $\sum a_k$ diverge. [Putnam 1994 A1]

268.8.2 Sia data la successione $\{a_k\}$ tale che $a_k \leq a_{k+1}$ e $a_k \leq k$. Dimostrare che $\sum (a_k/S_k)^p$ con $S_k = a_1 + \dots + a_k$ e $p > 1$ converge. [Soluzione in P.D.Barry, W.K.Hayman, D.Borwein AMM Vol.72, No.6, (Jun. – Jul., 1965), pp.675–677]

269.8.2 Siano date le due successioni $\{a_k\}$ e $\{r_k\}$, $r_k \geq 1$ tali che $a_k \leq a_{k+1}$ e $a_k \leq kr_k$. Se $xf(x)$ è definitivamente monotona decrescente e $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$, allora $\sum r_k f\left(\frac{r_k S_k}{a_k}\right) < +\infty$. [D.Borwein *Journal of London Mathematical Society*, 40(1965), 587–588]

270.8.2 Sia $a_k \geq 0$ e $\sum a_k^p$ convergente, $p > 0$. Dimostrare che converge pure $\sum a_k A_k/k^a$ con $a > (2p-1)/p$, $A_k = a_1 + \dots + a_k$.

271.8.2 Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^+$, con derivata positiva. Dimostrare che $\sum \frac{1}{f(k)}$ converge se e solo se converge $\sum f^{(-1)}(k)/k^2$. [[KN] prob.3.3.16, pag.91]

272.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Dimostrare che $\sum a_k < +\infty$ se e solo se $a_k = o(1/k)$ e $\sum (a_k - a_{k+1})k < +\infty$. [da [MGLP] p.36]

273.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Dimostrare che $\sum a_k/k < +\infty$ se e solo se $a_n = o(1/\ln k)$ e $\sum (a_k - a_{k+1}) \ln k < +\infty$. [da [MGLP] p.36 e A.M.M. vol.122-3, Marzo 2015]

274.8.2 Sia q_n la cardinalità dell'insieme di numeri primi minori o uguali ad n . Sappiamo dal *Teorema dei numeri primi* che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n \ln n)/n = 1$. Dimostrare che, detta $\{p_k\}$ la successione dei numeri primi, si ha $\sum 1/p_k = +\infty$. [Vedi pure https://it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_della_divergenza_della_serie_dei_reciproci_dei_primi]

Dire se converge o diverge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{np_n - (n-1)p_{n-1}}$

[Vedi http://www.artofproblemsolving.com/community/c7t427f7h1157413_mikloacutes_schweitzer_1959_problem_1 oppure [MGLP] pag.35. Anche [KN] pag.84 esercizio **3.2.73**]

275.8.2 Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ strettamente crescente e con $f(0) = 0$. Sia h l'inversa di f e $F = \int_0^x f$, $H = \int_0^x h$. Si dimostri che se $\sum F(a_k)$ e $\sum H(b_k)$ convergono, allora converge pure $\sum a_k b_k$. Come corollario si ha che se $\sum a_k f(a_k)$ e $\sum b_k h(b_k)$ convergono, allora converge pure $\sum a_k b_k$. [Da HLP pag.124]

276.8.2 Sia $a_k \rightarrow 0$ e $b_k \rightarrow 0$, $a_k > 0$. Dimostrare che se convergono le serie $\sum a_k/\ln a_k$ e $\sum e^{-1/b_k}$ allora converge pure la serie $\sum a_k b_k$. [Da HLP pag.125]

277.8.2 Dimostrare che se $\sum (a_k \ln^\alpha a_k)^{-1}$ converge, allora converge pure $\sum (a_k \ln^\beta k)^{-1}$ per ogni $\beta \geq \alpha$ [Da HLP pag.125, ex.172] rich.59

• Se esiste, dare un esempio di successione $\{a_k\}$ tale che $\sum (a_k \ln^\alpha a_k)^{-1}$ diverge ma $\sum (a_k \ln^\alpha k)^{-1}$ converge.

278.8.2 Si dia una funzione $f: [0, +\infty)$ strettamente crescente e con $f(0) = 0$ ed una successione $\{a_k\}$ tale che se $\sum b_k f(b_k)$ converge, allora converge pure $\sum a_k b_k$ ed inoltre $\sum a_k h(a_k)$ diverge. La funzione h è l'inversa di f .

279.8.2 Si dia una funzione $f: [0, +\infty)$ strettamente crescente e con $f(0) = 0$ ed una successione $\{a_k\}$ tale che se $\sum H(b_k)$ converge, allora converge pure $\sum a_k b_k$ ma $\sum F(a_k)$ diverge. Si ha $F = \int_0^x f$, $H = \int_0^x h$ e h è l'inversa di f . [Da HLP pag.124, ex.170]

280.8.2 Sia $a_k > 0$ e $\sum a_k$ convergente. 1) Dimostrare che converge pure $\sum a_k^{1-\frac{1}{n}}$ 2) Dimostrare che converge $\sum \frac{a_k}{\ln(1+k)} \ln \frac{1}{a_k}$ [MGLP pag.38]

281.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri positivi tali che $\sum a_k$ diverge e $a_k/S_k \rightarrow 0$. Dimostrare che $\lim(\sum^n a_k/S_k)/\ln S_n = 1$. [da [KN] pag.83]

282.8.2 Sia $a_k \nearrow +\infty$ e $\sum 1/a_k = +\infty$. Dimostrare che $\sum (\ln^k a_k)/a_k$ e $\sum (\ln^k k)/a_k$ hanno lo stesso carattere.

283.8.2 Sia $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $f' \searrow 0$. Dimostrare che le due serie $\sum f'(k)$ e $\sum f'(k)/f(k)$ divergono o convergono assieme.

284.8.2 Sia $F(x)$ una funzione definita sui reali positivi. Allora le seguenti tre condizioni sono fra loro equivalenti

- 1) Se $c_k > 0$ e $\sum c_k < +\infty$, allora $\sum c_k F(r_k) < +\infty$ dove $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} c_k$
- 2) esiste un $\delta > 0$ ed una funzione positiva crescente $f(x)$ definita su $(0, \delta]$ tale che $F(x) \leq (f(x) - f(y))/(x - y)$, $0 < y < x \leq \delta$
- 3) esiste $\delta > 0$ ed una funzione decrescente h su $(0, \delta]$ tale che h sia integrabile e $F(x) \leq h(x)$

Si può anche dimostrare il teorema complementare ossia detto $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $a_k > 0$ e detta $F(x)$ una funzione positiva definita su $\mathbf{R}^+$, le seguenti condizioni sono equivalenti

- 1') Se $S_n \rightarrow +\infty$, la serie $\sum a_k F(S_k) < +\infty$ per qualsiasi serie a termini positivi e divergente
 - 2') esiste un $\delta > 0$ ed una funzione positiva decrescente $f(x)$ definita su $[\delta, +\infty)$ tale che $F(x) \leq (f(x) - f(y))/(x - y)$, $\delta \leq y < x$
 - 3') esiste $\delta > 0$ ed una funzione decrescente h su $[\delta, +\infty)$ tale che h sia integrabile e $F(x) \leq h(x)$
- [Piot Biler, A.M.M. Vol.92, No.5 (May,1985), 347-349]

285.8.2 Sia $a_n > 0$, $a_n \searrow a$, $a_n \neq 1$, . Dimostrare che la serie $\sum \frac{1}{n} \frac{\frac{a_n-1}{a_n} - 1}{1 - (a_n)^{1/n}}$ converge se $a \neq 0, 1$. [MGLP p.37]

- Cosa succede se $a_n \nearrow +\infty$?

286.8.2 Siano $\{c_k\}$ e $\{d_k\}$ due successioni monotone non crescenti tali che $\sum c_k < +\infty$, $\sum d_k = +\infty$. Sia $N(n)$ il numero di interi k minori o uguali a n tali che $c_k \geq d_k$. Sia $A(n) = N(n)/n$. Dimostrare che se esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)$, esso è 0. Più specificatamente si può dimostrare che

Per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $k > 1$, esiste una successione $\{r_i\}$ con $r_i \rightarrow +\infty$, tale che se $r_i \leq n \leq kr_i$, si ha $A(n) < \varepsilon$ [da: R.W.Hamming Monotone Series American Journal of Mathematics Vol.68, No.1 (Jan., 1946), 133-136] rich.32

- Dare un esempio di successioni c_k e d_k tali che $\overline{\lim} A(n) = 1$.

287.8.2 Siano $\{c_k\}$ e $\{d_k\}$ due successioni monotone non crescenti tali che $\sum c_k < +\infty$, $\sum d_k = +\infty$. Dimostrare che per ogni $K > 1$, esistono infiniti $R_i \rightarrow +\infty$ tali che se $R_i \leq n \leq KR_i$, si ha $c_n < d_n$. [da: Aryeh Dvoretzky On Monotone Series American Journal of Mathematics Vol.70, No.1 (Jan., 1948), 167-173] rich.33

288.8.2 Dimostrare che il risultato di rich.33 implica rich.32

289.8.2 Siano $\{c_k\}$ e $\{d_k\}$ due successioni monotone non crescenti tali che $\sum c_k < +\infty$, $\sum d_k = +\infty$. Sia $P(m)$, $0 \leq P(m) \leq +\infty$ il numero di indici consecutivi $n \geq m$ tali che $c_n < d_n$. Dimostrare che il risultato di rich.33 è equivalente a $\overline{\lim} P(n)/n = +\infty$

- Sia $Q(m; \varepsilon)$, $0 \leq Q(m; \varepsilon) \leq +\infty$ il numero di indici consecutivi $n \geq m$ tali che $A(n) < \varepsilon$. Dimostrare che il risultato di rich.32 è equivalente a $\overline{\lim} Q(n; \varepsilon)/n = +\infty$ per ogni $\varepsilon > 0$. [da: Aryeh Dvoretzky On Monotone Series American Journal of Mathematics Vol.70, No.1 (Jan., 1948), 167-173] rich.34

290.8.2 Sia g_n una successione positiva tendente a $+\infty$. Dimostrare che si possono trovare due successioni monotone decrescenti $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$, tali che $\sum c_k < +\infty$, $\sum d_k = +\infty$ ed inoltre 1) $\lim g_n A(n) = 0$, 2) $\lim P(n)/(ng_n) = 0$, 3) $\lim Q(n, 1 - \varepsilon)/(ng_n) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$.

Il risultato 1) va confrontato con [rich.32](#) mentre 2) con la prima parte di [rich.34](#) [rich.36](#)

291.8.2 Sia $\{G_n\}$ una successione che soddisfa $\lim G_n/n = 0$. Allora esistono due successioni monotone decrescenti $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$, tali che $\sum c_k < +\infty$, $\sum d_k = +\infty$ ed inoltre $\lim G_n(1 - A(n)) = 0$.

292.8.2 Sia data la successione $\{a_n\}$ definita dalla relazione $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $a_1 \geq 2$. Si calcoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ [*Mathematics Magazine*, problema num.1774, 2006. Anche [K], pag.66, prob.3.1.11]

293.8.2 Sia $0 \leq a_k \leq 1$, $S_k = a_1 + \dots + a_k$, $T_k = S_1 + \dots + S_k$. Dimostrare che la serie $\sum a_k/T_k^\alpha$ converge per $\alpha > 1/2$. [K] pag.298]

294.8.2 Si calcoli $\int_0^{\pi/2} 4(\cos x)^2 (\ln(\cos x))^2 dx$ [da http://mathproblems-ks.com/?wpfb_dl=7]

295.8.2 Si dimostri che $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^4-x^2} dx = \frac{2}{3}C + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{36}$. $C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ è la costante di Catalan

296.8.2 Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln(1 - \cos x) dx$, e $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln(1 + \cos x) dx$,

[http://www.asymmetry.gr/images/asymmetry/Asymmetry_V5_March_2014.pdf]

297.8.2 Sia $x > 0$. Dimostrare che: 1) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx}{(k+x)^3} < \frac{1}{2}$ 2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1-x}{(k+1+x)^3} < \frac{1}{(1+x)^2}$
3) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1-x}{(k+1+x)^3} > \frac{x}{(1+x)^3}$. Sembra che la 2) sia vera solo per $0 \leq x \leq 1$. [Univ.Beograd Publ.

Elektrotehn Fak. Ser.Mat. **17**, 2006, scaricabile a <http://perfmath.etf.bg.ac.yu>]

298.8.2 Siano $b_k > 0$ e $c_k > 0$. $\sum b_k = \sum c_k = +\infty$. Siano inoltre $B_n = b_0 + \dots + b_n$, $C_n = c_0 + \dots + c_n$. Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_0 s_0 + \dots + b_n s_n}{b_0 + \dots + b_n} = s$ implica $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_0 s_0 + \dots + c_n s_n}{c_0 + \dots + c_n} = s$

se è verificata una delle seguenti condizioni: 1) $\frac{c_n}{b_n} > \frac{c_{n+1}}{b_{n+1}}$, 2) $\frac{c_n}{b_n} < \frac{c_{n+1}}{b_{n+1}}$ e $\frac{b_0 + \dots + b_n}{b_n} \leq K \frac{c_0 + \dots + c_n}{c_n}$ [G.H.Hardy "On certain oscillating series", Quarterly Journal of pure and applied mathematics,

vol.38, 1907, p.269–288, anche [B] pag.427]

[rich.44](#)

299.8.2 Calcolare $\int_0^1 \int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1+y)}{x-y} dx dy$ [Nella soluzione esce fuori la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ che è collegata all'esercizio **79.8.1** che a sua volta è collegato, per quanto riguarda la seconda soluzione, all'esercizio [rich.35](#) b) e c) del gruppo sulla variabile complessa. Dal calcolo emerge pure la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 2^k)^{-1}$ per la quale si può fare riferimento a [B] pag.520 dove lo si attribuisce a Legendre]

[rich.47](#)

300.8.2 Sia $a_k \geq 0$. Dimostrare che $\prod_{k=0}^{+\infty} (1+a_k)$ converge se e solo se converge $\sum a_k$. Dimostrare con un esempio che se cade la condizione $a_k \geq 0$ non è più vero.

301.8.2 Sia D un dominio in $\mathbf{R}^2$ e sia $\{g_k(x)\}$ una successione di funzioni dove x è una curva all'interno del cerchio di raggio 1. Quindi dovremmo scrivere $g_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Supponiamo che:

1) $g_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ uniformemente in D 2) $\sum_{k=0}^n |g_k(x)| \leq K$ per ogni n e $x \in D$. 3) $\sum g_k(x)$

converge uniformemente in D . Allora $\prod (1 + g_k(x))$ converge uniformemente in D e quindi

$\lim_{x \rightarrow x_0} \prod (1 + g_k(x)) = \prod (1 + g_k(x_0))$ [G.H.Hardy *Note on the continuity or discontinuity of a function*

defined by an infinite product Proceedings of the London Mathematical Society, vol.s2-7, 1909, pp.40-48]

302.8.2 Nelle stesse premesse dell'esercizio precedente, supponiamo che $\sum g_n(x)$, $\sum g_n^2(x) \dots \sum g_n^{k-1}(x)$, $\sum |g_n^k(x)|$ siano uniformemente convergenti. Allora $\prod (1 + g_n(x))$ è uniformemente convergente in D . Hardy chiama tale prodotti "conditionally convergent" in quanto $\sum |a_k|$ non converge. Se convergesse allora il prodotto sarebbe chiamato da Hardy "absolutely convergent". In ogni caso il prodotto in questione è chiamato "regularly convergent". [G.H.Hardy *Note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product* Proceedings of the London Mathematical Society, vol.s2-7, 1909, pp.40-48]

303.8.2 Consideriamo ora quei prodotti che Hardy chiama "irregularly convergent" ossia $\prod (1 + a_k)$ converge ma non converge o $\sum a_k$, o $\sum a_k^p$ per qualche p intero o non converge $\sum |a_k|^p$ per nessun valore intero di p . Dare degli esempi in cui ciò accade. [G.H.Hardy *Note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product* Proceedings of the London Mathematical Society, vol.s2-7, 1909, pp.40-48]

304.8.2 Far vedere con degli esempi che la sola convergenza di $\prod (1 + a_k)$ non implica la convergenza di $\prod (1 + a_k x)$ se $x \neq 0, 1$ [G.H.Hardy *Note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product* Proceedings of the London Mathematical Society, vol.s2-7, 1909, pp.40-48]

305.8.2 La convergenza di $\prod (1 + a_k)$ implica chiaramente quella di $\prod (1 + a_k x^k)$ per $|x| \leq 1$ ma *non implica che* $\lim_{x \rightarrow 1} \prod (1 + a_k x^k) = \prod (1 + a_k)$. Fornire un esempio. [G.H.Hardy *Note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product* Proceedings of the London Mathematical Society, vol.s2-7, 1909, pp.40-48]

306.8.2 Dimostrare che il prodotto $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\ln n}\right)$ converge se ϑ è un irrazionale algebrico.

Chiaramente è lo stesso studiare la convergenza della serie $\sum \ln(1 + \frac{e^{ik\vartheta}}{\ln k})$ [J.E.Littlewood *On a class of conditionally convergence infinite products* Proceedings of the London Mathematical Society, vol.s2-8, 1910, issue 1, pp.195-199. È un risultato che Hardy non è riuscito a dimostrare nel precedente lavoro]

307.8.2 Studiare la convergenza della serie $\sum e^{ik^a}/k^b$ con $0 < b \leq 1$, $0 < a < 1$

308.8.2 **Es:** Studiare la convergenza della serie $\sum \frac{\cos(k^b \cos(\ln k))}{k^a}$ con $0 < b < a < 1$.

309.8.2** (Hahn, Sierpinski) Sia $E = G_{\delta\sigma}$. Allora esiste una successione $\{f_n(x)\}$ che diverge su E . $G_{\delta\sigma}$ è l'intersezione dell'unione di aperti [T.Körner *The Behavior of Power Series on their Circle of Convergence*, Lecture Notes in Math. No.995, Berlin, Springer, 1983, pp.56-94]

310.8.2 Sia data la serie $\sum a_k$ e come al solito sia $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Sappiamo che $\frac{1}{n} \sum_{n=1}^N s_n =$

$s_N \frac{N+1}{N} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n a_n$. Consideriamo ora la quantità

$$s_N - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n a_n = \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) a_n$$

In generale se $\lambda(n)$ è una successione monotona strettamente crescente, possiamo definire

$$\sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{\lambda(n)}{\lambda(N)}\right) a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{\lambda(n)}{\lambda(N)}\right)^r a_n$$

Se esiste il limite $N \rightarrow +\infty$, si dice che la serie è Rr sommabile con funzione-somma $\lambda(n)$. La Rr sta per “Riesz”-sommabile all’ordine r (M.Riesz, *Sur la sommation des séries de Dirichlet* C.R.Acad.Sci.Paris, 149,(1909), 18-21). Nel caso di $r = 1$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{\lambda(n)}{\lambda(N)}\right) a_n &= s_n - \frac{1}{\lambda(n)} \sum_{n=1}^N \lambda(n) a_n = \\ &= \frac{s_1(\lambda(2) - \lambda(1)) + s_2(\lambda(3) - \lambda(2)) + \dots + s_1(\lambda(n) - \lambda(n-1))s_{n-1}}{\lambda(n)} \end{aligned}$$

rich.48

311.8.2 Sia $0 < b < 1$ e $0 < a < 1$. Utilizzando il risultato dimostrato nell’esercizio **87.8** si dimostri che la serie $\sum k^{-b} e^{ik^a}$ converge o diverge con l’integrale $\int^{+\infty} x^{-b} e^{ix^a} dx$ se $a + b > 1$.

312.8.2 Siano $f(x) \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ e $g(x) \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ due serie a termini non negativi, che convergono per $0 < x < 1$, divergono per $x = 1$. Se asintoticamente $a_k \sim C b_k$ allora $f(x) \sim C g(x)$ per $x \rightarrow 1$. [T pag.224]

313.8.2 Sia $a_k \geq 0$. Se per $0 < x < 1$ si ha $f(x) \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sim 1/(1-x)$ per $x \rightarrow 1$, allora $A_n = a_1 + \dots + a_n \sim C n$ [T pag.226]

314.8.2 Sia $\{a_k\}$ una successione tale che $a_k - a_{k+1} = o(a_k/\sqrt{k})$, e $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-m} \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \frac{m^k}{k!} = S$ ($s_k = a_1 + \dots + a_k$; si dice che la serie $\sum a_k$ è Borel-sommabile). Allora allora $a_k = o(1/\sqrt{k})$ e la serie è convergente. [G.H.Hardy, J.E.Littlewood “Contributions to the arithmetic theory of series”, *Proceedings of the London mathematical society*, (2), vol.11, 1912, Teorema 27 pag.424]

315.8.2 Dimostrare che $\frac{1}{(\sin x)^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2}$ [Utilizzare l’uguaglianza di Parseval senza passare attraverso il teorema dei residui. R.M.Young *American Mathematical Monthly* vol.86, No.4. (Apr.,1979),pp.296-297]

316.8.2 Dimostrare la formula di riflessione della funzione $\Gamma(z)$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$

317.8.2 Sia $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri reali nonnegativi e $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi. Sappiamo che: 1) per $n \geq 1$ si ha $\lambda_n \leq 1$, 2) $f(n+1) - f(n) \geq n\lambda_n + 1$, 3) $0 < a_n \leq a_{n+1} + \lambda_n a_{f(n)}$. Allora $\sum a_n = +\infty$. [D.Borwein; A.Meir “Divergence Criterion for Positive Series”, *The American Mathematical Monthly*, Vol.79, No.10 (Dec.,1972),pp.1104-1106]

Sia $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri reali nonnegativi e $\{a_n\}$ una successione *de-crescente* di numeri reali non negativi. Sappiamo che: 1) $f(n+1) - f(n) \geq n\lambda_{n+1} + 1$, 2)

$a_{n+1} \leq a_n$ e $0 < a_n \leq a_{n+1} + \lambda_n a_{f(n)}$. Allora $\sum a_n = +\infty$. [D.Borwein; A.Meir "Divergence Criterion for Positive Series", *The American Mathematical Monthly*, Vol.79, No.10 (Dec.,1972),pp.1104–1106]

318.8.2 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili in (a, b) . Se $\sum f_n(x)$ converge uniformemente in (a, b) e $\int_a^b |g(x)|dx = J$ (finito) allora $\sum \int_a^b g(x)f_n(x)dx$ converge e $\int_a^b g(x) \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b g(x)f_n(x)dx$ nell'ipotesi che $f_h g$ è integrabile. [[B] pag.495, Teorema A La funzione g può anche essere non limitata in (a, b)]

319.8.2 Siano $g \geq 0$ e $f_n \geq 0$ per $x \in (a, b)$, $\sum f_n(x)$ converge uniformemente in $(a, b - \delta]$ per ogni $\delta > 0$ e $\int_a^b g(x)dx < +\infty$. Almeno una delle due condizioni $\int_a^b g \sum f_n(x)dx < +\infty$ oppure $\sum \int_a^b g f_n dx < +\infty$ è condizione necessaria e sufficiente per poter dire che sono uguali [[B] pag.496, Teorema B]

320.8.2 Sia $\sum f_n(x)$ converge uniformemente in $(a, b - \delta]$ per ogni $\delta > 0$ e $\int_a^b |g|dx < +\infty$. Almeno una delle due condizioni $\int_a^b |g| \cdot |\sum f_n(x)|dx < +\infty$ oppure $\sum \int_a^b |g| \cdot |f_n|dx < +\infty$ è condizione necessaria e sufficiente per poter dire che sono uguali [[B] pag.497, Teorema C. La convergenza (assoluta) $\int_a^b |g \sum f_n|dx$ non basta. Vedi Hardy *Messenger of Mathematics* vol.35, 1905 p.126 e Bromwich, *ibid* vol.36, 1906 p.1]

321.8.2 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili in $(a, +\infty)$. Se $\sum f_n(x)$ converge uniformemente in $(a, +\infty)$ e $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx = J$ (finito) allora $\sum \int_a^{+\infty} g(x)f_n(x)dx$ converge e $\int_a^{+\infty} g(x) \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^{+\infty} g(x)f_n(x)dx$ nell'ipotesi che $f_h g$ è integrabile. [[B] pag.499. È una generalizzazione del teorema con b che da finito diventa infinito]

rich.52

322.8.2 Sia $\{f_n\}$ una successione uniformemente convergente in (a, b) per qualsiasi $b > a$ e $g(x)$ continua. Se accade che $\int_a^{+\infty} |g| \cdot |\sum f_n|dx < +\infty$ oppure $\sum \int_a^{+\infty} |g| \cdot |f_n|dx < +\infty$ allora $\int_a^{+\infty} g \sum f_n dx = \sum \int_a^{+\infty} g f_n dx$ [[B] pag.500]

323.8.2 Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $|a_{n+1}| \leq C|a_n|$ con $C > 1$. Se accade che $\sum |a_k \cos kx| < +\infty$ per almeno un valore di x , allora $\sum |a_k| < +\infty$. La stessa cosa accade con la serie $\sum |a_k \sin(kx)|$ se converge per un valore di $x_0 \neq 0 \pmod{\pi}$. [Otto Szász *On the absolute Convergence of Trigonometric Series* Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213–220 e [Ba2] pag.333. Con $C=1$ è un Teorema di Fatou]

rich.46

324.8.2 Sia $0 < l_1 < l_2 < \dots$ e la serie $\sum r_k \cos \lambda_k x_0$ convergente con $0 < \alpha \leq (l_k - l_{k-1})x_0 \leq \beta < \pi$, $r_k \geq 0$. Se $r_{k+1} < C r_k$ allora $\sum r_k$ converge [Otto Szász *On the absolute Convergence of Trigonometric Series* Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213–220]

rich.47

325.8.2 Sia $u_k \geq 0$ e $\sum u_k < +\infty$ e inoltre

$$a) \ n - k_n \nearrow +\infty, \quad b) \ k_n < c_1 n < n \quad c) \ k_{2n} < c_2 k_n$$

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k_n} \sum_{p=n-k_n}^n u_p$ [Otto Szász On the absolute Convergence of Trigonometric Series Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213-220] rich.48

326.8.2 Sia data la serie $\sum r_k \cos l_k x$ con $r_k \geq 0$, la successione $\{k_n\}$ e le sei condizioni:

$$I) k_{n+1} - k_n \leq 1, \quad II) \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} k_n/n < 1, \quad III) k_{2n}/k_n = O(1), \quad IV) \sum r_k |\cos l_k x_0| < +\infty$$

$$V) r_n \leq C r_{n-p} \quad p = 1, 2, \dots, k_n \quad VI) \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} k_n^{-1} \sum_{p=n-k_n}^n |\cos l_p x_0| > 0$$

La conclusione è che $\sum r_k < +\infty$. [Otto Szász On the absolute Convergence of Trigonometric Series Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213-220 La condizione $k_{n+1}-k_n \leq 1$ non mi sembra inerente la dimostrazione ma credo che serva $n-k_n \nearrow +\infty$] rich.49

327.8.2 Sia data la serie $\sum r_n \cos(l_n x - \alpha_n)$ convergente assolutamente ($r_n \geq 0, l_n, \alpha_n \in \mathbf{R}$) per almeno due punti $x_1, x_2, x_1 - x_2 \neq 0 \bmod \pi$ e $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \cos(2k_n \delta) < 1$. Allora se $r_{k+1} \leq r_k$ oppure $r_{p+n} \leq C r_n$ per ogni n, p interi, allora $\sum r_n < +\infty$. [R. Salem On the absolute Convergence of Trigonometric Series Duke Mathematics Journal, Vol.8 (1941), 317-334, [Ba2] pag.334]

Dalla dimostrazione emerge il seguente Teorema II di [Otto Szász On the absolute Convergence of Trigonometric Series Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213-220]: Se la serie $\sum r_n \cos(l_n x - \alpha_n), r_n \geq 0, l_n, \alpha_n \in \mathbf{R}$ converge assolutamente in due punti x_0, x_1 , allora la serie $\sum r_n |\sin(l_n(x_1 - x_0))|$ converge rich.50

328.8.2 Sia definitivamente $0 < r_{n+1} \leq C r_n$ e $\sum r_n \cos 2^n x_0$ convergente assolutamente per un certo x_0 . Allora $\sum r_n < +\infty$. [R. Salem On the absolute Convergence of Trigonometric Series Duke Mathematics Journal, Vol.8 (1941), 317-334]

329.8.2 Sia $f(x) \not\equiv 0$ una funzione Riemann integrabile di periodo 1 e $\{r_n\}$ una successione tale che $r_{n+1} \leq (1 + c/n)r_n$ con $c > 0$. Se $\sum r_k |f(kx)| < +\infty$ per un certo x irrazionale, allora $\sum r_k < +\infty$. [R. Salem On the absolute Convergence of Trigonometric Series Duke Mathematics Journal, Vol.8 (1941), 317-334]

330.8.2 Dimostrare che le serie assolutamente divergenti (la seconda per $x \neq k\pi$) $\sum \frac{n^{\alpha i} \cos(nx)}{n \ln n}, \sum \frac{n^{\alpha i} \sin(nx)}{n \ln n}$, convergono uniformemente [Otto Szász On the absolute Convergence of Trigonometric Series Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213-220]

331.8.2 Dimostrare che la serie $\sum (n \ln n)^{-1} \cos(nx + \alpha \ln n)$ è uniformemente convergente ma che non è assolutamente convergente in due punti x_0, x_1 tale che $x_1 - x_0 \neq k\pi$ per ogni k . [Otto Szász On the absolute Convergence of Trigonometric Series Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213-220]

Converge assolutamente la serie in almeno un punto? (problema aperto secondo l'autore ma a me sembra semplice)

332.8.2 Es: Dimostrare che la serie $\sum n^{-\gamma} e^{i\alpha n \ln n} z^n, 1/2 < \gamma < 3/2, \alpha \in \mathbf{R} \neq 0$ è uniformemente convergente per $|z| = 1$ ma che la serie $\sum n^{-\gamma+i\alpha n} \cos(nx) 1/2 < \gamma < 1$ è solo uniformemente convergente ma non assolutamente convergente per nessun valore di x . Lo stesso accade per la serie e $\sum n^{-\gamma+i\alpha n} \sin(nx)$ tranne i punti $x = k\pi$. [Otto Szász On the absolute Convergence of Trigonometric Series Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213-220]

333.8.2 Es: La serie $\sum n^{-\gamma} \cos(nx + \alpha n \ln n)$, $1/2 < \gamma < 1$ è uniformemente convergente ma non può convergere assolutamente in due punti x_0 , e x_1 tale che $x_1 - x_0 \neq k\pi$ per ogni k . [Otto Szász *On the absolute Convergence of Trigonometric Series* Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol.47, No.2 (Apr.,1946), 213–220]

334.8.2 Sia $p_0 < p_1 < p_2 \dots$ una successione strettamente crescente di interi positivi tali che $p_{n+1} - p_n = O(p_n - p_{n-1})$. sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_{n+1} \leq a_n a_n(1 + \alpha/n)$ per $n > n_0(\alpha)$. Allora le due serie $\sum a_n$ e $\sum a_{p_n}(p_n - p_{n-1})$ convergono o divergono entrambi [Otto Szász *Quasi-Monotone Series* American Journal of Mathematics, Vol.70, No.1 (Jan.,1948), 203–206]

Corollario. Sia $\{b_n\}$ una successione *quasi monotona* $b_{n+1} \leq b_n(1 + \alpha/n)$ e sia $\{p_n\}$ la successione di interi descritte prima. Inoltre se $a_{p_n} \geq c b_{p_n}$ allora $\sum a_n < +\infty$ implica $\sum b_n < +\infty$

335.8.2 Sia $a(x)$ una funzione tale che $0 < a(x+y) \leq (1 + \alpha/x)a(x)$ per $0 < y < 1$. Sia $a_n \doteq a(n)$. Allora la serie $\sum a_n$ e l'integrale $\int^{+\infty} a(x)dx$ convergono o divergono entrambe [Otto Szász *Quasi-Monotone Series* American Journal of Mathematics, Vol.70, No.1 (Jan.,1948), 203–206]

336.8.2 Sia $a(x)$ quasi monotona $0 < a(x+y) \leq a(x)(1 + \alpha/x)$, $0 < y < 1$. Allora $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} a(kh) \rightarrow \int_0^{+\infty} a(x)dx$ quando l'integrale esiste [Otto Szász *Quasi-Monotone Series* American Journal of Mathematics, Vol.70, No.1 (Jan.,1948), 203–206] **Dimostrazione da concludere**

337.8.2 Data una successione $p_n \rightarrow +\infty$, trovare due successioni c_n e d_n/n crescenti tali che 1) $c_n/d_n \leq p_n$, 2) $\sum c_n^{-1} < +\infty$, $\sum d_n^{-1} = +\infty$ [J.E.Littlewood *Mathematical Notes (4): On a Theorem of Fatou* Journal of London Mathematical Society vol.s1–2, 1927 pp.172–176]

338.8.2 Calcolare la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin(n\pi\kappa)}{(n\pi)^2 + \beta^2}$, $\kappa < 2$ [G.H.Hardy, *On differentiation and Integration under the integral sign*, Quarterly Journal of Mathematics vol.32 (1900), pp.66–140, e G.H.Hardy, *Correction of an error*, Quarterly Journal of Mathematics vol.46 (1915), pp.261–262. Nella prima referenza la dimostrazione presenta un errore notato da G.Fichtenholz in *Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan*, 1915] rich.58

339.8.2 Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \frac{\ln(1 + \cos x) - \ln(1 + \cos y)}{\cos x - \cos y}$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.8.2 razionalizzando la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$

• 2) Basta osservare che $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

• 3) $\int_0^n \frac{dx}{x^2 + n^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^2 + n^2}$. $\frac{1}{n^2 + (j+1)^2} \leq \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2 + j^2}$ e quindi

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^2 + n^2} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + j^2} \leq \frac{1}{n} + n \sum_{j=1}^{n-1} \int_{j-1}^j \frac{dx}{x^2 + n^2} = \frac{1}{n} + n \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{dx}{x^2 + n^2}$$

$-n \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^2 + n^2}$. Ne segue

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + j^2} \leq \frac{1}{n} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} - n \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^2 + n^2}. \text{ Il risultato è quindi } \frac{\pi}{4}$$

- 4) $(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)) + \ln(2n) - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n) - \frac{1}{2} \ln n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ ossia $(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)) + \ln 2 - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \ln n$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \ln n) = \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma$
- 5) La serie converge (assolutamente) essendo il termine generale asintotico a $1/k^2$ per $\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$. Per valutare la somma scriviamo (N pari)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^N (-)^k \ln(1 - \frac{1}{k^2}) &= \sum_{k=1}^{N/2} (\ln(2k+1) + \ln(2k-1) - 2 \ln k - 2 \ln 2) - \\ &- \sum_{k=1}^{N/2-1} (\ln 2 + \ln(k+1) + \ln 2 + \ln k - 2 \ln(2k+1)) \\ \sum_{k=1}^{N/2} \ln(2k+1) &= \ln \frac{(N+1)!}{2^{\frac{N}{2}} (\frac{N}{2})!}, \quad \sum_{k=1}^{N/2} \ln(2k-1) = \ln \frac{(N-1)!}{2^{\frac{N}{2}-1} (\frac{N}{2}-1)!}, \\ \sum_{k=1}^{N/2} \ln k &= \ln(\frac{N}{2})!, \quad \sum_{k=1}^{N/2-1} \ln(k+1) = \ln(\frac{N}{2})!, \quad \sum_{k=1}^{N/2-1} \ln k = \ln(\frac{N}{2}-1)! \\ \sum_{k=1}^{N/2-1} \ln(2k+1) &= \ln \frac{(N-1)!}{2^{\frac{N}{2}-1} (\frac{N}{2}-1)!} \end{aligned} \quad (1)$$

La somma degli ultimi sei termini, una volta semplificata, è $\ln \frac{(N!)^4 N(N+1)}{2^{2N+1} ((\frac{N}{2})!)^8}$ quindi

$$\sum_{k=2}^N (-)^k \ln(1 - \frac{1}{k^2}) = \ln \frac{(N!)^4 N(N+1)}{2^{2N+1} ((\frac{N}{2})!)^8} - N \ln 2 - N \ln 2 + 2 \ln 2$$

Ora usiamo la formula di Stirling $N! \sim e^{N \ln N - N} \sqrt{2\pi N} (1 + o(1))$ ed otteniamo

$$\begin{aligned} &(4N \ln N - 4N + 2 \ln(2\pi) + 2 \ln N + 2 \ln N) + \\ &- ((2N+1) \ln 2 + 4N \ln N - 4N \ln 2 - 4N + 4 \ln(2\pi) - 4 \ln N + 4 \ln 2) + \\ &- 2N \ln 2 + 2 \ln 2 + o(1) = 3 \ln 2 - 2 \ln \pi + o(1) \end{aligned}$$

Il risultato segue eseguendo il limite $N \rightarrow +\infty$

• 6) Prima dimostrazione

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} - (1 + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{2}{2n})$$

da cui $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-)^{k+1}}{k} = \ln(2n) + \gamma + \alpha_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma + \alpha_n - \ln n - \gamma - \alpha'_n$ da cui il limite è $\ln 2$.

Seconda dimostrazione

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-t)^n dt}{1+t} = \ln 2 + \int_0^1 \frac{(-t)^n dt}{1+t} \doteq \ln 2 + q_n$$

e $q_n \rightarrow 0$ per cui il limite è $\ln 2$.

• 7) Si tratta di una serie di Leibnitz.

• 8) Si fa vedere che $\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x+k+1} - \frac{1}{x+k+2} \geq \frac{C_x}{k}$ definitivamente in k . Per la divergenza basta far vedere che $\exists \varepsilon > 0: \forall n \exists n_2 > n_1 \geq n: \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k \geq \varepsilon$ (a_k è l'elemento generico della

serie). Prendiamo ora $n_1 = n$, $n_2 = 3Nn + n + 2$ ottenendo $\sum_{k=n}^{3Nn+n+2} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} +$

$\sum_{n+3}^{3Nn+n+2} a_k \geq \sum_{j=1}^N \frac{C_x}{k} - \frac{3}{n} \geq 1$ se n e N sono abbastanza grandi.

• $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+8} + \dots$. Si procede allo stesso modo di prima. Stavolta $|\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} - \frac{1}{x+k+2}| = \frac{k^2 + 2xk + x^2 - 2}{(x+k)(x+k+1)(x+k+2)} \geq \frac{C_x}{k}$

• 9) $\ln(1 + \frac{k}{n^2}) = \frac{k}{n^2} + O(\frac{k^2}{n^4})$ per cui $\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n^2}) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^n O(\frac{k^2}{n^4}) \rightarrow \frac{1}{2}$ (la parte con O tende a zero chiaramente).

• 10) $\sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^n = \sum_{r=0}^{n-1} (1 - \frac{r}{n})^n$. Se potessimo passare al limite sotto il segno di serie otterremmo $\sum_{r=0}^{+\infty} e^{-r} = \frac{e}{e-1}$. Cerchiamo di giustificare quindi il passaggio al limite sia nell'estremo superiore della somma sia nel termine di essa. Abbiamo

$$(1 - \frac{r}{n})^n \leq (1 - \frac{r}{n+1})^{n+1}$$

Infatti dalla AGM abbiamo

$$\left((1 - \frac{r}{n})^n\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(1 \cdot (1 - \frac{r}{n})^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \left(1 + n(1 - \frac{r}{n})\right) = 1 - \frac{r}{n+1}$$

ed inoltre $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{r}{n})^n = e^{-r}$ per cui $(1 - \frac{r}{n})^n \leq (1 - \frac{r}{n+1})^{n+1} \leq e^{-r}$ e quindi

$$\sum_{r=0}^{n-1} (1 - \frac{r}{n})^n \leq \sum_{r=0}^{+\infty} (1 - \frac{r}{n})^n \leq \sum_{r=0}^{+\infty} e^{-r} = \frac{e}{e-1}$$

Definiamo la successione $Q_{n,m} \doteq \sum_{r=0}^m (1 - \frac{r}{n})^n$ e osserviamo che, ad n fissato, la successione è non decrescente (in quanto aggiungiamo termini positivi) e limitata e quindi passiamo al limite $m \rightarrow +\infty$, ed otteniamo $P_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} Q_{n,m} = \sum_{r=0}^{+\infty} (1 - \frac{r}{n})^n$. Come funzione di n la successione è

ancora non decrescente e quindi ammette il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} (1 - \frac{r}{n})^n = \sum_{r=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{r}{n})^n =$

$$\sum_{r=0}^{+\infty} e^{-r} = \frac{e}{e-1}$$

• 11) **Prima dimostrazione** Con ovvi calcoli si arriva a $\frac{1}{n}((n+1)(n+2)\cdots(2n))^{\frac{1}{n}} = \exp\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k}{n})\}$. L'esponente è pari a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{k}{n}} \frac{dx}{1+x} &= \frac{1}{n}\left(n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x} + (n-1) \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{dx}{1+x} + \cdots + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{1+x}\right) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (n-k+1) \ln \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k-1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (n-k+1) \ln\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (n-k+1) \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{2(n+k-1)^2} + O\left(\frac{1}{(n+k-1)^3}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n+k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2n-k}{k} = 2\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - 1 = 2\ln(2n) + \alpha_{2n} - \ln(n-1) + \alpha_{n-1} - 1$$

(α_{2n-1} e α_{n-1} sono quantità che tendono a zero) e quindi otteniamo

$$2\ln \frac{2n-1}{n-1} - 1 = 2\ln 2 + 2\ln \frac{1-\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{n}} - 1 = \ln 4 - 1 + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow +\infty$ e quindi il risultato $\frac{4}{e}$

Ora mostriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^2} + O\left(\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^3}\right)\right) = 0$. Consideriamo solo

il primo limite e poniamo $n-k=t$ da cui $\sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^2} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m+1}{(2n-m-1)^2}$ ed inoltre

$2n-m-1 \geq 2n-n+1-1=n$. Di conseguenza si ha $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{m+1}{(2n-m-1)^2} \leq \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n^2}(m+1) = \frac{1}{n^2}(n-1)\frac{n+2}{2} \leq \frac{1}{n^2}n^2 = 1$. Per il contributo con $O\left(\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^3}\right)$ la stessa stima comporta un fattore $1/n$. È evidente che il limite fa zero.

Seconda dimostrazione Una volta scritto $\frac{1}{n}((n+1)(n+2)\cdots(2n))^{\frac{1}{n}} = \exp\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k}{n})\}$,

si poteva osservare che il limite era $\exp\{\int_0^1 \ln(1+x)dx\}$ (somme di Riemann)

Terza dimostrazione (Cesàro–Stolz) Scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)\cdots(n+1)}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

e quindi passiamo a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)\cdots(n+n)} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4}{e}$$

$$\bullet 12) \sum_{k=1}^n \left[k \ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right) - 1 \right] = \sum_{k=1}^n (k \ln(2k+1) - (k-1) \ln(2k-1)) - \sum_{k=2}^n \ln(2k-1) - n =$$

$$n \ln(2n+1) - n - \ln(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)) = n \ln(2n+1) - n - \ln \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} = n \ln(2n+1) -$$

$n + (n-1) \ln 2 - \ln(2n-1)! + \ln(n-1)!$. Usiamo ora la formula di Stirling e lo sviluppo in serie del logaritmo naturale tralasciando, quando necessario, i termini che vanno a zero.

$$(n \ln 2 + n \ln n + \frac{1}{2}) - n + (n \ln 2 - \ln 2) + (-(2n-1)(\ln 2 + \ln n) - (2n-1)(-\frac{1}{2n}) + 2n-1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln n) + ((n-1) \ln n - (n-1)\frac{1}{n} - n+1) + \frac{1}{2} \ln n$$

si ottiene

$$2n \ln 2 + n \ln n - n + \frac{1}{2} - \ln 2 - (2n-1)(\ln 2 + \ln n) + \frac{(2n-1)}{2n} + 2n-1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln n + (n-1) \ln n - \frac{n-1}{n} - n+1 + \frac{1}{2} \ln n = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) + O(n^{-1})$$

Un altro modo consiste nello scrivere il termine generico della somma tramite l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{4n^2 - x^2}$$

$$\bullet 14) \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-3} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + (\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \dots) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \dots) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-3} +$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-1} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n-1}) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-1} \text{ per cui } \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-3} +$$

$$\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n-1}) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \text{ ed asintoticamente tale formula è pari}$$

$$\text{a } \frac{1}{2}(\ln(2n-1) + \gamma) + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln n - \frac{\gamma}{2} \text{ che tende al valore } \frac{3}{2} \ln 2$$

$$\bullet 15) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{k}); \quad \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^n (\frac{2}{2k-1} - \frac{1}{k}) - 1 - \frac{1}{2n+1} = \ln n + \gamma + 2 \ln 2 + o(1) - 1 - \frac{1}{2n+1} - \ln n - \gamma + o(1) \text{ ed il limite è chiaramente}$$

$$\bullet 16) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(9k^2-1)} = \sum_{k=1}^n (\frac{3}{2} \frac{1}{3k+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{3n-1} \frac{3}{2} \frac{1}{k} - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{3}{2}(\ln 3 + \ln n + \gamma_{3n+1}) - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma_n) - \ln n - \gamma_n \text{ che nel limite dà il risultato.}$$

$$\bullet 17) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(36k^2-1)} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{6k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{3}{6k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 3 \sum_{k=1}^{6n+1} \frac{1}{k} - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \frac{1}{2k-1} - 3 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 3(\ln 2 + \ln 3 + \ln n + \gamma_{6n+1}) - \frac{3}{2}(\ln 3 + \ln n + \gamma_{3n} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_n + \ln 2)) - 3 - \ln n - \gamma_n$$

$$\text{e nel limite si ottiene } 2 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 - 3$$

$$\bullet 18) \sum_{k=1}^n \frac{12k^2-1}{k(4k^2-1)^2} = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k}). \text{ La somma è}$$

$$\text{riscrivibile come } 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} + \left(-1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} =$$

$$-\frac{1}{(2n+1)^2} + \ln(2n+1) + \gamma_{2n+1} + \ln(2n-1) + \gamma_{2n-1} - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \gamma_n - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \gamma_n - \ln n - \gamma_n$$

e nel limite si ottiene $2 \ln 2$.

• 19) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$ da cui il valore del limite usando il fatto che è una serie telescopica

• 20) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(4k^2-1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} =$
 $\ln n + \gamma_n + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma_n + \frac{1}{2} - \ln(2n+1) - \gamma_{2n+1} +$
 $1 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma_n) - \ln(2n) - \gamma_{2n} + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma_n$ che nel limite dà il risultato.

• 21) Per $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ si ha $n \leq \frac{1}{x} < n+1$ e quindi $[\frac{1}{x}] = n$. Dunque $\int_0^1 \{\frac{1}{x}\} dx =$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} (\frac{1}{x} - k) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left((\ln(k+1) - \ln k) - k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n+1) - \right.$
 $\left. 1) - n + \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n+1) - n + n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 1 \right) =$
 $\ln(n+1) + 1 - (\ln(n+1) + \gamma_{n+1}) = 1 - \gamma$

• 22) Conviene osservare che, detta $f(x) = \{\frac{1}{x}\} \{\frac{1}{1-x}\}$, si ha $f(\frac{1}{2} - x) = f(\frac{1}{2} + x)$ e quindi
 $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} (\frac{1}{x} - k) (\frac{1}{1-x} - 1) dx = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} (\frac{1-k}{1-x} +$
 $k) dx = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \left((1-k) \left(\ln(1 - \frac{1}{k+1}) - \ln(1 + \frac{1}{k}) \right) + k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right)$. A parte il limite, le
somme sono date da

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=2}^n (1-k) (\ln k - \ln(k+1) - \ln k + \ln k) + \frac{1}{k+1} = \\ & = 2 \sum_{k=2}^n \left(k \ln(k+1) - (k-1) \ln k - \ln(k+1) \right) - 2 \sum_{k=2}^n \left(k \ln k - (k-1) \ln(k-1) - \ln k + 2 \frac{1}{k+1} \right) = \\ & = 2 \left(n \ln(n+1) - \ln 2 - \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - n \ln n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \ln k \right) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} = \\ & = 2 \left(n \ln(n+1) - n \ln n - \ln 2 - \ln(n+1) + \ln 2 + 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - 2(1 + \frac{1}{2}) \right) = \\ & = 2n \ln(n+1) - 2n \ln n - 2 \ln(n+1) + 2 \ln(n+1) + 2\gamma_{n+1} - 3 = 2n \ln(1 + \frac{1}{n}) + 2\gamma_{n+1} - 3 \text{ e nel} \\ & \text{limite si ottiene } 2\gamma - 1 \end{aligned}$$

• 23) $\sum_{k=2}^{2p} (-)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^p \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} = \sum_{k=1}^p \frac{\ln 2}{2k} + \sum_{k=1}^p \frac{\ln k}{2k} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1};$
 $-\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} = -\sum_{k=2}^{2p-1} \frac{\ln k}{k} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\ln(2k)}{2k} = -\sum_{k=2}^{2p-1} \frac{\ln k}{k} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\ln 2}{2k} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\ln k}{2k};$ sommando i vari
pezzi si ottiene $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\ln 2}{k} + \frac{\ln 2}{2p} + \frac{\ln p}{2p} - \sum_{k=p}^{2p-1} \frac{\ln k}{k} = \ln 2(\ln(p-1) + \gamma) - \int_p^{2p-1} \frac{\ln x}{x} dx + o(1) =$
 $\ln 2(\ln p + \gamma) - \frac{1}{2} \ln(2p^2 - p) \ln(2 - \frac{1}{p}) + o(1)$ e nel limite si ottiene il risultato.

- 24) Detto $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ si ha $a_k \searrow 0$ come è immediato verificare. Inoltre osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{2m} (-)^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{2m} (-)^k \ln k. \text{ È facile vedere che } \sum_{k=2}^{2m} (-)^k \ln k = 2m \ln 2 + 2 \ln m! - \ln(2m)!. \text{ Utilizzando la formula di Stirling } n! \sim (n/e)^n \sqrt{2n\pi} (1 + o(1)) \text{ si ha } \ln(2m)! = \frac{1}{2} \ln \pi + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln m + 2m \ln 2 + 2m \ln m - 2m + o(1), \ln m! = m \ln m - m + \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln m + \ln \pi) \text{ si ha } \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} \ln \pi. \text{ Sommando si ha quindi } \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{2m} (-)^k \ln k = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} \gamma_m - \frac{1}{2} \ln m - \frac{1}{2} \ln \pi$$

che nel limite dà $\frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{2} \ln \pi$

- 25) Diamo la dimostrazione, non rigorosa per quei tempi, di Eulero. Se ne potrà apprezzare comunque l'arguzia. $\frac{\sin x}{x}$ si annulla per $x = \pm k\pi$ e quindi si scrive $\frac{\sin x}{x} = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2})(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}) \dots$. D'altra parte $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ e quindi, uguagliando il coefficiente del secondo ordine di $\frac{\sin x}{x}$ otteniamo quanto voluto.

- Sulla stessa falsariga si può osservare che

$$\frac{1}{120} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2}$$

Inoltre abbiamo $\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 j^4}$. Mettendo tutto assieme abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} &= \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 j^4} = \\ &= \sum_{i,j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 i^2 j^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 j^4} \implies 2 \frac{1}{120} = \frac{1}{36} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^4 j^4} \end{aligned}$$

da cui il risultato.

- 26) Ci sono diversi modi.

$$\text{Primo modo. } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 (x^{4k-2} - x^{4k}) dx =$$

$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^4}{1-x^4} \right) dx$. L'ultimo passaggio necessita di giustificazione in quanto in $[0, 1)$ la serie geometrica $\sum x^k$ non converge uniformemente. Il modo più rapido probabilmente consiste

nell'usare il Teorema di Lebesgue. Definiamo $f_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^{4k-2} - x^{4k}) = x^2 \frac{1-x^{4n}}{1-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$

e quindi l'integrale della serie è pari alla serie degli integrali.

$$\text{Inoltre semplificando si ottiene } \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^4}{1-x^4} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Secondo modo. Si scrive } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{4k-2} dx \int_0^1 y^{4k} dy \text{ e si arriva a}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x^2 y^4}{1-(xy)^4}. \text{ Si cambia variabile } x = 1/r, y = r/s \text{ e si arriva a } \int_1^{+\infty} ds \int_1^s \frac{r dr}{s^2(s^4-1)}$$

ossia $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} ds \frac{1}{s^2(1+s^2)}$ che è uguale all'integrale di prima cambiando $x = 1/s$. Il problema dello scambio fra serie ed integrale sussiste ed in questo l'argomento di prima non funziona. Infatti stavolta $\sum_{k=1}^n (xy)^{4k} = (xy)^4 \frac{1-(xy)^{4n}}{1-(xy)^4}$ e tale quantità non possiamo maggiorarla con una funzione di x, y , integrabile in $[0, 1]^2$ ed indipendente da n . Dobbiamo tornare a $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{4k-2} dx \int_0^1 y^{4k} dy$ e spezzare in $\sum_{k=1}^n \int_0^1 x^{4k-2} dx \int_0^1 y^{4k} dy + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 x^{4k-2} dx \int_0^1 y^{4k} dy$. Ora $\sum_{k=1}^n \int_0^1 x^{4k-2} dx \int_0^1 y^{4k} dy = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^1 dy (xy)^4 \frac{1-(xy)^{4n}}{1-(xy)^4}$ e quindi $\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{4k-2} dx \int_0^1 y^{4k} dy - \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^1 dy (xy)^4 \frac{1-(xy)^{4n}}{1-(xy)^4} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^1 dy (xy)^{4k}$. Dalla teoria degli integrali impropri mutidimensionali si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^1 dy (xy)^{4k} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \int_{[0,1]^2 \setminus A_\varepsilon} x^{4k-2} y^{4k} dx dy \text{ dove } A_\varepsilon = \{\underline{x} \in [0,1]^2 : 1-\varepsilon \leq r \leq 1, \pi \leq \vartheta \leq 3\pi/2, \varepsilon > 0\}. \text{ Poi scriviamo } \sum_{k=p}^q \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \int_{[0,1]^2 \setminus A_\varepsilon} x^{4k-2} y^{4k} dx dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{k=p}^q \int \int_{[0,1]^2 \setminus A_\varepsilon} x^{4k-2} y^{4k} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \int_{[0,1]^2 \setminus A_\varepsilon} \frac{dx}{x^2} (xy)^{4p} \frac{1-(xy)^{4(q-p)}}{1-(xy)^4} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \int_{[0,1]^2 \setminus A_\varepsilon} \frac{dx}{x^2} (xy)^{4p} \sum_{k=0}^{q-p-1} (xy)^{4k}. \text{ Usando Cauchy ci basta studiare} \end{aligned}$$

$$\int \int_B \frac{dx}{x^2} (xy)^{4p} \sum_{k=0}^{q-p-1} (xy)^{4k} \text{ dove } B = \{\underline{x} \in [0,1]^2 : 1-\varepsilon' \leq r \leq 1-\varepsilon, \pi \leq \vartheta \leq 3\pi/2, \varepsilon' > \varepsilon > 0\}.$$

Chiaramente

$$\begin{aligned} \int \int_B \frac{dx}{x^2} (xy)^{4p} \sum_{k=0}^{q-p-1} (xy)^{4k} &= \int \int_B \frac{dx}{x^2} (xy)^{4p} \frac{1-(xy)^{4(q-p)}}{1-(xy)^4} dy \leq \int \int_B dx \frac{x^2}{1-(xy)^4} dy. \text{ Pas-} \\ &\text{sando a coordinate polari centrate in } (1,1) \text{ abbiamo che l'ultimo integrale è maggiorabile con} \\ &C \int_{1-\varepsilon'}^{1-\varepsilon} dr = C(\varepsilon' - \varepsilon). \text{ Ciò dimostra che } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^1 dy (xy)^{4k} \text{ è tanto più piccolo quanto} \\ &\text{più } n \text{ è grande.} \end{aligned}$$

Terzo modo. Si usa la funzione *digamma* $\psi(x) \doteq \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x} \right)$. Infatti $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k+5)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k+\frac{3}{4}} - \frac{1}{k+\frac{5}{4}} \right) = \frac{1}{8} (\psi(\frac{5}{4}) - \psi(\frac{3}{4}))$. Si sa che $\psi(\frac{r}{m}) = -\gamma - \ln(2m) - \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi r}{m} + 2 \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \cos \frac{2\pi nr}{m} \ln \left(2 \sin \frac{\pi n}{m} \right)$, $r < m$ entrambe interi. Abbiamo quindi $\psi(\frac{3}{4}) = -\gamma - \ln 8 + \frac{\pi}{2}$, Per avere $\psi(\frac{5}{4})$ usiamo $\psi(1+x) = \psi(x) + \frac{1}{x}$ per cui $\psi(\frac{5}{4}) = \psi(\frac{1}{4}) + 4$ e quindi $\psi(\frac{5}{4}) = 4 - \gamma - \ln 8 - \frac{\pi}{2}$. Ne consegue che $\frac{1}{8} (\psi(\frac{5}{4}) - \psi(\frac{3}{4})) = \frac{1}{8} (4 - \pi)$.

• 27)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k-1)(k+1)} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left[\frac{4}{4k-1} - \frac{1}{k+1} \right] = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_0^1 4t^{4k-2} dt - \int_0^1 t^k dt \right] = \\
 &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_0^1 4t^2 \frac{1-t^{4n}}{1-t^4} dt - \int_0^1 t \frac{1-t^n}{1-t} dt \right] \\
 &\quad \int_0^1 \left[\frac{4t^2}{1-t^4} - \frac{t}{1-t} \right] = \int_0^1 \left(\frac{-2}{1+t^2} + 1 + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = \frac{-\pi}{2} + 1 + \ln 2 \\
 &\quad \int_0^1 \left[\frac{t^{n+1}}{1-t} - \frac{4t^{4n+2}}{1-t^4} \right] = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1-t} - 4t^{4n+2} \left(\frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{2(1+t^2)} \right) \right) dt \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{4n+2} \left(\frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{2(1+t^2)} \right) dt = 0 \\
 &\quad \frac{t^{n+1}}{1-t} - \frac{4t^{4n+2}}{4(1-t)} = \sum_{k=0}^{3n} t^{k+n+1}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1-t} - \frac{4t^{4n+2}}{4(1-t)} \right) dt = \sum_{k=0}^{3n} \frac{1}{k+n+2} = \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{4n} = \ln(4n) - \ln(n+1) + o(1) \rightarrow 2 \ln 2$$

Sommando si ha $\frac{-\pi}{10} + \frac{1}{5} + \frac{3 \ln 2}{5}$

• 29) Basta scrivere $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$, osservare che $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$ e sommare una serie telescopica

• 30) $\prod_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k} \frac{k}{k+1} \frac{(k+1)^2 - (k+1) + 1}{k^2 - k + 1}$ (prodotto telescopico)

da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{2}{n+1} \frac{n^2 + n + 1}{3} = \frac{2}{3}$

Si può anche scrivere

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=2}^n \ln(k^3 - 1) - \ln(k^3 + 1) = \\
 &= \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln k) + (\ln k - \ln(k+1)) + \ln(k^2 + k + 1) - \ln(k^2 - k + 1) = \\
 &= \ln 1 - \ln n + \ln 2 - \ln(n+1) + \ln(n^2 + n + 1) - \ln 3 \rightarrow \ln 2 - \ln 3
 \end{aligned}$$

• 31) La serie è uguale a

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{-1}{1 + (xyz)^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{-\arctan xy}{xy} = \\
 &= \int_0^1 \frac{-dx}{x} \left([\ln y \arctan xy] \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \ln y}{1 + x^2 y^2} dy \right) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\ln y}{1 + x^2 y^2} = \\
 &= \int_0^1 dy \ln y \frac{\arctan xy}{y} \Big|_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 dy \frac{\ln y}{y} \arctan y = \\
 &= \frac{1}{2} \ln^2 y \arctan y \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy \ln^2 y}{1 + y^2} \underbrace{=}_{y=1/t} \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{-dt \ln^2 t}{1 + t^2} = \frac{-\pi^3}{32}
 \end{aligned}$$

Si poteva pure scrivere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(3)} \int_0^{+\infty} e^{-(2k-1)t} t^2 dt = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^{+\infty} t^2 \frac{-e^{-t}}{e^{2t} + 1} dt =$$

$$\underbrace{=}_{t=\ln y} \frac{1}{\Gamma(3)} \int_1^{+\infty} \frac{-\ln^2 y}{1+y^2} dy = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{-\ln^2 y}{1+y^2} dy$$

32) Scriviamo $a_k = 1/b_k$ ed otteniamo

$$\frac{1}{b_{k+1}} = \frac{1}{b_k^2} \frac{1}{\frac{1}{b_k^2} - \frac{1}{b_k} + 1} \iff b_{k+1} = 1 - b_k + b_k^2 \iff b_{k+1} - 1 = b_k(b_k - 1)$$

ossia

$$\frac{1}{b_{k+1} - 1} = \frac{1}{b_k - 1} - \frac{1}{b_k} \iff \frac{1}{b_k} = \frac{1}{b_k - 1} - \frac{1}{b_{k+1} - 1} \quad (1)$$

Ora

$$b_{k+1} \geq b_k \iff (b_k^2 - 1)^2 \geq 0$$

per cui b_k è non decrescente e quindi converge a $L > 1$. Da (1) segue $L = +\infty$. Inoltre

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{b_k - 1} - \frac{1}{b_{k+1} - 1} = \frac{1}{b_1 - 1} = \frac{a_1}{1 - a_1}$$

33)

$$\frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}}\right)^2}} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \frac{\sqrt{k}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{k}}{2} - \sqrt{\frac{k-1}{2}}\right)$$

quindi

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{n}}{2} \right) = \sqrt{2}$$

34)

$$\frac{1}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt[4]{k+1} + \sqrt[4]{k})} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt[4]{k+1} - \sqrt[4]{k})}{(\sqrt[4]{k+1} + \sqrt[4]{k})(\sqrt[4]{k+1} - \sqrt[4]{k})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt[4]{k+1} - \sqrt[4]{k})}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \sqrt[4]{k+1} - \sqrt[4]{k}$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{a^4 n} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \frac{1}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt[4]{k+1} + \sqrt[4]{k})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} (\sqrt[4]{a^4(n+1)} - \sqrt[4]{n}) = a - 1$$

35)

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m!n!}{(m+n+2)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{(m+n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(m+n+2)!} \right) \frac{m!}{m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m!}{(m+1)(m+1)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

36)

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}k + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

per cui il risultato è uno.

38)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} \beta(n+1, n+1) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} x^n (1-x)^n dx = \int_0^1 \frac{2dx}{1+2x^2-2x} = \pi \end{aligned}$$

Lo scambio fra serie ed integrale è lecito dalla uniforme convergenza della serie $\sum (2x(1-x))^k$ per $0 \leq x \leq 1$ essendo $x(1-x) \leq 1/4$.

40) $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \frac{dx}{\ln x} \cdot \ln x = t$ produce

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1-e^t}{1+e^t} \frac{e^t dt}{t} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{e^{-t}+1} \frac{e^{-t} dt}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} (e^{-(2+k)x} - e^{-(k+1)x}) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \ln \frac{k+1}{k+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \ln \frac{k+1}{k+2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \ln \frac{k+1}{k+2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \sum_{k=1}^n \ln(2k) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) + \ln(2n+1) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-2n \ln 2 - 2 \ln n! + 2 \ln \frac{(2n)!}{2^n n!} + \ln 2 + \ln n \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-2n \ln 2 - 2(n \ln n - n + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{\ln n}{2}) + \right. \\ &\quad \left. + 2(2n \ln(2n) - 2n + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{\ln(2n)}{2}) - 2n \ln 2 + \right. \\ &\quad \left. - 2(n \ln n - n + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \frac{\ln n}{2}) + \ln 2 + \ln n \right] = \ln \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Lo scambio fra integrale e serie è dimostrato nel capitolo sugli integrali.

41)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x(1+x^2)} &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{x(1+x^2)} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x(1+x^2)} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{x(1+x^2)} + \\ &+ \int_0^1 \frac{(\ln(1+x) - \ln x)x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{x} - \int_0^1 x \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \\ &= \frac{5}{4} \frac{\pi^2}{12} = \frac{5\pi^2}{48} \end{aligned}$$

42) Definendo $t = 1/x$ abbiamo $\frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{t2^k t^{2^k-1}}{1+t^{2^k}} = t \frac{d}{dt} \ln(1+t^{2^k})$ per cui $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = t \frac{d}{dt} \ln \prod_{k=0}^{+\infty} (1+t^{2^k}) = t \frac{d}{dt} \ln \frac{1+t}{1-t^2} = \frac{t}{1-t} = \frac{1}{x-1}$. Abbiamo usato $\prod_{k=1}^{+\infty} (1+t^{2^k}) = \frac{1}{1-x^2}$ dimostrato nell'esercizio **11.1.1***

43) La serie è $x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} \ln(1+x^{2^k}) = x \frac{d}{dx} \ln \prod_{k=1}^{+\infty} (1+x^{2^k}) = x \frac{d}{dx} \ln \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x}$

44) $\frac{1}{(m+n)^2} = \int_0^{+\infty} e^{-t(m+n)} t^2 dt$ per cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n \sum_{m=1}^{+\infty} m(-1)^m \int_0^{+\infty} e^{-t(m+n)} t^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{2t} dt}{(e^t + 1)^4} = \frac{\ln 2}{6} - \frac{1}{12}$$

Si integra per parti

45) $(\coth x)^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ e $(\coth(k(4k^2-3)))^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{4k^3-3k+1}{4k^3-3k+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{(k+1)(2k-1)^2}{(k-1)(2k+1)^2}$

che per $k \rightarrow +\infty$ va come $kO(1/k^4)$ e la serie converge

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n [k \ln(k+1) - k \ln(k-1) + 2k \ln(2k-1) - 2k \ln(2k+1)] = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n [k \ln(k+1) - (k-1) \ln k + (k-1) \ln k - k \ln(k-1)] + \\ & + \sum_{k=2}^n [k \ln(2k-1) - (k+1) \ln(2k+1) + \ln(2k+1)] = \\ & = \frac{1}{2} n \ln(n+1) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n ((k+1) \ln k - k \ln(k-1)) - \sum_{k=2}^n \ln k + \\ & + 2 \ln 3 - n \ln(2n-1) + \ln(5 \cdot 7 \cdots (2n+1)) = \\ & = \frac{n \ln n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{n \ln n}{2} + \frac{\ln n}{2} - \ln n! + 2 \ln 3 - n \ln 2 - n \ln n - \frac{1}{2} + \ln \frac{(2n+1)!}{3 \cdot 2^n n!} + o(1) = \\ & = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln n}{2} - \ln n! + 2 \ln 3 - n \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{(2n+1)!}{3 \cdot 2^n n!} + o(1) = \\ & = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln n}{2} - 2 \left[n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{\ln n}{2} \right] + 2 \ln 3 - n \ln 2 + \\ & + \left[2n \ln n + 2n(\ln 2 - 1) + \frac{\ln}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} \right] - \ln 3 - n \ln 2 + o(1) = \ln 3 - \frac{\ln(2\pi)}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{2\pi} \end{aligned}$$

46)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^k - 2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} - 2^{k+1}} = \frac{2}{3-2} = 2$$

47) Usiamo la formula $\frac{a}{1-a^2} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a}$ con $a = x^{2^{k-1}}$ per cui $a^2 = x^{2^k}$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{1-x^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^k}} \right]$$

Se $|x| < 1$ si ha $\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$. Se invece $|x| > 1$ si ha $\frac{1}{1-x}$.

48) Detto $a_k = x^{2^k}$ il termine del prodotto è $\frac{(a_k + 1)^2}{a_k^2 + 1}$ e tenedo conto che $a_k^2 = a_{k+1}$ si ha $(1 + a_k) \frac{a_k + 1}{a_{k+1} + 1}$ e otteniamo

Se $|x| < 1$

$$\prod_{k=0}^{+\infty} (1 + x^{2^k}) \frac{x^{2^k} + 1}{x^{2^{k+1}} + 1} = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + x^{2^k}) \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2^k} + 1}{x^{2^{k+1}} + 1} = \frac{1}{1-x} \frac{x+1}{1} = \frac{x+1}{1-x}$$

Se $|x| > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) \frac{x^{2^k} + 1}{x^{2^{k+1}} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) \frac{x+1}{x^{2^{n+1}} + 1} = \frac{1}{1-x} \frac{x+1}{1} = \frac{x+1}{1-x}$$

$\prod_{k=1}^n (1 + x^{2^k})$ è la somma di termini del tipo x^{2^p} con $p = 1, 2, \dots, N$ e $N = \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$ quindi

$$S_n = \prod_{k=1}^n (1 + x^{2^k}) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2(2^n - 1)} = 1 + x^2 S_n - x^{2(2^n - 1)} \implies S_n = \frac{1 - x^{2^{n+1} - 2}}{1 - x^2}$$

da cui

$$\prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) \frac{x+1}{x^{2^{n+1}} + 1} = (1+x) \frac{1 - x^{2^{n+1} - 2}}{1 - x^2} \frac{x+1}{x^{2^{n+1}} + 1} \rightarrow \frac{x+1}{x-1}$$

49) Sia $|x| < 1$. Detto $a_k = x^{3^k}$ il termine del prodotto è $1 + a + a^2 = \frac{(a^2 + a + 1)(a - 1)}{a - 1} = \frac{a^3 - 1}{a - 1}$ e tenedo conto che $a_k^3 = a_{k+1}$ si ha $\frac{a_{k+1} - 1}{a_k - 1}$ e otteniamo ($|x| < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - 1}{a_k - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} - 1}{a_1 - 1} = \frac{-1}{x^3 - 1} = \frac{1}{1 - x^3}$$

Se $x = 1$ l'argomento vale sempre 3 per cui il risultato è $+\infty$. Se $x = -1$ l'argomento vale sempre 1 per cui il risultato è 1. Se $|x| > 1$ il risultato è $+\infty$.

50) Definiamo $b_n = a_n/n$. $b_1 = 1$, $b_{n+1} = nb_n + 1$ e per induzione $b_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}$ da cui

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left[\frac{a_k + 1}{a_k} \right] &= \frac{1+1}{1} \frac{1 + \sum_{k=0}^1 \frac{2!}{k!}}{\sum_{k=0}^1 \frac{2!}{k!}} \frac{1 + \sum_{k=0}^2 \frac{3!}{k!}}{\sum_{k=0}^2 \frac{3!}{k!}} \frac{1 + \sum_{k=0}^3 \frac{4!}{k!}}{\sum_{k=0}^3 \frac{4!}{k!}} \dots \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{k!}}{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{k!}} \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}} = \\ &= \frac{1+1}{1} \frac{1 + \sum_{k=0}^1 \frac{2!}{k!}}{2(1+1)} \frac{1 + \sum_{k=0}^2 \frac{3!}{k!}}{3 \left(1 + \sum_{k=0}^1 \frac{2!}{k!} \right)} \frac{1 + \sum_{k=0}^3 \frac{4!}{k!}}{4 \left(1 + \sum_{k=0}^2 \frac{3!}{k!} \right)} \dots \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{k!}}{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{k!}} \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}}{n! \left(1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{k!} \right)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \rightarrow e \end{aligned}$$

$$51) \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2^n} \text{ da cui}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{2^{n-1}} - \sin \frac{1}{2^n} \right) = \frac{\sin 1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sin \frac{2}{2^N} = \frac{\sin 1}{2}$$

52)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \right] = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

53)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+m-1)} - \frac{1}{(n+1) \cdots (n+m)} = \frac{1}{mm!}$$

54)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n!2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}} - \frac{1}{n!2^n} = 1$$

55) $a_{n+1} = a_n^2 + 1 - a_n \geq 2a_n - a_n = a_n$ e l'uguaglianza si ha solo per $a_n = 1$. È facile vedere per induzione che se $a_1 = 1 + x$, allora $a_n > 1 + x + (n-1)x^2$ da cui $a_n \rightarrow +\infty$ e quindi $\sum 1/a_n < +\infty$. Poi scriviamo $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$ se e solo se $\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$ da

$$\text{cui } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_1 - 1}$$

56) Definiamo $d_k = 1/a_k$. La serie diventa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1(1+bd_1)d_{n+1}}{(1+bd_1) \cdots (1+bd_{n+1})} &= \frac{a_1+b}{b} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(1+bd_1) \cdots (1+bd_n)} - \frac{1}{(1+bd_2) \cdots (1+bd_{n+1})} \right] = \\ &= \frac{a_1+b}{b} \frac{a_1}{a_1+b} = \frac{a_1}{b} \end{aligned}$$

in quanto $(1+bd_2) \cdots (1+bd_{n+1}) > b \sum_{k=2}^n d_k \rightarrow +\infty$

57)

$$\sum_{k=0}^n 3^k \sin^3 \frac{x}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^n 3^k \frac{1}{4} \left[3 \sin \frac{x}{3^{k+1}} - \sin \frac{x}{3^k} \right] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \left[3^{k+1} \sin \frac{x}{3^{k+1}} - 3^k \sin \frac{x}{3^k} \right] \rightarrow \frac{x - \sin x}{4}$$

$$58) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin^3(3^{k-1}x)}{3^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3 \sin(3^{k-1}x) - \sin(3^k x)}{3^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(3^{k-1}x)}{3^{k-1}} - \frac{\sin(3^k x)}{3^k} \rightarrow \frac{3}{4} \sin \frac{x}{3}$$

59) Sappiamo che

$$\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy} + \pi \frac{x}{|x|} \text{ se } \pm xy > 1.$$

$$\arctan x \pm \arctan y = \arctan \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \text{ se } \pm xy < 1.$$

$$\arctan x \pm \arctan y = \frac{\pi}{2} \frac{x}{|x|} \text{ se } \pm xy = 1$$

$$\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} = \frac{\frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1}}{1 + \frac{1}{n^2 - n + 1} \frac{1}{n^2 + n + 1}} \implies \arctan \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} = \arctan \frac{1}{n^2 - n + 1} - \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

ed essendo $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} = \arctan \frac{1}{n^2 - n + 1} \Big|_{n=0} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}$$

60)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!(n^4 + n + 1)} &= \frac{1}{2nn!} \left[\frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{nn!} \frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \frac{1}{n^2 + n + 1} \right] + \frac{1}{n^2 + n + 1} \left[\frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{nn!} \frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \frac{1}{n^2 + n + 1} \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + n + 1} \frac{-n^2 - n - 1}{n(n+1)(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{nn!} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)n!}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n^4 + n^2 + 1)} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n^4 + n^2 + 1)} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{nn!} \frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \frac{1}{n^2 + n + 1} \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{nn!} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n!} \end{aligned}$$

Sapendo che $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$ abbiamo

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 1 + \frac{e-2}{2} = \frac{e}{2}$$

$$61) \arctan \frac{2}{(k-1)^2} - \arctan \frac{2}{(k+1)^2} = \arctan \frac{\frac{2}{(k-1)^2} - \frac{2}{(k+1)^2}}{1 + \frac{2}{(k-1)^2} \frac{2}{(k+1)^2}} = \arctan \frac{8k}{k^2 - 2k + 5} \text{ per cui}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{8k}{k^2 - 2k + 5} &= \arctan 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{8k}{k^2 - 2k + 5} = \\ &+ \arctan 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{(k-1)^2} - \arctan \frac{2}{(k+1)^2} = \\ &= \arctan 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{(k-1)^2} - \arctan \frac{2}{k^2} + \arctan \frac{2}{k^2} - \arctan \frac{2}{(k+1)^2} = \\ &= \arctan 2 + \arctan 2 + \arctan 1/2 = \arctan 2 + \pi/2 \end{aligned}$$

$$62) \sin^4 x = \sin^2 x (1 - \cos^2 x) = \sin^2 x - (\sin^2(2x))/4, \text{ da cui}$$

$$\sum_{k=1}^n 2^{2k} \sin^4 \frac{x}{2^k} = \sum_{k=1}^n 2^{2k} \sin^2 \frac{x}{2^k} - 2^{2k-2} \sin^2 \frac{x}{2^{k-1}} = 2^{2n} \sin^2 \frac{x}{2^n} - \sin^2 x \rightarrow x^2 - \sin^2 x$$

$$63) \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4 \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2(2x)} = \frac{4}{\sin^2(2x)} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2^k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} \left[\frac{4}{\sin^2 \frac{x}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2^k}} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{2^{-2(k-1)}}{\sin^2 \frac{x}{2^{k-1}}} - \frac{2^{-2k}}{\sin^2 \frac{x}{2^k}} \right] = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2^{-2n}}{\sin^2 \frac{x}{2^n}}$$

e per $n \rightarrow +\infty$ si ha $1/\sin^2 x - 1/x^2$.

$$64) \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \implies \tan x = \cot x - 2 \cot(2x)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \left(\cot \frac{x}{2^k} - 2 \cot \frac{x}{2^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^k} \cot \frac{x}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{x}{2^{k+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - 2 \cot(2x) \rightarrow \frac{1}{x} - 2 \cot(2x) \end{aligned}$$

$$65) \text{ Siano } a_k, b_k, k = 1, \dots, n \text{ reali e } p_n(a_k, b_k) = \prod_{k=1}^n (a_k + ib_k). \text{ Arg}(p_n) = \sum_{k=1}^n \left[\arctan \frac{b_k}{a_k} + \pi \frac{|a_k| - a_k}{2a_k} \right]$$

se $a_k \neq 0$. Se $a_k = 0$ e $b_k > 0$ abbiamo $\pi/2$ e $-\pi/2$ se $a_k = 0$ e $b_k < 0$. Utilizziamo la

$$\text{relazione } \sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{z^2}{k^2} \right] \text{ per scrivere } \sin(\pi z) = \pi(x + iy) \underbrace{\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 - x^2 + y^2 - 2ixy}{k^2}}_{Q(x,y)}$$

e $\text{Arg}Q(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-2xy}{k^2 - x^2 + y^2} + \Delta_k(x, y) \right)$ e $\Delta_k(x, y)$ vale uno dei tre valori $0, \pi, \pm\pi/2$ a seconda che $k^2 - x^2 + y^2$ sia positivo, negativo, nullo.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} &= \frac{x - iy}{\pi(x^2 + y^2)} [\sin(\pi x) \cosh(\pi y) + i \cos(\pi x) \sinh(\pi y)] = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}} [x \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + y \cos(\pi x) \sinh(\pi y) + i(x \cos(\pi x) \sinh(\pi y) - y \sin(\pi x) \cosh(\pi y))] \end{aligned}$$

il cui argomento a meno di multipli di π è

$$\begin{aligned} \arctan \frac{x \cos(\pi x) \sinh(\pi y) - y \sin(\pi x) \cosh(\pi y)}{x \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + y \cos(\pi x) \sinh(\pi y)} &= \arctan \frac{\frac{x}{y} - \tan(\pi x) \coth(\pi y)}{1 + \frac{x}{y} \tan(\pi x) \coth(\pi y)} = \\ &= \arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{\tan(\pi x)}{\tanh(\pi y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{-2xy}{k^2 - x^2 + y^2} &= \arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{\tan(\pi x)}{\tanh(\pi y)} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{2xy}{k^2 - x^2 + y^2} = \\ &= \arctan \frac{y}{x} - \arctan \frac{\tanh(\pi y)}{\tan(\pi x)} \end{aligned}$$

Il caso speciale $x = y = 1$ si può risolvere osservando che $\frac{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k-1} \frac{1}{k+1}} = \frac{2}{k^2}$ per cui

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{k^2} &= \arctan 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k+1} = \\ &= \arctan 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\arctan \frac{1}{k-1} - \arctan \frac{1}{k} \right] + \left[\arctan \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k+1} \right] = \\ &= \arctan 2 + \arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} = \arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Il caso $x = y = 1/\sqrt{2}$ diventa $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\tan(\pi/\sqrt{2})}{\tanh(\pi/\sqrt{2})}$

Il caso $x = y = 1/2$ e ponendo $\tan(\pi/2) = +\infty$ si ha $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi}{4}$

66)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{(1-a)a^n x}{1+a^{2n+1}x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan a^n x - \arctan a^{n+1} x = \arctan x - \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan a^{n+1} x = \arctan x$$

67)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \frac{(a-1)a^n x}{1+a^{2n+1}x^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan a^{n+1} x - \arctan a^n x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan a^{n+1} x - \arctan x = \\ &= \pi/2 - \arctan x \end{aligned}$$

68) 4/5 Derivare rispetto ad a in 66) e poi calcolare per $a = 1/2$.

69)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k+1} = \frac{\pi}{4} - \lim_{k \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{k+1} = \frac{\pi}{4}$$

70) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3 \cos x)$ e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos^3 3^k x}{3^k} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} \cos 3^{k+1} x + \frac{(-1)^k}{3^{k-1}} \cos 3^k x = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{2k}}{3^{2k}} \cos 3^{2k+1} x + \frac{(-1)^{2k}}{3^{2k-1}} \cos 3^{2k} x + \frac{(-1)^{2k+1}}{3^{2k+1}} \cos 3^{2k+2} x + \frac{(-1)^{2k+1}}{3^{2k+1-1}} \cos 3^{2k+1} x \right] = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{\cos 3^{2k} x}{3^{2k-1}} - \frac{\cos 3^{2k+2} x}{3^{2k+1}} \right] = \frac{3 \cos x}{4} \end{aligned}$$

71) Bisogna verificare che

$$\begin{aligned} \frac{\frac{k+1}{1+(k+1)^2} - \frac{k-1}{1+(k-1)^2}}{1 + \frac{k+1}{1+(k+1)^2} \frac{k-1}{1+(k-1)^2}} &= \frac{(k+1) + (k+1)(k-1)^2 - (k-1) - (k-1)(k+1)^2}{(1 + (k+1)^2)(1 + (k-1)^2) + k^2 - 1} = \\ &= \frac{2 + (k^2 - 1)(-2)}{(2 + k^2 + 2k)(2 + k^2 - 2k) + k^2 - 1} = \frac{-2k^2 + 4}{4 + k^4 + 4k^2 - 4k^2 + k^2 - 1} = \frac{4 - 2k^2}{k^4 + k^2 + 3} \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{4 - 2k^2}{k^4 + k^2 + 3} &= \sum_{k=1}^n \arctan \frac{k+1}{1 + (k+1)^2} - \arctan \frac{k-1}{1 + (k-1)^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \arctan \frac{k+1}{1 + (k+1)^2} - \arctan \frac{k}{1 + k^2} + \arctan \frac{k}{1 + k^2} - \arctan \frac{k-1}{1 + (k-1)^2} = \\ &= \arctan \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} - \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{n}{1 + n^2} = \arctan \frac{\frac{n+1}{1+(n+1)^2} + \frac{n}{1+n^2}}{1 - \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \frac{n}{1+n^2}} - \arctan \frac{1}{2} = \\ &= \arctan \frac{3n + 2n^3 + 1 + 3n^2}{2 + 2n^2 + n^4 + n + 2n^3} - \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{\frac{3n+2n^3+1+3n^2}{2+2n^2+n^4+n+2n^3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3n+2n^3+1+3n^2}{2+2n^2+n^4+n+2n^3} \frac{1}{2}} = \\ &= \arctan \frac{-n^4 + 2n^3 + 4n^2 - 5n}{2n^4 + 6n^3 + 7n^2 + 5n + 5} \rightarrow -\arctan \frac{1}{2} \end{aligned}$$

72)

$$\frac{-1 + q_k}{1 + q_k} = \frac{-3k^2 + 1 - k^4}{-k^2 + 7 + k^4} \iff q_k = \frac{4 - 2k^2}{k^4 + k^2 + 3}$$

quindi

$$\begin{aligned} \arctan \frac{-3k^2 + 1 - k^4}{-k^2 + 7 + k^4} &= \arctan \frac{-1 + q_k}{1 + q_k} = \arctan(-1) + \arctan q_k = \\ &= \frac{-\pi}{4} + \arctan \frac{k+1}{1 + (k+1)^2} - \arctan \frac{k-1}{1 + (k-1)^2} = \\ &= \frac{-\pi}{4} + \arctan \frac{k+1}{1 + (k+1)^2} - \arctan \frac{k}{1 + k^2} + \arctan \frac{k}{1 + k^2} - \arctan \frac{k-1}{1 + (k-1)^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{-3k^2 + 1 - k^4}{-k^2 + 7 + k^4} &= \frac{-n\pi}{4} + \arctan \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} - \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{n}{1 + n^2} = \\ &= \frac{-n\pi}{4} + \arctan \frac{3n + 2n^3 + 1 + 3n^2}{2 + 2n^2 + n^4 + n + 2n^3} - \arctan \frac{1}{2} = \frac{-n\pi}{4} + \arctan \frac{-n(-5 - 2n^2 - 4n + n^3)}{5 + 7n^2 + 2n^4 + 5n + 6n^3} \end{aligned}$$

$$\text{e quindi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan \left(\sum_{k=1}^{4n} \arctan \frac{-3k^2 + 1 - k^4}{-k^2 + 7 + k^4} \right) = \frac{-1}{2}$$

73) Sia $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-2nx} - e^{-\pi k^2 x^2}) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$. Chiaramente la serie converge per ogni valore di x e $f(0) = 0$

1) $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$. Hardy usa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2kx} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + k^2 \pi^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 x^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 / x^2}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + k^2 \pi^2} - \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 / x^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2 \pi^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 / x^2} \leq \frac{1}{e\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6e}$$

quindi $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$. Essendo la serie uniformemente convergente per $x \geq \alpha > 0$ per ogni α , segue che $f(x): [0, +\infty)$ è continua.

Poi Hardy definisce $F(a) = \int_0^{+\infty} x^a f(x) dx$ e l'integrale è uniformemente convergente per $0 \leq a \leq a_0$ grazie al fatto che $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$ e $f(x) = O(e^{-2x}/(1 - e^{-2x})) = O(e^{-2x})$ per $x \rightarrow +\infty$. Ne segue che $F(a)$ è continua per $a = 0$. Cambiando variabili nel secondo contributo all'interno dell'integrale $F(a)$ possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} x^a \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2kx} dx = 2^{-1-a} \Gamma(1+a) \zeta(1+a)$$

$$\int_0^{+\infty} x^a \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \pi^{-(1+a)/2} \Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right) \zeta(1+a)$$

$$\Gamma(1+a) = 1 - \gamma a + \dots, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{a(\gamma + 2 \ln 2)}{2} + \dots\right), \quad a \zeta(1+a) = 1 + \gamma a + \dots$$

$$\text{e quindi } \lim_{a \rightarrow 0^+} F(a) = (\ln \pi - \gamma)/4$$

Chiaramente il risultato non può essere ottenuto integrando termine a termine in quanto

$$\int_0^{+\infty} f_k(x) dx = \int_0^{+\infty} (e^{-2kx} - e^{-\pi k^2 x^2}) dx = 0.$$

Se avessimo stabilito dall'inizio che $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) > 0$ avremmo da subito evidenziato che l'integrazione termine a termine non è consentita.

Infatti per ogni $n \geq 1$, $e^{-2nx} \geq e^{-\pi k^2 x^2}$ se $x \geq 2/\pi$ e quindi ci concentriamo su $x < 2/\pi$.

$$f(x)/x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2 \pi^2} - \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi k^2 / x^2}. \text{ La funzione } \frac{1}{x^2} e^{-\pi k^2 / x^2} \text{ cresce fino a } k\sqrt{\pi} \text{ e poi}$$

decresce e $k\sqrt{\pi} > 1 > 2/\pi$. $\frac{1}{x^2 + k^2 \pi^2}$ decresce sempre. Quindi la funzione $\frac{1}{x^2 + k^2 \pi^2} -$

$\frac{1}{x^2}e^{-\pi k^2/x^2}$ decresce fino a $2/\pi$ partendo dal valore $1/(k^2\pi^2)$. Non può diventare negativa per ch  altrimenti dovrebbe crescere in un sottointervallo di $[0, 2/\pi]$ e questo   impossibile.

  facile osservare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}(e^{-2kx} - e^{-\pi k^2 x^2})$   uniformemente convergente per $x \geq \alpha > 0$

e che $\int_{\alpha}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty}(e^{-2kx} - e^{-\pi k^2 x^2})dx$ converge. Sono verificate le condizioni dell'esercizio sugli integrali rich.53 e quindi si pu  scrivere $\int_{\alpha}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty}(e^{-2kx} - e^{-\pi k^2 x^2})dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} (e^{-2kx} - e^{-\pi k^2 x^2})dx$

Lo stesso fenomeno di convergenza non uniforme si riscontra nel calcolo

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (ae^{-kax} - be^{-kbx})dx = \int_0^{+\infty} \left[\frac{a}{e^{ax} - 1} - \frac{b}{e^{bx} - 1} \right] dx = \ln \frac{b}{a}$$

ma

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (ae^{-kax} - be^{-kbx})dx = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

e la ragione   la mancata uniforme convergenza in $x = 0$; fenomeno riscontrabile nelle relazioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\delta}^{+\infty} (ae^{-kax} - be^{-kbx})dx = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-ka\delta} - e^{-kb\delta}}{k} = \ln \frac{1 - e^{-a\delta}}{1 - e^{-b\delta}}$$

$$\int_0^{\delta} \left[\frac{a}{e^{ax} - 1} - \frac{b}{e^{bx} - 1} \right] dx = \ln \frac{1 - e^{-a\delta}}{1 - e^{-b\delta}} - \ln \frac{a}{b}$$

74) Ripercorriamo quanto fatto in [B] partendo dalla formula $f(z) = f(0)e^{\frac{zf'(0)}{f(0)}} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{z}{z_k})e^{\frac{z}{z_k}}$.

Prendiamo $f(z) = \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z}$ per $z \neq 0$ e $f(0) = \pi/2$ e quindi

$$f(z) = \frac{\pi}{2} \prod_{\substack{k=-\infty \\ z \neq 0}}^{+\infty} (1 - \frac{z}{2k})e^{\frac{z}{2k}} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{4k^2})$$

$$g(z) = \cos \frac{\pi z}{2} = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - \frac{z}{2k+1})e^{\frac{z}{2k+1}} = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2})$$

$$\frac{\tan \frac{\pi z}{2}}{z} = \frac{\pi}{2} \prod_{\substack{k=-\infty \\ z \neq 0}}^{+\infty} (1 - \frac{z}{2k})e^{\frac{z}{2k}} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - \frac{z}{2k+1})^{-1}e^{\frac{-z}{2k+1}} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{4k^2}) \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2})^{-1}$$

$$\begin{aligned} \ln \tan \frac{\pi z}{2} &= \ln \frac{\pi z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{z^2}{(2k)^2}) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2}) = \ln \frac{\pi z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln(1 - \frac{z^2}{k^2}) = \\ &= \ln \frac{\pi z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln(\frac{k^2 - x^2 + y^2 - 2ixy}{k^2}) \end{aligned}$$

Sia ora $z = x + iy$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\text{Ln}z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x} + i\Delta_1(x, y)$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{\cos \frac{\pi z}{2}} &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x) \cosh(\frac{\pi}{2}y) + i \cos(\frac{\pi}{2}x) \sinh(\frac{\pi}{2}y)}{\cos(\frac{\pi}{2}x) \cosh(\frac{\pi}{2}y) - i \sin(\frac{\pi}{2}x) \sinh(\frac{\pi}{2}y)} = \frac{\frac{1}{2} \sin(\pi x) + i \frac{1}{2} \sinh(\pi y)}{\left(\cos \frac{\pi x}{2} \cosh \frac{\pi x}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi x}{2} \sinh \frac{\pi x}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}}{\left(\cos \frac{\pi x}{2} \cosh \frac{\pi x}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi x}{2} \sinh \frac{\pi x}{2}\right)^2} e^{i \arctan \frac{\sinh(\pi y)}{\sin(\pi x)} + i\Delta_2(x, y)} \end{aligned}$$

Prendiamo $x = y > 0$

$$\arctan \frac{\sinh(\pi x)}{\sin(\pi x)} + \Delta_2(x, x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \arctan \frac{-2x^2}{k^2}$$

Per avere $\Delta_2(x, x) = 0$ dobbiamo avere $\sin(\pi x) > 0$ e quindi prendiamo $0 < x < 1$ e infatti **Maple dice che per $x = 3/2$ l'uguaglianza si ha per $\Delta_2(x, x) = \pi$ mentre per $x = 1/2$ oppure $x = 5/2$ si ha $\Delta_2(x, x) = 0$.**

Si può anche ragionare così ma poi ci sono problemi nella definizione dei vari $\Delta_i(x, y)$ e $\Delta(k, x, y)$.

$$\begin{aligned} \text{Ln} \tan \frac{\pi z}{2} &= \text{Ln} \frac{\pi z}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \text{Ln}(1 - \frac{z}{2k}) + \frac{z}{2k} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Ln}(1 - \frac{z}{2k+1}) - \frac{z}{2k+1} = \\ &= \text{Ln} \frac{\pi z}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \text{Ln}(1 + \frac{z}{2k}) + \frac{-z}{2k} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Ln}(1 + \frac{z}{2k-1}) + \frac{z}{2k-1} = \\ &= \text{Ln} \frac{\pi z}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \left(\text{Ln}(1 + \frac{z}{k}) - \frac{z}{k} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Sia ora $z = x + iy$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\text{Ln}(1 + \frac{z}{k}) = \text{Ln}(k + x + iy) - \ln k$, $\text{Ln}z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x} + i\Delta_1(x, y)$, $\text{Ln}(k + x + iy) = \frac{1}{2} \ln(k^2 + x^2 + y^2 + 2kx) + i \arctan \frac{y}{k+x} + i\Delta(x, y, k)$. Separando parte reale e immaginaria si ha

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{\cos \frac{\pi z}{2}} &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x) \cosh(\frac{\pi}{2}y) + i \cos(\frac{\pi}{2}x) \sinh(\frac{\pi}{2}y)}{\cos(\frac{\pi}{2}x) \cosh(\frac{\pi}{2}y) - i \sin(\frac{\pi}{2}x) \sinh(\frac{\pi}{2}y)} = \frac{\frac{1}{2} \sin(\pi x) + i \frac{1}{2} \sinh(\pi y)}{\left(\cos \frac{\pi x}{2} \cosh \frac{\pi x}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi x}{2} \sinh \frac{\pi x}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}}{\left(\cos \frac{\pi x}{2} \cosh \frac{\pi x}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi x}{2} \sinh \frac{\pi x}{2}\right)^2} e^{i \arctan \frac{\sinh(\pi y)}{\sin(\pi x)} + i\Delta_2(x, y)} \end{aligned}$$

$\Delta_i(x, y)$, $\Delta(k, x, y)$, $i = 1, 2$ tengono conto del segno della parte reale. L'equazione (1) diventa per la parte immaginaria

$$\begin{aligned} \arctan \frac{\sinh(\pi y)}{\sin(\pi x)} + \Delta_2(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} + \Delta_1(x, y) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \left(\arctan \frac{y}{k+x} + \Delta(k, x, y) - \frac{y}{k} \right) = \\ &= \arctan \frac{y}{x} + \Delta_1(x, y) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \left(\arctan \frac{y}{k+x} + \Delta(k, x, y) \right) \end{aligned}$$

Ora [B] scrive

$$\arctan \frac{\sinh(\pi y)}{\sin(\pi x)} = \arctan \frac{y}{x} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \arctan \frac{y}{k+x}$$

e prende $x = y$

$$\arctan \frac{\sinh(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \arctan \frac{x}{k+x} = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \arctan \frac{2x^2}{k^2}$$

75) Se $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \coth 2^{n-1}x - \coth 2^n x &= \frac{\cosh 2^{n-1}x}{\sinh 2^{n-1}x} - \frac{\cosh 2^n x}{\sinh 2^n x} = \\ &= \frac{e^{2^{n-1}x} + e^{-2^{n-1}x}}{e^{2^{n-1}x} - e^{-2^{n-1}x}} - \frac{e^{2^n x} + e^{-2^n x}}{e^{2^n x} - e^{-2^n x}} = \\ &= \frac{e^{3 \cdot 2^{n-1}x} + e^{-2^{n-1}x} - e^{-2^{n-1}x} - e^{-3 \cdot 2^{n-1}x} - e^{3 \cdot 2^{n-1}x} - e^{-2^{n-1}x} + e^{2^{n-1}x} + e^{-3 \cdot 2^{n-1}x}}{(e^{2^{n-1}x} - e^{-2^{n-1}x})(e^{2^n x} - e^{-2^n x})} = \\ &= \frac{1}{e^{2^n x} - e^{-2^n x}} = \frac{1}{2 \sinh 2^n x} \end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh 2^n} = \frac{\cosh x}{\sinh x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh 2^n x}{\sinh 2^n x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} - 1$$

2.8.2

$$F(x) + G(x) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} f(x, 2k) = 2\nu \sum_{k=1}^{+\infty} f(\lambda(x), k) = 2\nu F(\lambda(x)) \quad F(x) = 2\nu F(\lambda(x)) - G(x)$$

$$2\nu F(\lambda(x)) = 2\nu \cdot 2\nu F(\lambda \circ \lambda(x)) - 2\nu G(\lambda(x)) - G(x)$$

per cui

$$F(x) = (2\nu)^2 F(\lambda \circ \lambda(x)) - 2\nu G(\lambda(x)) - G(x) \implies F(x) = (2\nu)^n F(\lambda^{[n]}(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} (2\nu)^j G(\lambda^{[j]}(x))$$

3.8.2 Sappiamo che

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a) \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}$$

Dalla soluzione di rich.26 otteniamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a \sinh(\pi a)} \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{2a \sin(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}$$

Detta $f(a, k) = \frac{1}{a^2 + k^2}$ si ha $f(a, 2k) = \frac{1}{a^2 + 4k^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{a^2}{4} + k^2} = \frac{1}{4} f(a/2, k)$ per cui $\nu = 1/4$,

$\lambda(a) = a/2$. La formula $F(x) = (2\nu)^n F(\lambda^{[n]}(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} (2\nu)^j G(\lambda^{[j]}(x))$ diventa

$$F(a) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{-2n}a^2 + k^2} - \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{-2j}a^2 + k^2}$$

quindi mandando $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} = - \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} \left[\frac{\pi}{2a 2^{-j} \sinh(\pi a 2^{-j})} - \frac{1}{2a^2 2^{-2j}} \right]$$

Poi $a = y/\pi$

$$\frac{\pi^2}{2y} \coth y - \frac{\pi^2}{2y^2} = - \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{\pi^2}{2y \sinh(y 2^{-j})} - \frac{2^j \pi^2}{2y^2} \right] \iff y \coth y - 1 = - \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{y}{\sinh(y 2^{-j})} - 2^j \right]$$

4.8.2 Prendiamo $\nu = 1$ e $\lambda(x) = x/2$ e otteniamo

$$F(x) = (2\nu)^n F(\lambda^{[n]}(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} (2\nu)^j G(\lambda^{[j]}(x)) = 2^n F\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j G\left(\frac{x}{2^j}\right)$$

da cui

$$F(2^n x) = 2^n F(x) - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j G(2^{n-j} x) \iff F(2^n x) = 2^n F(x) - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j G(2^{n-j} x)$$

e quindi

$$F(2^n x) = 2^n F(x) - 2^n \sum_{j=1}^n 2^{-j} G(2^j x) \iff F(x) = 2^{-n} F(2^n x) + \sum_{j=1}^n 2^{-j} G(2^j x)$$

e se $F(x)$ è limitata mandando $n \rightarrow +\infty$ si ha $F(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} G(2^j x)$

5.8.2 Applichiamo il corollario con $n = 1$ della relazione $F(x) = 2^{-n} F(2^n x) + \sum_{j=1}^n 2^{-j} G(2^j x)$

e otteniamo ($0 < x < \pi$)

$$\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\tanh x}{\tan x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\tanh(2x)}{\tan(2x)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\sinh x}{\sin x} \right]$$

ossia

$$2 \arctan \frac{\tanh x}{\tan x} = \arctan \frac{\tanh(2x)}{\tan(2x)} + \arctan \frac{\sinh x}{\sin x}$$

Per n generico si ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \arctan \frac{\sinh(2^k x)}{\sin(2^k x)} = \arctan \frac{\tanh x}{\tan x} - \frac{1}{2^n} \arctan \frac{\tanh(2^n x)}{\tan(2^n x)}$$

e mandando $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \arctan \frac{\sinh(2^k x)}{\sin(2^k x)} = \arctan \frac{\tanh x}{\tan x}$$

6.8.2 Si osservi che $\frac{a+b}{r^3} - \frac{b}{r^2} \frac{1}{r} - \frac{a}{r} \frac{1}{r^2} = 0$, $\frac{a+2b}{r^4} - \frac{a+b}{r^2} \frac{1}{r^2} - \frac{b}{r^2} \frac{1}{r^2} = 0$, $\frac{2a+3b}{r^5} - \frac{a+2b}{r^4} \frac{1}{r} - \frac{a+b}{r^3} \frac{1}{r^2} = 0$. Detta allora $S = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a+b}{x^3} + \frac{a+2b}{x^4} + \frac{2a+3b}{x^5} + \frac{4a+5b}{x^6} + \frac{6a+8b}{x^7} + \dots$ si ha $S(1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}) = \frac{a}{r} + \frac{b-a}{r^2}$ da cui $S = \frac{a(r-1)+b}{r(r-1)-1}$

7.8.2
$$\sum_{n=1}^{2^N} \left(\frac{1}{n} - f(n) \right) \geq \int_1^{2^N+1} \frac{dx}{x} - \sum_{n=1}^N \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \geq \ln(2^N+1) - \frac{N}{2} \rightarrow +\infty$$

8.8.2

- Dalla definizione di limite superiore si ha che $\inf_n \sup_{k>n} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l < 1$. Sia $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{k>n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ e quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : l \leq A_{n_\varepsilon} < l + \varepsilon$. Poiché $l < 1$, ε si può prendere così piccolo che $l + \varepsilon < 1$ e quindi $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < l + \varepsilon < 1$ per ogni $k > n_\varepsilon$. Come conseguenza si ha $\left| \frac{a_{k+n}}{a_k} \right| = \left| \frac{a_{k+n}}{a_{k+n-1}} \frac{a_{k+n-1}}{a_{k+n-2}} \dots \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq (l+\varepsilon)^n$ e quindi $|a_{k+n}| \leq (l+\varepsilon)^n |a_k|$. La serie converge per confronto con una serie geometrica convergente.

- Con lo stesso ragionamento si ottiene $|a_{k+n}| \geq |a_k|$ per ogni $n \geq n_0 - k$ e quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

- Sia $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l > 1$ e quindi $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq l - \varepsilon > 1$ per ogni $k > k_\varepsilon$ e di nuovo ne segue la violazione della condizione necessaria per la convergenza.

- Sia ora $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l > 1$. Rispetto a prima ora abbiamo che *frequentemente* si ha $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$ ma da questo *non segue* che la serie non converge. Se infatti $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l > 1$ allora la serie diverge. Si può però dare un esempio di serie convergente per cui $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ non esiste e $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l > 1$. L'esempio è preso [da W.Rudin *Principles of Mathematical Analysis* pag. 67 MacGraw Hill Book-Company 1964]

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$ e si ha $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k = 0$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^k = +\infty$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (2^{-k})^{1/(2k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (3^{-k})^{1/(2k)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- Se $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ significa che definitivamente si ha $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq l > 1$ e quindi $\left| \frac{a_{k+n}}{a_k} \right| = \left| \frac{a_{k+n}}{a_{k+n-1}} \frac{a_{k+n-1}}{a_{k+n-2}} \dots \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq l^n$ per $k \geq k_0$ e quindi si ha divergenza.

- Se $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ non si può trarre conclusione. Infatti se si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ allora $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ e convergenza. Viceversa la serie $1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \dots$ diverge e $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}$.

Chiaramente la precedente serie ha $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ perché altrimenti convergerebbe.

- Sia $\overline{\lim} |a_k|^{1/k} = l < 1$ e quindi per ogni k grande abbastanza si ha $|a_k| \leq (l + \varepsilon)^k$ con $l + \varepsilon < 1$. La serie converge per confronto con la serie geometrica.
- Sia $\overline{\lim} |a_k|^{1/k} = l > 1$ e quindi, frequentemente si ha $|a_k| \geq 1$ da cui la violazione della condizione necessaria di convergenza.

9.8.2 1) Prima dimostrazione Sia $L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ e supponiamo che L è finito. Per definizione sappiamo che $k > k_\varepsilon \Rightarrow a_k(L - \varepsilon) < a_{k+1} < (L + \varepsilon)a_k$ da cui segue $a_{n-1}(L - \varepsilon)^2 < a_{n+1} < (L + \varepsilon)^2 a_{n-1}$ con $n - 1 > k_\varepsilon$ e quindi $a_{k_\varepsilon}(L - \varepsilon)^{n-k_\varepsilon} < a_n < (L + \varepsilon)^{n-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon}$ che è come dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k^{1/k} = L$ in quanto possiamo scrivere $a_{k_\varepsilon}^{1/n}(L - \varepsilon)^{1-\frac{k_\varepsilon}{n}} < a_n^{1/n} < (L + \varepsilon)^{1-\frac{k_\varepsilon}{n}} a_{k_\varepsilon}^{1/n}$.

Se $L - \varepsilon < 0$ si scrive $0 < a_n < (L + \varepsilon)^{n-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon}$ e il discorso continua a valere.

Se $L = +\infty$ allora $k > k_\varepsilon \Rightarrow a_{k+1} > M a_k$ e quindi $a_n > M^{n-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon}$ da cui $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k^{1/k} = +\infty$.

Seconda dimostrazione Prendiamo il logaritmo ed otteniamo che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = L$,

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = L$. Sappiamo che se $c_n \rightarrow L$ (anche infinito) allora $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \rightarrow L$. Sia ora

data la successione $b_k \doteq \{a_{k+1} - a_k\}$ e supponiamo che $b_k \rightarrow L$. Allora $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = \frac{1}{n} (a_{n+1} - a_1) \rightarrow L$.

Naturalmente se esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k^{1/k}$ non è detto che esista $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Si prenda la successione

$$a_k = \begin{cases} 1 & k \neq n^2 \\ 1/2 & k = n^2 \end{cases}$$

- Sia $L = \overline{\lim} a_k^{1/k}$ e quindi $L = \inf_n \sup_{k > n} a_k^{1/k}$. Sia $L_n = \sup_{k > n} a_k^{1/k}$. Per definizione $a_k^{1/k} \leq L_n$ per

ogni $k > n$ e inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : L_n - \varepsilon < a_{k_\varepsilon}^{1/k_\varepsilon} \leq L_n$. Ne segue che $\frac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \leq \frac{L_n^{k_\varepsilon+1}}{(L_n - \varepsilon)^{k_\varepsilon}} = L_n \left(\frac{L_n}{L_n - \varepsilon} \right)^{k_\varepsilon}$. Ne segue che $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : \frac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \leq L_n \left(\frac{L_n}{L_n - \varepsilon} \right)^{k_\varepsilon}$ e quindi $\sup_{k > n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq L_n$ e quindi $\inf_n \sup_{k > n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq L$.

- Sia $l = \underline{\lim} a_k^{1/k}$ e quindi $l = \sup_n \inf_{k > n} a_k^{1/k}$. Sia $l_n = \inf_{k > n} a_k^{1/k}$. Per definizione $a_k^{1/k} \geq l_n$ per ogni $k > n$ e inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : l_n \leq a_{k_\varepsilon}^{1/k_\varepsilon} \leq l_n + \varepsilon$. Ne segue che $\frac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \geq l_n \left(\frac{l_n}{l_n + \varepsilon} \right)^{k_\varepsilon}$. Ne segue che $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : \frac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \geq l_n \left(\frac{l_n}{l_n + \varepsilon} \right)^{k_\varepsilon}$ e quindi $\inf_{k > n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq l_n$ e quindi $\sup_n \inf_{k > n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq l$.

10.8.2 Detto $\overline{\lim} a_k^{1/\ln k} = l < 1/e$. Ne segue che definitivamente $a_k \leq (l + \varepsilon)^{\ln k} = e^{\ln k \cdot \ln(l + \varepsilon)} = k^{\ln(l + \varepsilon)}$ e $\ln(l + \varepsilon) < -1$ da cui convergenza per $\varepsilon < 1/e - l$

ii) Sia $\overline{\lim} (k a_k)^{1/(\ln \ln k)} = l < 1/e$ da cui $k a_k \leq (l + \varepsilon)^{\ln \ln k} = e^{(\ln \ln k) \cdot \ln(l + \varepsilon)} = e^{\ln(\ln k) \ln(l + \varepsilon)} = (\ln k)^{\ln(l + \varepsilon)}$ da cui $a_k \leq \frac{1}{k(\ln k)^{|\ln(l + \varepsilon)|}}$ e $l + \varepsilon < 1/e$.

iii) Stessa procedura.

Notare come dire $\overline{\lim} a_k^{1/\ln k} = l > 1/e$ non dia garanzia di divergenza con $\overline{\lim} a_k^{1/k} > 1$.

11.8.2 Basta applicare le definizioni. Supponiamo $\overline{\lim} \frac{d_k}{c_k} = L > 0$. Vuol dire $L \leq \sup_{k > k_\varepsilon} \frac{d_k}{c_k} <$

$L + \varepsilon$ e quindi $d_k/c_k < L + \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$ da cui $d_k < (L + \varepsilon)c_k$ il che vorrebbe dire $\sum d_k$ convergente.

Ora supponiamo $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k}{d_k} = L > 0$. Vuol dire $L - \varepsilon < \inf_{k > k_\varepsilon} \frac{c_k}{d_k} \leq L$ (prendiamo $\varepsilon < L$) e quindi $c_k/d_k > L - \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$ da cui $c_k > (L - \varepsilon)d_k$ il che vorrebbe dire $\sum c_k$ divergente.

• Prendiamo ora le due successioni: $c_k = 1/k^2$, $d_k = 1/k$ se $k \neq 2^j$, $d_{2^j} = 2^{-3j}$. Chiaramente $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k/d_k = +\infty$.

12.8.2 Abbiamo $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k)^{\frac{1}{\ln k}} = A > 1/e$. Ne segue che definitivamente $(a_k)^{\frac{1}{\ln k}} \geq A - \varepsilon$ ossia $a_k \geq (A - \varepsilon)^{\ln k} = k^{\ln(A - \varepsilon)}$ da cui la divergenza essendo $\ln(A - \varepsilon) > -1$ se ε è piccolo abbastanza.

13.8.2 1) Usiamo Cauchy $\left| \sum_{k=p}^q b_k \right| = \left| a_{n_{p-1}+1} + a_{n_p} + \dots + a_{n_q} \right| < \varepsilon$ se p è grande abbastanza grazie alla convergenza della serie $\sum a_k$.

2) Usiamo Cauchy $0 \leq a_1 + \dots + a_N \leq b_1 + \dots + b_N < \varepsilon$ data la convergenza della serie $\sum b_k$.

3) $\left| a_1 + \dots + a_{n_p} \right| = \left| b_1 + \dots + b_p \right| < \varepsilon$

4) $\left| a_1 + \dots + a_{n_p} + a_{n_p+1} + a_{n_p+r} \right| = \left| b_1 + \dots + b_p + a_{n_p+1} + a_{n_p+r} \right| < \varepsilon + \varepsilon N$

14.8.2 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a^{\frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} (a^{\frac{1}{k}} - 1) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}$ e la prima è una serie di Leibnitz ma la seconda oscilla.

La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a^{\frac{1}{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^2 (-1)^j a^{\frac{1}{3k-j}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a^{\frac{1}{3k}} - a^{\frac{1}{3k-1}} + a^{\frac{1}{3k-2}} \right] \sim \sum 1 = +\infty$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a^{\frac{1}{k}} = a + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^2 (-1)^{j-1} a^{\frac{1}{3k+1-j}} = a + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[-a^{\frac{1}{3k+1}} + a^{\frac{1}{3k}} - a^{\frac{1}{3k-1}} \right] \sim \sum -1 = -\infty$$

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (1 - a^{\frac{1}{k}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (1 - 1 - \frac{\ln a}{k} + O(\frac{1}{k^2}))$ evidentemente converge

15.8.2 Si ha $\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n+n_\varepsilon} a_k < \varepsilon$ per $n > 0$ e per un certo n_ε (proprietà di Cauchy). Ne segue che

$0 < na_{n+n_\varepsilon} < \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n+n_\varepsilon} a_k < \varepsilon$ da cui il risultato. Per applicare il risultato alla serie $\sum_k k^{-1-\frac{1}{k}}$

bisogna dimostrare che è monotona decrescente ossia $k^{1+\frac{1}{k}} < (k+1)^{1+\frac{1}{k+1}}$. Elevando alla potenza $k+1$ si ottiene $k^{k+2+\frac{1}{k}} < (k+1)^{k+2}$ ossia $k^{\frac{1}{k}} < (1 + \frac{1}{k})^{k+2}$ che è certamente vera in quanto $k^{\frac{1}{k}} < 2$ mentre $(1 + \frac{1}{k})^{k+1} > e$.

• Sia $k^2 \leq p_n < (k+1)^2$ per $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ e sia $\bar{p}_k \stackrel{\text{def}}{=} p_{n_k}$. Per $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ definiamo $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n_{k+1}} \frac{1}{\bar{p}_k}$. Chiaramente $a_k \searrow 0$, e $\sum a_k < +\infty$. Infatti $\sum a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n_k \leq n \leq n_{k+1}} \frac{1}{n_{k+1}} \frac{1}{\bar{p}_k} \leq$

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\bar{p}_k} < +\infty$. Inoltre si ha $na_n p_n|_{n=n_k+1} = \frac{n_{k+1}}{n_{k+1}} \frac{p_{n_k+1}}{\bar{p}_k} = \frac{n_{k+1}}{n_{k+1}} \frac{p_{n_k+1}}{p_{n_k}} \geq 1$ per $n = n_{k+1}$

• Se p_n non è monotona, definiamo la successione $q_n = \min\{p_k, k \geq n\}$ e rifacciamo il ragionamento precedente con q_n al posto di p_n .

16.8.2 Detta $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, la prima parte è completamente ovvia

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} a_k = \frac{S}{2} + \frac{a_1}{2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} a_k - \frac{a_1}{2} = \\ &= S - \frac{a_1}{2} \end{aligned}$$

La successione $a_k = (-1)^k$ mostra che il contrario è falso.

$$a_1 + \dots + a_{2n} = 2b_{2n-1} + 2b_{2n-3} + \dots + 2b_1, \quad a_1 + \dots + a_{2n+1} = 2b_{2n} + 2b_{2n-2} + \dots + 2b_2 + a_1$$

e dalla non negatività di a_k segue la convergenza delle serie $\sum b_{2k}$ e $\sum b_{2k-1}$

17.8.2 Scriviamo

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{+\infty} (a_1 + \dots + a_p) v_{pk+1} - (a_2 - \dots - a_p) v_{kp+1} + a_2 v_{kp+2} + a_3 v_{kp+3} + \dots + a_p v_{kp+p} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (a_1 + \dots + a_p) v_{pk+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_2(v_{kp+2} - v_{kp+1}) + a_3(v_{kp+3} - v_{kp+1}) + \dots + a_p(v_{kp+p} - v_{kp+1})) \end{aligned}$$

Sia $a_2 > 0$. Abbiamo $v_{(k-1)p+2} > v_{kp+1}$ in quanto $(k-1)p+2 \leq kp+1$ se e solo se $p \geq 1$

$$-a_2 v_1 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_2 (v_{kp+2} - v_{(k-1)p+2}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_2 (v_{kp+2} - v_{kp+1}) \leq 0$$

e quindi la serie converge essendo somma di elementi tutti negativi.

Sia $a_2 < 0$.

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_2 (v_{kp+2} - v_{kp+1}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_2 (v_{(k+1)p+1} - v_{kp+1}) \leq -a_2 v_{p+1}$$

e quindi la serie converge essendo somma di elementi tutti positivi.

Sia $a_3 > 0$. $0 \geq a_3(v_{kp+3} - v_{kp+1}) \geq a_3(v_{kp+2} - v_{kp+1})$ e quindi converge per le stesse ragioni di prima.

Sia $a_3 < 0$. La presenza di a_3 implica che $p > 2$ e quindi $kp+3 < (k+1)p+1$ da cui $v_{kp+3} > v_{(k+1)p+1}$. Otteniamo

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_3 (v_{kp+3} - v_{kp+1}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_3 (v_{(k+1)p+1} - v_{kp+1}) \leq -a_3 v_1$$

Si può fare lo stesso discorso con $a_4, a_5, \dots, a_p$. La conclusione è che la serie converge se e solo se $a_1 + \dots + a_p = 0$.

18.8.2 Supponiamo che $k(a_{k+1} - a_k) \rightarrow l \neq 0$ e supponiamo $l > 0$. Ne segue che asintoticamente $a_{k+1} - a_k > l/(2k)$ e quindi $\sum_{k=k_0}^n a_k \geq C + \sum_{k=k_0}^n \frac{l}{2n} \rightarrow +\infty$. Se $l < 0$ allora

$\sum_{k=k_0}^n a_k \leq C + \sum_{k=k_0}^n \frac{2l}{n} \rightarrow -\infty$. Se $l = \pm\infty$ è lo stesso.

19.8.2 Sia $a_0 = 0$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)(a_{k-1} - a_k) = l$. Scriviamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 1 \cdot a_k &= \sum_{k=1}^n ((k+1) - k)a_k = \sum_{k=1}^n ((k+1)a_k - ka_{k-1}) + \sum_{k=1}^n (k-1)(a_{k-1} - a_k) + \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 1 \cdot a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} na_n + l + \lim_{n \rightarrow +\infty} na_n - a_1 \end{aligned}$$

20.8.2 Basta scrivere $a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}-1} \geq (n_{k+1} - n_k)a_{n_{k+1}-1} \geq (n_{k+1} - n_k)a_{n_{k+1}} \geq (n_{k+1} - n_k)C/n_{k+1}$ da cui

$$\sum_{k=p}^q (a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}-1}) \geq C \sum_{k=p}^{q-1} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1}} \geq \frac{C}{n_q} \sum_{k=p}^{q-1} (n_{k+1} - n_k) \geq C \left(1 - \frac{n_p}{n_q}\right)$$

21.8.2 Per dimostrare il criterio di Abel basta scrivere $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} a'_k B_k$ dove

$B_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n b_i$ e $a'_k \stackrel{\text{def}}{=} a_{k+1} - a_k$. La formula altri non è che “una integrazione per parti”. Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k (B'_k) \text{ e quindi scriviamo } a_n B_n - a_1 B_1 - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) \\ &\text{ che “è uguale a ” } \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a'_k). \end{aligned}$$

$a_n B_n - a_1 B_1 - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) = a_n B_n - a_1 B_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k - a_n B_{n-1} = a_n B_n - a_n B_{n-1} - a_1 B_1 - a_n b_n + \sum_{k=1}^n a_k b_k = -a_1 B_1 + \sum_{k=1}^n a_k b_k$ da cui la formula che cerchiamo.

Per dimostrare che $\sum a_k b_k$ converge scriviamo $\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k b_k = a_n B_n - a_{m-1} B_{m-1} + \sum_{k=m-1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ e chiaramente $\sum_{k=m-1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k < B \sum_{k=m-1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = B(a_{m-1} - a_n) < \varepsilon$ per ogni n, m sufficientemente grandi. Le quantità $a_n B_n - a_{m-1} B_{m-1}$ tendono chiaramente a zero per n, m che tendono a più infinito. Come si vede sono essenziali le proprietà per cui a_k è decrescente e B_k limitata per ogni k .

- Se a_k tende a zero ma per valori non definitivamente positivi un semplice esempio è $a_k = \frac{(-)^k}{k}$ e $b_k = (-)^k$. Se invece $a_k \geq 0$ e $a_k \rightarrow 0$ allora un sempio è $b_k = (-)^k$ e $a_k = \begin{cases} k^{-1} & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$

- Si scriva $\sum a_k = \sum \frac{1}{k}(ka_k)$ e si applichi il criterio di Abel

22.8.2 Sia $A_n(x) = \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq K$. Scriviamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q a_k(x)v_k(x) &= \sum_{k=p}^q (A_k(x) - A_{k-1}(x))v_k(x) = \\ &= -A_{p-1}(x)(x)v_p(x) + A_p(x)[v_p(x) - v_{p+1}(x)] + A_{p+1}[v_{p+1}(x) - v_{p+2}(x)] + \\ &+ \dots + A_{q-1}(x)[v_{q-1}(x) - v_q(x)] + A_q(x)v_q(x) = \\ &= A_q(x)v_q(x) - A_{p-1}(x)v_p(x) + \sum_{k=p}^{q-1} A_k(x)[v_{k-1}(x) - v_k(x)] \end{aligned}$$

Ora

$$\left| A_q(x)v_q(x) \right| < \underbrace{K\varepsilon}_{1 \text{ e } 3}, \quad \left| A_{p-1}(x)(x)v_p(x) \right| < \underbrace{K\varepsilon}_{1 \text{ e } 3} \quad \forall x \in I$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^{q-1} A_k(x)[v_{k-1}(x) - v_k(x)] \right| &\leq \sum_{k=p}^{q-1} |A_k(x)| |v_{k-1}(x) - v_k(x)| \underbrace{=}_2 \sum_{k=p}^{q-1} |A_k(x)| [v_{k-1}(x) - v_k(x)] \leq \\ &\underbrace{\leq}_1 K \sum_{k=p}^{q-1} [v_{k-1}(x) - v_k(x)] = \varepsilon(v_{p-1}(x) - v_{q-1}(x)) \underbrace{\leq}_3 2\varepsilon K \end{aligned}$$

Sia ora data

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^q a_k(z)v_k(z) \right| &= \left| A_q(z)v_q(z) - A_{p-1}(x)v_p(z) + \sum_{k=p}^{q-1} A_k(z)[v_{k-1}(z) - v_k(z)] \right| \leq \\ &\leq |A_q(z)v_q(z)| + |A_{p-1}(x)(z)v_p(z)| + \sup_{p \leq k \leq p-1} |A_k(z)| \sum_{k=p}^{q-1} |v_{k-1}(z) - v_k(z)| \end{aligned}$$

$$|A_q(z)v_q(z)| \leq \varepsilon V, \quad |A_{p-1}(x)(z)v_p(z)| \leq \varepsilon V, \quad \sup_{p \leq k \leq p-1} |A_k(z)| \sum_{k=p}^{q-1} |v_{k-1}(z) - v_k(z)| \leq \varepsilon V_1$$

23.8.2 Dal Teorema di Abel $\sum_{k=m}^n a_k b_k = a_n B_n - a_{m-1} B_{m-1} - \sum_{k=m-1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$. Con $a_k = k$ e $b_k = a_{k+1} - a_k$ abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n k(a_{k+1} - a_k) &= n(a_{n+1} - a_1) - (m-1)(a_m - a_1) - \sum_{k=m-1}^{n-1} (a_{k+1} - a_1) = \\ &= na_{n+1} - (m-1)a_m + a_1(m-1-n) - a_n + a_1(n-1-m+2) = na_{n+1} - (m-1)a_m \rightarrow 0 \end{aligned}$$

in quanto $\{a_k\}$ è monotona. Quindi la serie $\sum k(a_{k+1} - a_k)$ converge.

Sia ora $\Delta a_n \doteq a_n - a_{n+1}$ tale che $\Delta a_{n+1} \leq \Delta a_n$. Possiamo scrivere $\varepsilon > \sum_{k=m}^n k \Delta a_k \geq (n-m+1)\Delta a_n = n\Delta a_n - (m-1)\Delta a_n$. Prendiamo ora $m-1 = n/2$ e otteniamo $n\Delta a_n \leq 2\varepsilon$ da cui la tesi.

24.8.2 Dal Teorema di Abel si ha $\frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^n a_k m_k = A_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(m_{k+1} - m_k)}{m_n} A_k = A_n - A + A - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(m_{k+1} - m_k)}{m_n} A_k = \frac{1}{m_n} \left(- \sum_{k=1}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) A_k + A \sum_{k=1}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) + m_1 A \right) + A_n - A = \frac{1}{m_n} \left(- \sum_{k=1}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) (A_k - A) + m_1 A \right) + A_n - A$. Sappiamo che $k > k_\varepsilon \Rightarrow |A_k - A| < \varepsilon$ per cui $\sum_{k=1}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) (A_k - A) = \sum_{k=1}^{k_\varepsilon} (m_{k+1} - m_k) (A_k - A) + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) (A_k - A)$. $\left| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) (A_k - A) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1} (m_{k+1} - m_k) = \varepsilon (m_n - m_{k_\varepsilon+1}) \leq \varepsilon m_n$. Tutti gli altri contributi tendono a zero.

25.8.2 Usiamo Abel. $A_n = \sum_{k=1}^n k a_k \rightarrow A$

$$\sum_{k=m}^n (k a_k) \frac{1}{k} = \frac{A_n}{n} - \frac{A_{m-1}}{m-1} + \sum_{k=m}^n \frac{A_{k-1}}{k(k-1)} < \varepsilon \text{ con } m \text{ grande abbastanza}$$

26.8.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1}{n} = +\infty$

27.8.2 $\sum a_k$ convergente implica che $\forall \varepsilon > 0 \exists j_\varepsilon: n, m > j_\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=n}^m a_i < \varepsilon$. Consideriamo la successione $\varepsilon_k = k^{-3}$ e in corrispondenza ad essa i valori j_k . Supponiamo che siano tutti diversi per cui $j_k < j_{k+1}$. Se non sono tutti diversi scartiamo quelli doppi, tripli,...n-pi. Dunque abbiamo $\sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}} a_i < \varepsilon_k$. Per $j_k + 1 \leq i \leq j_{k+1}$ definiamo $b_i = k$. Per ogni coppia $\{m, n\}$ si ha $j_p \leq m < n \leq j_q$. È evidente che

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n a_i b_i &\leq \sum_{i=j_p+1}^{j_{q+1}} a_i b_i = \sum_{i=j_p+1}^{j_{p+1}} a_i b_i + \sum_{i=j_{p+1}+1}^{j_{p+2}} a_i b_i + \dots + \sum_{i=j_q+1}^{j_{q+1}} a_i b_i \leq \\ &< p \cdot \sum_{i=j_p+1}^{j_{p+1}} a_i + \dots + q \cdot \sum_{i=j_q+1}^{j_{q+1}} a_i < \frac{1}{k} < \frac{q}{q^3} + \dots + \frac{p}{p^3} < \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi si ha lo stesso convergenza

Un'altra soluzione è quella di [\[rich.29\]](#) ossia $b_k = a_k / r_k^{1+\alpha}$ $\alpha < 0$ e $r_k = \sum_{k=r+1}^{+\infty} a_k$

• Poiché $\sum a_k$ diverge, esiste una successione $\{n_k\}$ tale che $\sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \geq k$. Definiamo la successione $b_j = \frac{1}{k}$ per $n_k \leq j < n_{k+1} - 1$. Abbiamo $\sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} a_j b_j = \frac{1}{k} \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \geq 1$ e quindi non è soddisfatto il criterio di Cauchy.

$$28.8.2 \quad C_1 = c_1 = a_1 b_1, \quad C_2 = c_1 + c_2 = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

$$\begin{aligned} C_1 + \dots + C_r &= \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j+1} = \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n a_j b_{k-j+1} = \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n-j+1} a_j b_p = \\ &= \sum_{n=1}^r \sum_{j=1}^n a_j B_{n-j+1} = \sum_{j=1}^r \sum_{n=j}^r a_j B_{n-j+1} = \sum_{n=1}^r \sum_{p=1}^{r-j+1} a_j B_p = \sum_{p=1}^r B_p \sum_{j=1}^{r-p+1} a_j = \sum_{p=1}^r B_p A_{r+p-1} \end{aligned}$$

L'esercizio 77.3 sulle successioni ci dice che $\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^r B_p A_{r+p-1} = AB$ da cui il risultato.

29.8.2 Usiamo [rich.55](#). Se $\sum c_k$ converge a C allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_1 + \dots + C_n)/n \rightarrow C$ ma il limite è uguale ad AB .

30.8.2

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m c_n &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots + (a_n b_0 + \dots + a_0 b_n) = \\ &= a_0 \sum_{k=0}^n b_k + a_1 \sum_{k=0}^{n-1} b_k + a_2 \sum_{k=0}^{n-2} b_k + \dots + a_n b_0 = \\ &= a_0 \left(\sum_{k=0}^n b_k - B \right) + a_1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k - B \right) + a_2 \left(\sum_{k=0}^{n-2} b_k - B \right) + \dots + a_n (b_0 - B) + B \left(\sum_{k=0}^n a_k - A \right) + AB \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} AB + B \left(\sum_{k=0}^n a_k - A \right) + \sum_{k=0}^n a_k (B_{n-k} - B). \end{aligned}$$

Poiché $\sum a_k$ e $\sum b_k$ convergono, abbiamo che $\sum_{k=i}^j a_k < \varepsilon$ per ogni $i, j > k_\varepsilon$ e $|B_k - B| < \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon^1$. Sia $K_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k_\varepsilon, k_\varepsilon^1\}$. Quindi scriviamo

$$\sum_{k=0}^n a_k (B_{n-k} - B) = \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} a_k (B_{n-k} - B) + \sum_{k=K_\varepsilon+1}^n a_k (B_{n-k} - B)$$

con $n > 2K_\varepsilon$ dimodoché $n - k > K_\varepsilon$ per ogni $0 \leq k \leq K_\varepsilon$.

$$\sum_{k=0}^{K_\varepsilon} a_k (B_{n-k} - B) \leq \sup_{0 \leq k \leq K_\varepsilon} |B_{n-k} - B| \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} |a_k| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

$\sum_{k=K_\varepsilon+1}^n a_k (B_{n-k} - B) \leq C\varepsilon$ dove C è una costante che limita $B_{n-k} - B$. Mettendo tutto assieme

otteniamo il risultato a patto che $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converga.

Detto $|C_n| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{1}{\sqrt{n-i}} \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 1$ e quindi $C_n \not\rightarrow 0$ da cui il risultato.

31.8.2

$$n = 2p \implies \text{(I)} \doteq \sum_{1+\lfloor n/2 \rfloor}^n a_k = \sum_{k=1+p}^{2p} a_k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$$

$$n = 2p + 1 \implies \text{(II)} \doteq \sum_{1+\lfloor n/2 \rfloor}^n a_k = \sum_{k=1+p}^{2p+1} a_k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} L$$

La differenza ci dà $a_{2p+1} \rightarrow 0$ per cui definiamo la successione $a_{2p+1} = 0$ e $a_{2p} = (-1)^p \ln p$. Sia p pari. Notiamo che in (I) il numero di termini non nulli è $(2p - p)/2 = p/2$

32.8.2 Definiamo $f(x) \doteq \sum a_k x^k$ che converge per $x = 1$ e quindi il raggio di convergenza deve essere non inferiore a 1. Lo stesso accade per $g(x) = \sum b_k x^k$. Consideriamo ora $|x| < 1$ e applichiamo [\[rich.54\]](#). L'assoluta convergenza delle serie, ne basta una, implica che $\sum a_k x^k \sum b_k x^k = \sum c_k x^k$. Grazie a [\[rich.37\]](#) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_k x^k = \sum a_k \doteq A$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum b_k x^k = \sum b_k \doteq B$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum c_k x^k = \sum c_k \doteq C$ da cui $A \cdot B = C$.

33.8.2 Sia $\tilde{a}_n = |a_n|$, $\tilde{b}_n = |b_n|$, $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}$, $C_n = c_1 + \dots + c_n$, $\tilde{A}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k \rightarrow \alpha$, $\tilde{B}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \rightarrow \beta$, $\sum_{k=1}^n \tilde{c}_k \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j \tilde{b}_{k+1-j} = \sum_{p=1}^r \tilde{B}_p \tilde{A}_{r+p-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \alpha \beta$

34.8.2

$$\begin{aligned} C_n &= c_1 + \dots + c_n = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k-j+1} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j (B_{k-j+1} - B_{k-j}) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n a_j (B_{k-j+1} - B_{k-j}) = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n-j+1} a_j (B_p - B_{p-1}) = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n-j+1} a_j B_p - \sum_{j=1}^n \sum_{p=2}^{n-j+1} a_j B_{p-1} = \\ &= \sum_{p=1}^n B_p \sum_{j=1}^{n-p+1} a_j - \sum_{p=2}^n B_{p-1} \sum_{j=1}^{n-p+1} a_j = \sum_{p=1}^n B_p A_{n-p+1} - \sum_{p=2}^n B_{p-1} A_{n-p+1} = \\ &= \sum_{p=1}^n B_p A_{n-p+1} - \sum_{p=1}^{n-1} B_p A_{n-p} = \sum_{p=1}^{n-1} B_p a_{n-p+1} + a_1 B_n = \sum_{p=1}^n a_p B_{n+1-p} \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n a_p B_{n+1-p} &= \sum_{p=1}^N a_p B_{n+1-p} + \sum_{p=N+1}^n a_p B_{n+1-p} = \sum_{p=1}^N (A_p - A_{p-1}) B_{n+1-p} + \sum_{p=N+1}^n a_p B_{n+1-p} = \\ &= \sum_{p=1}^N (A_p B_{n+1-p} - A_{p-1} B_{n-p+2}) + \sum_{p=1}^N A_{p-1} (B_{n+2-p} - B_{n+1-p}) + \sum_{p=N+1}^n a_p B_{n+1-p} = \\ &= A_N B_{n+1-N} + \sum_{p=1}^N A_{p-1} b_{n+2-p} + \sum_{p=N+1}^n a_p B_{n+1-p} \end{aligned}$$

quindi

$$C_n - A_N B_{n+1-N} = A_1 b_n + A_2 b_{n-1} + \dots + A_{N-1} b_{n+2-N} + B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + \dots + B_{n-N} a_{N+1}$$

Per $n \rightarrow +\infty$ e $n - N \rightarrow +\infty$ si ha $A_N B_{n+1-N} \rightarrow AB$. Inoltre $|A_n| \leq KA$ e $|B_n| \leq KB$ per ogni n . Otteniamo

$$\begin{aligned} & |A_1 b_n + A_2 b_{n-1} + \dots + A_{N-1} b_{n+2-N} + B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + \dots + B_{n-N} a_{N+1}| \leq \\ & \leq (N-1)KA \sup_{n+2-N \leq k \leq n} |b_k| + (n-N)KB \sup_{n-N \leq k \leq n} |a_k| \leq \frac{(N-1)KA\varepsilon}{n-N+2} + \frac{(n-N)KB\varepsilon}{n-N} \end{aligned}$$

Se fosse vero che da $ka_k = o(1)$ e che $kb_k = o(1)$ segue $n(a_1 b_n + \dots + a_n b_1) \doteq nc_n = o(1)$ avremmo il seguente

Falso Teorema *Ipotesi: $ka_k = o(1)$ e che $kb_k = o(1)$. Inoltre $\sum a_k x^k$ e $\sum b_k x^k$ convergono per $|x| < 1$. Tesi: la serie $\sum c_n$ converge*

Falsa dimostrazione

$$\sum_{k=M}^N a_k x^k \sum_{j=P}^Q a_j x^j = \sum_{r=M+P}^{N+Q} x^r \sum_{k=\max\{M, r-Q\}}^{k=\min\{N, r-P\}} a_k b_{r-k}$$

Sia $M = P = 0$, $N = Q = +\infty$ da cui $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j = \sum_{r=0}^{+\infty} x^r \sum_{k=0}^r a_k b_{n-k}$ e la serie di

destra converge per $|x| < 1$ grazie a [\[rich.54\]](#). Se avessimo $r \sum_{k=0}^r a_k b_{n-k} = o(1)$, grazie al teo-

rema di Tauber ([\[rich.42\]](#)) avremmo la convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \doteq \sum c_n$. La condizione

$r \sum_{k=0}^r a_k b_{n-k} = o(1)$ è falsa in generale.

Se prendiamo $a_k = b_k = (-1)^k / ((k+1)\sqrt{\ln(k+1)})$ abbiamo

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{\ln(k+1)}} \frac{1}{(n-k+2)\sqrt{\ln(n-k+2)}}$$

$$n = 2s - 1$$

$$\begin{aligned} c_{2s-1} &= \sum_{k=1}^{2s-1} a_k b_{2s-k} = \sum_{k=1}^{2s-1} \frac{1}{(k+1)\sqrt{\ln(k+1)}} \frac{1}{(2s-k+1)\sqrt{\ln(2s-k+1)}} = \\ &= \sum_{k=2}^{2s} \frac{1}{k \ln k} \frac{1}{(2s-k+2)\sqrt{\ln(2s-k+2)}} = \sum_{k=2}^{s+1} \frac{1}{k \ln k} \frac{1}{(2s-k+2)\sqrt{\ln(2s-k+2)}} + \\ &+ \sum_{k=s+1}^{2s} \frac{1}{k \ln k} \frac{1}{(2s-k+2)\sqrt{\ln(2s-k+2)}} = 2 \sum_{k=2}^{s+1} \frac{1}{k \ln k} \frac{1}{(2s-k+2)\sqrt{\ln(2s-k+2)}} = \\ &= 2 \sum_{p=0}^{s-1} \frac{1}{(s-p+1)\sqrt{\ln(s-p+1)}} \frac{1}{(s+p+1)\sqrt{\ln(s+p+1)}} \geq \\ &\geq 2 \sum_{p=0}^{s-1} \frac{1}{(s-p+1) \ln(s-p+1)} \frac{1}{(s+p+1)} \geq \frac{2}{2s \ln(s+1)} \sum_{p=0}^{s-1} \frac{1}{(s-p+1)} = \\ &\geq \frac{2}{2s \ln(s+1)} \sum_{p=2}^{s+1} \frac{1}{p} \geq \frac{1}{s \ln(s+1)} \int_2^{s+2} \frac{dx}{x} = \frac{\ln(s+2) - \ln 2}{s \ln(s+1)} \end{aligned}$$

e quindi $sc_{2s} \not\rightarrow 0$.

35.8.2 Sappiamo da rich.55 che $(C_1 + \dots + C_n)/n \rightarrow AB$ con $C_n = c_1 + \dots + c_n$ e $c_n = a_1 b_n + \dots + a_n b_1$. Inoltre

$$\frac{c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n}{n} = \frac{n+1}{n}C_n - \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n}$$

Perché $C_n \rightarrow AB$ è necessario e sufficiente che $(c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n)/n \rightarrow 0$. Definiamo $\bar{A}_n =$

$$\sum_{k=1}^n ka_k, \bar{B}_n = \sum_{k=1}^n kb_k, \bar{C}_n = \sum_{k=1}^n kc_k \text{ ed osserviamo che}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_n + C_n &= \sum_{k=1}^n k \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n ka_j b_{k+1-j} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n+1-j} (p+j-1)a_j b_p + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j} = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n+1-j} a_j p b_p + \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n+1-j} j a_j b_p = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n+1-j} a_j b_p + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j} = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n+1-j} a_j p b_p + \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n+1-j} j a_j b_p = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \bar{B}_{n+1-k} + \sum_{k=1}^n b_k \bar{A}_{n+1-k} \end{aligned}$$

$C_1 + \dots + C_n/n = AB + \gamma_n$ con $\gamma_n \rightarrow 0$ e quindi $C_n = nAB + n\gamma_n - (n-1)AB - (n-1)\gamma_{n-1}$ da cui $\frac{C_n}{n} = \frac{AB}{n} + \gamma_n - \frac{n-1}{n}\gamma_{n-1} \rightarrow 0$. Quindi per dimostrare che $\bar{C}_n/n \rightarrow 0$ ci basta

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \bar{B}_{n+1-k} + \sum_{k=1}^n b_k \bar{A}_{n+1-k} \right)/n \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \bar{B}_{n+1-k} &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) \bar{B}_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n (A_k \bar{B}_{n+1-k} - A_{k-1} \bar{B}_{n-k+2}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n A_{k-1} (\bar{B}_{n-k+2} - \bar{B}_{n-k+1}) = A_n \bar{B}_1 + \sum_{k=2}^n A_{k-1} (n-k+2) b_{n-k+2} = \\ &= A_n b_1 + A_1 n b_n + A_2 (n-1) b_{n-1} \dots + A_{n-1} 2 b_2 = \sum_{k=1}^n A_k (n-k+1) b_{n-k+1} = \\ &\underbrace{=}_{A_k = A + \varepsilon_k} \sum_{k=1}^n (A + \varepsilon_k) (n-k+1) b_{n-k+1} = A \sum_{k=1}^n k b_k + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{n+1-k} k b_k = A \bar{B}_n + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{n+1-k} k b_k \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{B}_n}{n} = \frac{n+1}{n} B_n - \frac{B_1 + \dots + B_n}{n} \rightarrow 0$$

e inoltre $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_{n+1-k} k b_k \right| \leq \frac{K}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \leq \varepsilon$ per n grande abbastanza. Quindi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \bar{B}_{n+1-k} \rightarrow$

0 e anche $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \bar{A}_{n+1-k} \rightarrow 0$. Ne segue che $\bar{C}_n/n \rightarrow 0$.

Se fosse vero che da $a_n = O(1/n)$ e $b_n = O(1/n)$ segue $c_n = O(1/n)$, applicando [\[rich.38\]](#) ne seguirebbe la convergenza della serie $\sum c_n$ ma così non è. Prendiamo la serie $\sum a_k = \sum b_k = \sum (-1)^k/k$.

$$|c_n| = |a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1| = |(-1)^k (-1)^{n+1-k} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{n+1-k}| \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{\ln n}{n}$$

Come applicazione prendiamo la serie $\pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{a+b} + \pm \frac{1}{a+2b} \pm \dots \pm \frac{1}{a+nb}$ che convergerà per una opportuna scelta dei segni. Il prodotto per se stessa pure convergerà. Una scelta dei segni è quella per cui il primo termine si lascia così come è, il secondo e il terzo cambiano segno, il quarto, quinto e sesto rimangono come sono e via dicendo. La convergenza della serie è stata stabilita in [\[rich.15\]](#) ma Hardy opera diversamente. Alla serie $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \dots$ sottrae la serie $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \dots$ e ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \\ & = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p + \frac{n(n-1)}{2}} - \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1-p}{(1 + \frac{n(n-1)}{2})(p + \frac{n(n-1)}{2})} \end{aligned}$$

In modulo possiamo stimare

$$\left| \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1-p}{(1 + \frac{n(n+1)}{2})(p + \frac{n(n+1)}{2})} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{8}{n^4} \sum_{p=0}^{n-1} p = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4n(n-1)}{n^4} \text{ conv. assolut.}$$

Inoltre

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2}}$$

e converge per Leibnitz.

36.8.2 Da [\[rich.57\]](#)

$$C_n - A_N B_{n+1-N} = A_1 b_n + A_2 b_{n-1} + \dots + A_{N-1} b_{n+2-N} + B_1 a_n + B_2 a_{n-1} + \dots + N_{n-N} a_{N+1}$$

$$\text{e } |C_n - A_N B_{n+1-N}| < K((n-N)\alpha + (N-1)\beta) \text{ dove } \alpha = \max_{N+1 \leq k \leq n} |a_k| \text{ e } \beta = \max_{n+2-N \leq k \leq n} |b_k|$$

Ora prendiamo $N \sim n/\psi(n)$ e $\alpha < \frac{\varepsilon}{(N+1)\psi(N+1)}$, $\beta < \frac{\varepsilon\psi(n+2-N)}{n+2-N}$ ed otteniamo

$$|C_n - A_N B_{n+1-N}| < K_1 \varepsilon \left(\frac{n}{N\psi(N)} + \frac{N\psi(n)}{n} \right) \leq K_2 \varepsilon \left(1 + \frac{\psi(n)}{\psi(\frac{n}{\psi(n)})} \right) \leq K_3 \varepsilon$$

in quanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\psi(n)}{\psi(\frac{n}{\psi(n)})} = 1$. Ne segue come in [\[rich.57\]](#) la convergenza della successione $\{C_n\}$.

37.8.2 1) La necessità è evidente dal momento che se il prodotto di Cauchy converge allora $c_n = a_1 b_n + \dots + a_n b_1 \rightarrow 0$.

$A_n = A + (-1)^{n-1}r_n$ e $B_n = B + (-1)^{n-1}s_n$ con $0 < r_n < a_{n+1}$, $0 < s_n < b_{n+1}$. $C_n = a_1B_n + \dots + a_nB_1$

$$(-1)^{n-1}(C_n - A_nB) = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n a_k(B_{n+1-k} - B) = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n a_k(-1)^{n-k}s_{n+1-k}$$

$$|(-1)^{n-1}(C_n - A_nB)| \leq \sum_{k=1}^n a_k b_{n+2-k} = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k b_{n+2-k} + a_{n+1}b_1 - a_{n+1}b_1}_{\rightarrow 0 \text{ per } 1)}$$

2) $a_1b_n + \dots + a_nb_1 > a_n(b_n + \dots + b_1) > 0$ e $a_1b_n + \dots + a_nb_1 > b_n(a_n + \dots + a_1) > 0$ per cui 2) è necessaria dalla convergenza del prodotto di Cauchy delle serie.

Per la sufficienza prendiamo n pari

$$0 < a_1b_n + \dots + a_nb_1 = a_1b_n + \dots + a_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+1} + \dots + a_nb_1 < b_{\frac{n}{2}}(a_1 + \dots + a_{\frac{n}{2}}) + a_{1+\frac{n}{2}}(b_{\frac{n}{2}+1} + \dots + b_1)$$

Per n dispari è lo stesso da cui la sufficienza di 2).

3) La condizione di Cauchy di convergenza della serie $\sum a_k b_k$ implica che $a_m b_m + \dots + a_n b_n < \varepsilon$ per $m > m_0$. e a maggior ragione $(a_m + \dots + a_n)b_n < \varepsilon$. Se n è grande abbastanza si ha $(a_1 + \dots + a_{m-1})b_n < \varepsilon$ per cui sommando ho $(a_1 + \dots + a_n)b_n < 2\varepsilon$. Lo stesso accade scambiando a_k con b_k e quindi scatta la sufficienza della condizione 2)

Per dimostrare la non necessità della convergenza della serie $\sum a_k b_k$ prendiamo $a_k = b_k = 1/\sqrt{(k+1)\ln(k+1)}$ $c_n = a_1b_n + \dots + a_nb_1$

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{\ln(k+1)}} \frac{1}{(n-k+2)\sqrt{\ln(n-k+2)}}$$

$$\begin{aligned}
 c_{2s-1} &= 2 \sum_{p=0}^{s-1} \frac{1}{\sqrt{s-p+1} \sqrt{\ln(s-p+1)}} \frac{1}{\sqrt{s+p+1} \sqrt{\ln(s+p+1)}} \leq \\
 &\leq \sum_{p=2}^{s+1} \frac{1}{(2 \ln 2 + (1 + \ln 2)(p-2))^{1/2}} \frac{1}{(\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1} + (-1 - \ln(s+1))(p-s-1))^{1/2}} = \\
 &= \sum_{p=2}^{s+1} \frac{1}{(2 \ln 2 + (1 + \ln 2)(p-2))^{1/2}} \frac{1}{(\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1} + (1 + \ln(s+1))(s+1-p))^{1/2}} = \\
 &\leq \underbrace{\frac{1}{2 \ln 2} \frac{1}{[\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1} + (1 + \ln(s+1))(s+1-2)]^{1/2}}}_A + \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{[2 \ln 2 + (1 + \ln 2)(s+1-2)]^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1}}}_B + \\
 &+ \sum_{p=3}^s \frac{1}{[2 \ln 2 + (1 + \ln 2)(p-2)]^{1/2}} \frac{1}{[\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1} + (1 + \ln(s+1))(s+1-p)]^{1/2}} \leq \\
 &\leq A + B + \sum_{p=3}^{s+1} \frac{1}{[(1 + \ln 2)(p-2)]^{1/2}} \frac{1}{[\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1}]^{1/2}} = \\
 &= A + B + \frac{1}{[(1 + \ln 2)]^{1/2}} \frac{1}{[\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1}]^{1/2}} + \sum_{p=4}^{s+1} \frac{1}{[(1 + \ln 2)(p-2)]^{1/2}} \frac{1}{[\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1}]^{1/2}} \leq \\
 &\leq A + B + \frac{1}{[(1 + \ln 2)]^{1/2}} \frac{1}{[\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1}]^{1/2}} + \frac{K \sqrt{s-1}}{[(1 + \ln 2)]^{1/2}} \frac{1}{[\sqrt{s+1} \ln \sqrt{s+1}]^{1/2}} \leq \frac{K_1}{\ln(s+1)}
 \end{aligned}$$

Per $n = 2s$ è lo stesso. Quindi $c_n \rightarrow 0$. Ora dovremmo far vedere che $|c_n|$ è monotona.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1) \sqrt{\ln(k+1)}} \frac{1}{(n-k+3) \sqrt{\ln(n-k+3)}} + \frac{1}{2 \ln 2 (n+2) \sqrt{\ln(n+2)}} \leq \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1) \sqrt{\ln(k+1)}} \frac{1}{(n-k+2) \sqrt{\ln(n-k+2)}} \quad \text{se e solo se} \\
 &\frac{1}{(n+2) \ln 2 \ln(n+2)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{4}{(k+1) \ln(k+1)} \left[\frac{1}{(n+2-k) \ln(n+2-k)} - \frac{1}{(n+3-k) \ln(n+3-k)} \right] \\
 &\frac{1}{(n+2-k) \ln(n+2-k)} - \frac{1}{(n+3-k) \ln(n+3-k)} = \frac{1}{\xi^2} \left[\frac{1}{\ln \xi} + \frac{1}{\ln^2 \xi} \right] \quad n+2-k < \xi < n+3-k
 \end{aligned}$$

per cui è sufficiente mostrare che

$$\frac{1}{(n+2) \ln 2 \ln(n+2)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{4}{(k+1) \ln(k+1)} \left[\frac{1}{(n+3-k)^2 \ln(n+3-k)} - \frac{1}{(n+3-k)^2 \ln^2(n+3-k)} \right]$$

che a sua volta è implicato da (usando Lagrange)

$$\frac{1}{(n+2) \ln 2 \ln(n+2)} \leq \frac{4}{(n+1) \ln(n+1)} \sum_{k=3}^{n+2} \left[\frac{1}{k^2 \ln k} + \frac{1}{k^2 \ln^2 k} \right]$$

$$\sum_{k=3}^{12} \left[\frac{4}{k^2 \ln k} + \frac{4}{k^2 \ln^2 k} \right] - \frac{1}{\ln 2} > 0.099$$

e quindi c_n è monotona.

4) Se $\sum a_k b_k$ converge allora $(a_1 + \dots + a_n)b_n > na_n b_n \rightarrow 0$ quindi $(na_n b_n)^{1+\varepsilon} \rightarrow 0$ e quindi $\sum (a_k b_k)^{1+\varepsilon}$ converge.

38.8.2

39.8.2

$$\sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_{k+1}$$

da cui la convergenza se $\sum a_k$ converge. Ora dobbiamo dimostrare che se $\sum a_k$ non converge, allora non converge neppure $\sum (a_k + a_{k+1})$ ovvero se $\sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1})$ converge, allora converge pure $\sum a_k$. Infatti

$$\sum_{k=p}^q (a_k + a_{k+1}) = 2 \sum_{k=p+1}^q a_k + a_p + a_{q+1}$$

da cui

$$\varepsilon + |a_p| + |a_{q+1}| \geq 2 \sum_{k=p+1}^q a_k \geq \varepsilon - |a_p| - |a_{q+1}|$$

da cui la convergenza

40.8.2

$$1 < \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}} < \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n+1}}{a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n+1}} +$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n-1} > \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \frac{a_5 + a_6}{2} + \frac{a_7 + a_8}{2} + \dots + \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}$$

e quindi $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n-1} \rightarrow +\infty$

$$1 < \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n+1}}{a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n+1}} = \frac{a_1}{a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n+1}} + \frac{a_3 + a_5 + \dots + a_{2n+1}}{a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n+1}} \rightarrow 1$$

41.8.2 La successione $b_n = (a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n)$ è crescente.

$$b_{n+1} \geq b_n \iff a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - na_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n-1} a_k - (n-1)a_n \iff a_n \geq a_{n+1}$$

quindi esiste il limite $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (a_k - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k - na_n$. Ora mostriamo che $na_n \rightarrow 0$. Da Cauchy

$$\varepsilon > b_{2n} - b_n = \sum_{k=1}^{2n} (a_k - a_{2n}) - \sum_{k=1}^n (a_k - a_n) = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k + na_n - 2na_{2n} > 2na_{2n} + na_n - 2na_{2n} = na_n$$

Ne segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = L$.

42.8.2 Chiaramente $a_1 \geq a_2$. Detta $a_1 + \dots + a_n \doteq A_n$ abbiamo $A_n \leq n(A_{2n} - A_n)$ da cui $A_{2n}(1 + 1/n)A_n$ da cui $A_{2^p} \leq (1 + 2^{-p+1})A_{2^{p-1}} \leq (1 + 2^{-p+1})(1 + 2^{-p+2})A_{2^{p-2}}$ e via dicendo fino a ottenere

$$A_{2^p} \leq (1 + 2^{-p+1})(1 + 2^{-p+2}) \dots (1 + 1)A_2 \leq e^{\sum_{k=1}^{p-1} 2^{-k}} 2a_1 = e^{1+2^{-p+1}} 2a_1 \leq 2ea_1$$

Sia ora $2^p \leq N < 2^{p+1}$. $A_N \leq A_{2^{p+1}} \leq 2ea_1$ da cui il risultato.

43.8.2 Sappiamo che se $n > m \geq m_\varepsilon$, si ha $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$. Ora scriviamo

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k p_k}{p_n} \right| \leq \frac{1}{p_n} \left| \sum_{k=1}^{m-1} a_k p_k \right| + \underbrace{\left| \sum_{k=m}^n \frac{a_k p_k}{p_n} \right|}_{\rightarrow 0} \leq \underbrace{\frac{1}{p_n} \left| \sum_{k=1}^{m-1} a_k p_k \right|}_{\leq K \text{ per un certo } K} \underbrace{\left| \sum_{k=m}^n a_k \right|}_{\leq \varepsilon}$$

• $a_k = 1/k$, $b_k = 1/\sqrt{k}$.

44.8.2 Dimostriamo dapprima che il limite di $a_n(b_1 + \dots + b_n)$ esiste ossia esiste il limite di $a_n(b_1 + \dots + b_n) = a_n b_n + a_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k b_k}{a_k}$. Essendo $a_n b_n \rightarrow 0$, si considera solo la somma. Detta

$$\beta_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_k, \rightarrow 0 \text{ scriviamo}$$

$$\begin{aligned} a_n \sum_{k=m}^{n-1} \frac{a_k b_k}{a_k} &= a_n \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\beta_k - \beta_{k+1}}{a_k} = a_n \sum_{k=m}^{n-1} \left(\frac{\beta_k}{a_k} - \frac{\beta_{k+1}}{a_{k+1}} \right) + a_n \sum_{k=m}^{n-1} \beta_{k+1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \\ &= a_n \left(-\frac{\beta_n}{a_n} + \frac{\beta_m}{a_m} \right) + a_n \sum_{k=m}^n \beta_{k+1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| a_n \sum_{k=m}^{n-1} \frac{a_k b_k}{a_k} \right| &\leq |\beta_n| + \frac{a_n |\beta_m|}{a_m} + a_n \max_{m \leq k \leq n} |\beta_{k+1}| \sum_{k=m}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \\ &= |\beta_n| + \frac{a_n |\beta_m|}{a_m} + \max_{m \leq k \leq n} |\beta_{k+1}| \left(1 - \frac{a_n}{a_m} \right) \end{aligned}$$

ed è una quantità piccola a piacere a patto di prendere m grande abbastanza e tenendo conto che $a_n/a_m < 1$ data la monotonia. Dunque il limite $a_n(b_1 + \dots + b_n)$ esiste. Poi scriviamo

$$a_n(b_1 + \dots + b_{n-1}) = a_n \sum_{k=1}^{n_0} \left(\frac{\beta_k}{a_k} - \frac{\beta_{k+1}}{a_{k+1}} \right) + a_n \sum_{k=n_0+1}^n \beta_{k+1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right)$$

da cui

$$a_n |b_1 + \dots + b_{n-1}| \leq a_n \left| \sum_{k=1}^{n_0} \left(\frac{\beta_k}{a_k} - \frac{\beta_{k+1}}{a_{k+1}} \right) \right| + a_n \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right)$$

ed è una quantità piccola a piacere se n è grande abbastanza.

La monotonia è necessaria. Si prenda $b_k \equiv 1$ ed abbiamo che $na_n \rightarrow 0$ non implica $\sum a_n < +\infty$. Si veda rich.7

- $a_k = 1/k$, $b_k = 1/\ln k$,

45.8.2 Convergenza della serie $\sum a_k b_k$. Usiamo

$$\sum_{k=p}^q a_k b_k = a_q(b_1 + \dots + b_q) - a_p(b_1 + \dots + b_{p-1}) - \sum_{k=p}^{q-1} (a_{k+1} - a_k)(b_1 + \dots + b_k)$$

ed eseguiamo il limite $q \rightarrow +\infty$. Chiaramente $\lim_{q \rightarrow +\infty} a_q(b_1 + \dots + b_q) = 0$ in quanto $a_q \rightarrow 0$ e

$B_q \doteq b_1 + \dots + b_q \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \doteq B$. Poi abbiamo

$$\sum_{k=p}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k)(b_1 + \dots + b_k) = \sum_{k=p}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k)(B_k - B) + \sum_{k=p}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k)B$$

Ora $\sum_{k=p}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k)B = -a_p B \rightarrow 0$ e

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k)(B_k - B) \right| &\leq \sup_{k \geq p} |B_k - B| \sum_{k=p}^{+\infty} |a_{k+1} - a_k| = \\ &= \sup_{k \geq p} |B_k - B| \sum_{k=p}^{+\infty} a_k - a_{k+1} = \sup_{k \geq p} |B_k - B| a_p \end{aligned}$$

che chiaramente tende a zero. Quindi la convergenza è assicurata. Purtroppo le formule sopra non consentono di dimostrare che $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_k = o(a_n)$ e la ragione è che $-a_p B/a_p \not\rightarrow 0$. Sia allora

$\beta_n = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \rightarrow 0$ per ipotesi ed abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a_p} \sum_{k=p}^{+\infty} a_k b_k \right| &= \left| \frac{1}{a_p} \sum_{k=p}^{+\infty} a_k (\beta_n - \beta_{n+1}) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{a_p} \sum_{k=p}^{+\infty} (a_k \beta_k - a_{k+1} \beta_{k+1}) \right| + \left| \frac{1}{a_p} \sum_{k=p}^{+\infty} \beta_{k+1} (a_{k+1} - a_k) \right| \leq |\beta_p| + \frac{1}{a_p} \sup_{k > p} |\beta_k| a_p \end{aligned}$$

da cui il risultato

46.8.2 Applicare l'esercizio rich.35

47.8.2 Sia $S_n = a_1 + a_2/2 + \dots + a_n/n$. $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k S_k - (k-1) S_{k-1}) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_{k-1} (k-1-k) = \\ &= (S_n - L) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (S_{k-1} - L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

48.8.2 Si usi la monotonia in maniera essenziale

$$\bullet a_k = \begin{cases} k^{-2} & k \neq 2^p \\ \frac{1}{k} & k = 2^p \end{cases} \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bullet a_k = \begin{cases} k^{-1/2} & k \neq 2^p \\ \frac{1}{k \ln k} & k = 2^p \end{cases} \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

• La successione $b_k = \min\{a_k, 1/k\}$ è monotona.....

• La successione $b_k = \min\{a_k, 1/\ln k\}/k$ è monotona.....

49.8.2 Prendiamo la successione $a_k = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$ ossia

$$a_k = \begin{cases} 1/p, & k = 2^p \\ \frac{1}{1 + \lfloor \frac{2^p-1}{2} \rfloor}, & k = 2^p - 1 \end{cases} \quad \text{e quindi } 2^k a_{2^k} = \begin{cases} 2, & k = 2^p \\ \frac{2^{2^p-1}}{1 + 2^{2^p-2}}, & k = 2^p - 1 \end{cases} \quad \text{e chiaramente}$$

non è monotona. Più in generale, data una successione monotona, se ne può ricavare una successione monotona b_k tale che la successione $c_k = 2^k b_{2^k}$ non è monotona. Basta “mantenere costante” a_k sufficientemente a lungo. Data $\{a_k\}$ definiamo $b_k = a_j$ per $2^k \leq j < 2^{k+1}$. Dopo definiamo $c_j = b_j$ se $j \neq 2^k$ mentre $c_j = j b_j$ se $j = 2^k$.

50.8.2 L'affermazione è falsa. Basta prendere la serie $\sum \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}$. Un possibile errore potrebbe essere quello di una erronea applicazione del teorema del confronto dimenticando che esso è valido solo per serie il cui segno è definito (almeno da un certo punto in poi).

51.8.2 L'affermazione è falsa. Ovviamente è vero che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$. Un controesempio è

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & k \neq 2^{2^p} \\ 2^{-p} & k = 2^{2^p} \end{cases}; a_{k=2^{2^p}} = \frac{\ln 2}{\ln k} \quad \text{da cui } \lim_{k \rightarrow +\infty} k a_k|_{k=2^{2^p}} = +\infty \quad \text{e quindi } \not\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} k a_k$$

ma $\overline{\lim} k a_k = +\infty$.

52.8.2 Basta scrivere

$$\sum a_k e^{-\beta_k} = \sum (\beta_k - \beta_{k+1}) e^{-\beta_k} < \sum \int_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} e^{-x} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

53.8.2 È conseguenza della relazione $(\sqrt{a_k} - \frac{1}{k})^2 = a_k - 2\frac{\sqrt{a_k}}{k} + \frac{1}{k^2} \geq 0$ da cui $\frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{k^2})$. Le serie $\sum k^{-2}$ e $\sum a_k$ sono convergenti.

La risposta alla seconda domanda è no. Si prenda la serie $\sum \frac{(-)^k}{\ln k}$. La serie $\sum \frac{1}{k \ln k}$ è divergente. La ragione sta nel fatto che se $\sum a_k$ converge non è detto che converga $\sum |a_k|$

54.8.2 La convergenza di $\sum \sqrt{a_k a_{k+1}}$ è dovuta a $(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})^2 \geq 0$. Il controesempio cercato è $a_k = k^{-2-(-)^k}$

55.8.2 La convergenza di $\sum (a_k^{-1} + a_{k+1}^{-1})^{-1}$ segue dal fatto che la media armonica è minore o uguale alla media aritmetica e quindi $(a_k^{-1} + a_{k+1}^{-1})^{-1} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{4}$ e quindi la serie converge. Il controesempio è $a_k = k^{-2-(-)^k}$. Una maggiorazione pure valida è $\frac{a_k a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}} \leq \min\{a_k, a_{k+1}\} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$

56.8.2 $a_k \rightarrow 0$ e la decrescenza di $a_k - a_{k+1}$ implicano che $a_k > 0$.

$$0 < \frac{a_k a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} < \frac{a_k^2}{a_k - a_{k+1}} = \frac{1}{a_k - a_{k+1}} \sum_{j=k}^{+\infty} a_j^2 - a_{j+1}^2 = \frac{1}{a_k - a_{k+1}} \sum_{j=k}^{+\infty} (a_j - a_{j+1})(a_j + a_{j+1}) < \\ < \sum_{j=k}^{+\infty} a_j + a_{j+1} < \varepsilon$$

57.8.2 Dalla AGM, da $L < 1$ e dalla definizione di limite, definitivamente $\frac{1}{n} \left[\frac{a_2}{a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right] \geq \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_1}}$ e quindi $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{1}{n} \left[\frac{a_2}{a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right] < 1$.

58.8.2 Dimostrare che il limite faccia $1/2$ equivale a dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_2 + d_4 + \dots + d_{2n} - d_1 - d_3 - \dots - d_{2n-1}}{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2n}} = 0$$

Dalla monotonia segue

$$\frac{d_2 + d_4 + \dots + d_{2n} - d_1 - d_3 - \dots - d_{2n-1}}{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2n}} \leq \frac{d_1 + d_3 + \dots + d_{2n-1} - d_1 - d_3 - \dots - d_{2n-1}}{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2n}} = 0$$

e

$$\frac{d_2 + d_4 + \dots + d_{2n} - d_1 - d_3 - \dots - d_{2n-1}}{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2n}} \geq \frac{d_3 + d_5 + \dots + d_{2n+1} - d_1 - d_3 - \dots - d_{2n-1}}{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2n}} = \\ = \frac{-d_1 + d_{2n+1}}{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2n}} \rightarrow 0$$

in virtù del fatto che il denominatore diverge.

59.8.2 $a_k = 1/(\sqrt{k} + (-1)^k \sqrt{k})$. La somma dei due termini $(-1)^k a_k + (-1)^{k+1} a_{k+1}$ con k pari tende a zero come $1/\sqrt{k}$ da cui la divergenza.

60.8.2 Sia $\{a_k\}$ siffatta:

$$1, \quad \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}}, \quad \frac{-2}{3^{\frac{1}{6}}}, \quad \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}}, \quad \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}}, \quad \frac{-2}{4^{\frac{1}{6}}} \dots \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{k^{\frac{1}{6}}}, \quad \frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{6}}}, \quad \frac{-2}{(k+2)^{\frac{1}{6}}} \dots \quad k \geq 1$$

Fissato un certo k ,

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = \frac{1}{2k^{\frac{7}{6}}} + o(k^{-\frac{7}{6}}), \quad k = 1, 4, 7, \dots$$

mentre

$$a_k^3 + a_{k+1}^3 + a_{k+2}^3 \sim \frac{-6}{\sqrt{k}} + O(k^{-\frac{3}{2}}) \quad k = 1, 4, 7, \dots$$

61.8.2 Dalla monotonia di $\{a_k\}$ segue che

$$\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} - \frac{a_1 + \dots + a_{k+1}}{k+1} = \frac{a_1 + \dots + a_k - k a_{k+1}}{k(k+1)} > 0$$

e quindi vale Leibnitz.

62.8.2 1). a_n è monotona chiaramente. Poi sappiamo che definitivamente $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \varepsilon$ ossia ($c = 1/2$) $a_{n+1} \leq \frac{a_n}{1 + \frac{\varepsilon}{n}} \leq a_n e^{-\frac{c\varepsilon}{n}}$, $a_{n+2} \leq a_n e^{(-\frac{c\varepsilon}{n} - \frac{c\varepsilon}{n+1})}$ e via dicendo per cui $a_{n+N} \leq a_n e^{-\frac{c\varepsilon}{n} - \dots - \frac{c\varepsilon}{n+N-1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ da cui la convergenza della serie di Leibnitz.

2) Definitivamente $a_n \leq a_{n+1}$ per cui $a_n \not\rightarrow 0$

63.8.2 Diverge sempre in quanto $\sum_{k=p}^q \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1} + a_k} \geq \frac{1}{2a_{q+1}} \sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = \frac{1}{2a_{q+1}} (a_{q+1} - a_p) = \frac{1}{2} - \frac{a_p}{a_{q+1}} \geq \frac{1}{4}$ per ogni q grande abbastanza, p fissato.

64.8.2 Evidentemente $\varepsilon > \sum_{k=n}^{2n} a_k \geq A \sum_{k=n}^{2n} a_n = A(n+1)a_n$ da cui la tesi

65.8.2 $\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \dots \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_k}$ e quindi $0 < a_n \leq b_n \frac{b_k}{a_k}$ da cui la convergenza. Se $\sum a_k$ diverge, diverge pure $\sum b_k$.

66.8.2 Supponiamo che $\sum a_k$ converga. Essendo $0 < \frac{a_k}{1 + a_k} < a_k$ si applica il teorema del confronto da cui la convergenza della serie $\sum \frac{a_k}{1 + a_k}$.

Sia viceversa divergente la serie $\sum a_k$. Abbiamo $\sum \frac{a_k}{1 + a_k} \geq \sum_{k: a_k \leq 1} 2^{-1} a_k + \sum_{k: a_k > 1} 2^{-1}$. Se la seconda serie contiene un numero finito di termini allora la prima contiene tutti i termini tranne un numero finito e quindi diverge. Se la seconda serie contiene un numero infinito di termini diverge.

67.8.2 $\sum \frac{a_k}{1 + k^2 a_k}$ converge sempre in quanto $\frac{a_k}{1 + k^2 a_k} \leq k^{-2}$

Secondo caso. Se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum \frac{a_k}{1 + a_k^2}$ in quanto $\frac{a_k}{1 + a_k^2} \leq a_k$.

Se $\sum a_k$ diverge, la serie $\sum \frac{a_k}{1 + a_k^2}$ può convergere oppure divergere. Infatti per $a_k = \frac{1}{k}$ si ha $\sum \frac{a_k}{1 + a_k^2} = \sum \frac{1}{k} \frac{k^2}{1 + k^2}$ e quindi divergenza. Per $a_k = k^2$ si ha $\sum \frac{a_k}{1 + a_k^2} = \sum \frac{k^2}{1 + k^4}$ e quindi convergenza. Per $a_k = \frac{1}{k^2}$ converge mentre per $a_k = k$ diverge. Per $a_k = 2^{(-)^k}$ diverge in quanto $\frac{a_k}{1 + a_k^2} \not\rightarrow 0$

Terzo caso. Supponiamo che $\sum a_k$ converga. Essendo $0 < \frac{a_k}{1 + ka_k} < a_k$ si applica il teorema del confronto e quindi la serie $\sum \frac{a_k}{1 + ka_k}$ converge.

Sia viceversa divergente la serie $\sum a_k$. La serie $\sum \frac{a_k}{1 + ka_k}$ può convergere oppure divergere.

Ad esempio se $a_k = \frac{1}{k}$ allora $\sum \frac{a_k}{1 + ka_k} = \sum \frac{1}{2k}$ e quindi diverge.

Viceversa con $a_k = 0 \ \forall k \neq 2^p$ e $a_{2^p} = p$ si ha $\sum_k \frac{a_k}{1 + ka_k} = \sum_p \frac{p}{1 + 2^p p}$ e quindi convergenza nonostante $\sum_k a_k = \sum_p p$ sia divergente. Nell'esercizio si dice che $a_k > 0$. Basta modificare

$a_k = k^{-2}$ quando $k \neq 2^p$. Per $a_k = k$ la serie diverge in quanto $\frac{a_k}{1 + ka_k} = \frac{k}{1 + k^2} \geq \frac{1}{2k}$.

Supponiamo ora che a_k sia monotona decrescente e $\sum a_k$ divergente. Anche $\frac{a_k}{1+ka_k}$ è monotona decrescente e quindi (vedi [\[rich.3\]](#)) converge se e solo se converge $\sum \frac{2^k a_{2^k}}{1+2^k a_{2^k}}$. In base alla prima parte dell'esercizio l'ultima serie converge se e solo se converge la serie $\sum 2^k a_{2^k}$ la quale a sua volta converge se e solo se converge $\sum a_k$ da cui il risultato.

68.8.2 Si prenda la serie $\sum 1/(k \ln^a k)$ che sappiamo convergere solo se $a > 1$. D'altra parte

$$\frac{a_k}{1 - \frac{a_k}{a_{k-1}}} \sim \frac{-\ln k}{-\ln^{a+1} k + a \ln^a k} \rightarrow 0 \quad \forall a > 0.$$

Se invece $a_k > 0$ e $\frac{a_k}{1 - \frac{a_k}{a_{k-1}}} \rightarrow L > 0$ allora la serie $\sum a_k$ diverge. Infatti definitivamente

$$\frac{1}{L} - \varepsilon < \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}} < \frac{1}{L} + \varepsilon \quad \text{da cui}$$

$$\frac{1}{a_q} - \frac{1}{a_p} \leq (q-p-1)\left(\frac{1}{L} + \varepsilon\right) \iff a_q \geq \frac{a_p}{1 + a_p(q-p-1)\left(\frac{1}{L} + \varepsilon\right)}$$

da cui la divergenza per confronto con la serie armonica.

69.8.2 $|a_k| + |b_k| \rightarrow 0$ per cui $(a_k - b_k)^{2+p-2} = (a_k - b_k)^2(|a_k| + |b_k|)^{p-2} \leq K(a_k - b_k)^2 = K(a_k^2 + b_k^2 - 2a_k b_k)$ e $|a_k b_k| \leq (a_k^2 + b_k^2)/2$ da cui la convergenza.

70.8.2 Sia $a_k > 0$ definitivamente. Da $\sin x \geq x - x^3/6$ si ha $\sum 1 - (\sin a_k)/a_k \leq \sum a_k^2/6 < +\infty$. Se a_k non ha segno definito la serie può convergere oppure no. Se $a_k = (-1)^k/\sqrt{k}$ la serie diverge e con $a_k = (-1)^k/k$ la serie converge.

71.8.2

$$0 \leq \sum_{k=m}^n \frac{1}{f(\alpha_k)} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k} < \int_{\alpha_m}^{\alpha_{n+1}} \frac{dx}{xf(x)} < \varepsilon$$

72.8.2 Chiaramente $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq c a_{n+1}$ da cui $\{a_k b_k\}$ decrescente e quindi convergente essendo $a_k b_k > 0$. Ora chiaramente $\sum_{k=p}^q a_k \leq \frac{1}{c} \sum_{k=p}^q (a_{k-1} b_{k-1} - a_k b_k) = \frac{1}{c} (a_{p-1} b_{p-1} - a_q b_q) < \varepsilon$ se p, q sono grandi abbastanza.

Supponiamo ora che $\sum a_k$ converga. Prendiamo $b_k = Q_k/a_k$ con Q_k da definire. Otteniamo $\frac{Q_k}{a_{k+1}} - \frac{Q_{k+1}}{a_{k+1}} \geq c$ da cui, con $c = 1$ si ha $Q_{k+1} = Q_k - a_{k+1}$ e prendiamo $Q_1 = a_1$, $Q_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_1 - \sum_{i=1}^k a_i$

73.8.2 La relazione $b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} \leq 0$ diventa $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{\frac{1}{b_{k+1}}}{\frac{1}{b_k}}$ e poi usare [\[rich.24\]](#) (criterio del confronto).

Un'altra soluzione è la seguente. Supponiamo che $\sum a_k$ converga. Ne segue che $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{\frac{1}{b_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k b_k = 0$. Dalla relazione fra $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ segue $a_k b_k \leq a_{k+1} b_{k+1}$ e quindi è crescente. Ammette limite che non può essere zero.

La proposizione inversa può essere dimostrata prendendo $b_k = S_k/a_k$. Infatti $\sum b_k = \sum \frac{a_k}{S_k} = +\infty$ da [\[rich.8\]](#) e $b_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - b_{k+1} = \frac{S_k - S_{k+1}}{a_{k+1}} \leq 0$

74.8.2 Supponiamo che $a_k \rightarrow L$. Chiaramente i limiti i) e ii) valgono L . La condizione i) è sufficiente. Sia $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Abbiamo

$$T_{n+r} = \frac{nT_n}{n+r} + \frac{1}{n+r} \sum_{k=n+1}^{n+r} a_k \quad na_n \leq ka_k \leq (n+r)a_{n+r}$$

Ne segue

$$\frac{n}{n+r}a_n \leq \frac{n}{k}a_n \leq a_k \leq \frac{n+r}{k}a_{n+r} \leq \frac{n+r}{n}a_{n+r}$$

$$\frac{nr}{(n+r)^2}a_n \leq T_{n+r} - \frac{nT_n}{n+r} \leq \frac{r}{n}a_{n+r}$$

Se $T_k \rightarrow L$, supponiamo che $n \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow +\infty$ in modo tale che $n/r \rightarrow B$. Otteniamo

$$\frac{B}{B+1}L \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \frac{B+1}{B}L$$

da cui il risultato mandando $B \rightarrow +\infty$.

La ii) non è sufficiente. Sia $a_{2^k} = 1$ se k acce pari e $a_{2^k} = 1/2$ se k acce dispari. $2^k a_{2^k}$ è monotona non decrescente. Dato m intero, sia j_k l'intero tale che 2^{j_k} è la potenza di due più vicina a $m2^k$. Se j_k è pari definiamo $a_{m2^k} = 1$ mentre $a_{m2^k} = 1/2$ se j_k è dispari. Se m è una potenza di due, quindi $m2^k = 2^{k'}$, la distanza di $m2^k$ dai primi vicini potenza di due è uguale ma in tal caso il valore di a_{2^k} è fissato. Per gli altri valori di a_k li definiamo in modo che ka_k sia globalmente monotona. Quello che si ottiene è $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{m2^k} = 1/2$.

Un altro modo è il seguente: sia ka_k pari a quella potenza 2^{n_k} tale che $2^{n_k} \leq k$. Chiaramente $a_{2^k} \equiv 1$ mentre $(2^k - 1)a_{2^k - 1} = 2^{p_k}$ e $2^{p_k} \leq 2^k - 1$ da cui $p_k = k - 1$. Ne segue $(2^k - 1)a_{2^k - 1} = 2^{k-1}$ per cui $a_{2^k - 1} \rightarrow 1/2$. Sia inoltre r intero tale che $2^r \leq m \leq 2^{r+1}$.

$$m2^k a_{m2^k} = 2^{q_k}, \quad 2^{q_k} \leq m2^k \leq 2^{r+1+k} \implies q_k = r + k \implies a_{m2^k} \leq 2^r / m$$

e

$$m2^k a_{m2^k} \underset{\text{monotonia di } ka_k}{\geq} 2^{r+k} a_{2^{r+k}} = 2^{r+k} \cdot 1 \implies a_{m2^k} \geq 2^r / m$$

Quindi a_{m2^k} non dipende da k e $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{m2^k} = 2^r / m$

75.8.2 Senza perdere di generalità possiamo supporre $l = 0$, $K = 1$ ed inoltre che sia vera $n(a_n - a_{n+1}) < 1$. Se infatti è vera la prima di ii), passando a $c_n \doteq (a_n - l)/K$ otteniamo $l = 0$ e $K = 1$ e $n(c_n - c_{n+1}) < 1$. Se invece è vera la seconda di ii) passando a $d_n = (l - a_n)/K$ abbiamo $l = 0$, $K = 1$ e $n(d_n - d_{n+1}) < 1$ lo stesso.

$a_{n+1} = (n+1)b_{n+1} - nb_n$ cosicché $b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} - b_{n+1})/n$ da cui

$$b_{m+p} - b_m = \frac{a_{m+1} - b_{m+1}}{m} + \frac{a_{m+2} - b_{m+2}}{m+1} \dots + \frac{a_{m+p} - b_{m+p}}{m+p-1}$$

Chiaramente $|b_n| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$.

Abbiamo bisogno del

Lemma Se $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n \leq \overline{\lim} b_n \leq \overline{\lim} a_n$

Dimostrazione del Lemma Sia $L \doteq \overline{\lim} b_n \geq 0$ e quindi $b_n < L + \varepsilon$ definitivamente e frequentemente $b_n > L - \varepsilon$ per cui esiste una successione n_k tale che $a_1 + \dots + a_{n_k} > n_k(L - \varepsilon)$.

Supponiamo $L' \doteq \overline{\lim} a_n < L$ quindi definitivamente $a_n < L' + \varepsilon$. Segue $a_1 + \dots + a_{n_k} < n_k(L' + \varepsilon)$ che è impossibile non appena $L' + \varepsilon < n_k(L - \varepsilon)$ ossia $L - L' > 2\varepsilon$ sempre possibile. Analoga è la dimostrazione dell'altra parte della disuguaglianza ■

Siccome la nostra ipotesi è che $b_n \rightarrow 0$, dal Lemma segue che $\underline{\lim} a_n \leq 0 \leq \overline{\lim} a_n$.

(α) $\underline{\lim} a_n = 0 = \overline{\lim} a_n \implies a_n \rightarrow 0$ (β) $\underline{\lim} a_n \leq 0, \overline{\lim} a_n > 0$ (γ) $\underline{\lim} a_n < 0, \overline{\lim} a_n \geq 0$

Se è vera (α) la questione è chiusa. Vogliamo mostrare che le altre due non possono capitare procedendo per assurdo. Sia vera (β). $\overline{\lim} a_n > 0$ implica che esiste una successione $\{n_k\}$ di numeri interi tali che $a_{n_k} > 2\lambda > 0$ per un certo λ . $\underline{\lim} a_n \leq 0$ vuol dire che esiste una successione $\{r_k\}$ di interi tali che $a_{r_k} < \lambda$. Detti $\overline{\lim} a_n = L$ e $\underline{\lim} a_n = l$ sappiamo che

$$\text{def.te } l - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \text{freq.te } a_n > L - \varepsilon \quad a_n < l + \varepsilon \leq \varepsilon$$

Ora prendiamo $\lambda = L/3$ ed otteniamo freq.te $a_n > 2\lambda$ e $a_n \leq \lambda$

Sia $m + 1 \in \{n_k\}$ un intero tale che $m > n_\varepsilon$ e sia $m + p \in \{r_k\}$ più vicino a m . Chiaramente $a_{m+1} > 2\lambda$ e $a_{m+p+1} < \lambda$ ed inoltre $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots, a_{m+p} \geq \lambda$ essendo $m + p + 1$ il più piccolo intero successivo a $m + 1$ tale che $a_{m+p+1} < \lambda$.

$$a_{m+1} - b_{m+1} \geq \lambda - \varepsilon, \quad a_{m+2} - b_{m+2} \geq \lambda - \varepsilon, \dots, \quad a_{m+p} - b_{m+p} \geq \lambda - \varepsilon$$

se λ è piccolo abbastanza e $m + 1 > n_\varepsilon$. Ne segue

$$b_{m+p} - b_m \geq (\lambda - \varepsilon) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m+p+1} \right) > \frac{p(\lambda - \varepsilon)}{m+p}$$

Inoltre

$$a_{m+1} - a_{m+p+1} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+p} < \frac{p}{m}$$

Ora otteniamo

$$2\lambda - \lambda < a_{m+1} - a_{m+p+1} < \frac{p}{m} \implies \frac{p}{m+p} > \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

da cui

$$b_{m+p} - b_m > \frac{\lambda(\lambda - \varepsilon)}{1 + \lambda}$$

Siccome $m > n_\varepsilon$, si ha $|b| < \varepsilon$, e $|b_{m+p}| < \varepsilon$ da cui $|b_{m+p} - b_m| < 2\varepsilon$ e quindi $2\varepsilon(1 + \lambda) > \lambda(\lambda - \varepsilon)$ ossia $\varepsilon(2 + 3\lambda) > \lambda^2$ e questo è impossibile se ε è piccolo abbastanza.

Sia ora vera (γ), $\underline{\lim} a_n < 0, \overline{\lim} a_n \geq 0$.

Da $\underline{\lim} a_n < 0$, possiamo ricavare una successione $\{n_k\}$ tale che $a_m < -2\lambda$ per un certo λ e per ogni $m \in \{n_k\}$. Sia inoltre $m + p$ il più piccolo intero tale che $a_{m+p} > -\lambda$. Chiaramente

$$a_{m+1} \leq -\lambda, \quad a_{m+2} \leq -\lambda, \dots, \quad a_{m+p} \leq -\lambda$$

$$a_{m+1} - b_{m+1} \leq -\lambda + \varepsilon, \quad a_{m+2} - b_{m+2} \leq -\lambda + \varepsilon, \dots, \quad a_{m+p} - b_{m+p} \geq -\lambda + \varepsilon$$

se λ è piccolo abbastanza e $m + 1 > n_\varepsilon$. Sempre partendo da

$$b_{m+p} - b_m = \frac{a_{m+1} - b_{m+1}}{m} + \frac{a_{m+2} - b_{m+2}}{m+1} \dots + \frac{a_{m+p} - b_{m+p}}{m+p-1}$$

ne segue

$$b_{m+p}-b_m \leq (-\lambda+\varepsilon) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m+p+1} \right) < \frac{p(-\lambda+\varepsilon)}{m+p} \iff b_m-b_{m+p} > \frac{p(\lambda-\varepsilon)}{m+p}$$

$$a_m - a_{m+p} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+p} < \frac{p}{m}$$

Da qui in poi è come nel caso precedente.

fine della dimostrazione

- Supponiamo che si abbia $n(a_{n+1} - a_n) = o(1)$. La dimostrazione è molto più semplice.

$$\begin{aligned} a_n - \frac{A_n}{n} &= a_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j - a_{j-1} = a_n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n a_j - a_{j-1} = \\ &= a_n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})(n - j + 1) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})(n - j + 1) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})(j - 1) \end{aligned}$$

Ora applichiamo Cesàro–Stolz e studiamo il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_{n-1})(n - 1)$ che chiaramente

tende a zero e quindi $A_n/n - a_n \rightarrow 0$ dal momento che $n(a_n - a_{n-1}) = o(1)$ implica $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})(j - 1) \rightarrow 0$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n/n$.

Se fosse $n(a_{n+1} - a_n) \rightarrow l \neq 0$ avremmo $a_n - A_n/n \rightarrow l$ e quindi $a_n - A_n/n \not\rightarrow 0$. Questo vuol dire che se $n(a_{n+1} - a_n) \rightarrow l \neq 0$, A_n/n non potrebbe convergere ad un numero finito in quanto $n(a_{n+1} - a_n)$ sarebbe limitata e varrebbe il risultato dimostrato. Infatti possiamo scrivere nel caso $n(a_{n+1} - a_n) \rightarrow l \neq 0$ (prendiamo $l > 0$)

$$a_{n_0+1} > a_{n_0} + \frac{l-\varepsilon}{n_0}, \quad a_{n_0+2} > a_{n_0} + \frac{l-\varepsilon}{n_0} + \frac{l-\varepsilon}{n_0+1} \dots a_{n_0+n} > a_{n_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l-\varepsilon}{n_0+k} \rightarrow +\infty$$

- Su [MGLP] la condizione $n(a_n - a_{n+1})$ limitata superiormente o inferiormente è sostituita da $\sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) = o(n)$ che una volta inserita in $a_n - \frac{A_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})(j - 1)$ conduce subito alla convergenza di a_n sapendo che A_n/n converge.

76.8.2 Essendo la successione $n(a_{n+1} - a_n)$ monotona converge ad un numero finito oppure diverge.

Se converge a zero ricadiamo nel caso precedente.

Se converge ad $l > 0$ abbiamo visto che $A_n/n \rightarrow +\infty$. Ora riprendiamo la formula precedente

$$a_n - \frac{A_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})(j - 1) \text{ e da Cesàro–Stolz } \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})(j - 1) \rightarrow l \text{ per cui}$$

$$a_n - \frac{A_n}{n} \rightarrow l \text{ da cui } a_n \rightarrow +\infty.$$

Se diverge ad esempio a $+\infty$ riotteniamo $A_n/n \rightarrow +\infty$ e a maggior ragione $a_n \rightarrow +\infty$

77.8.2 Sia per ipotesi $S_k = a_1 + \dots + a_k, \rightarrow S$ $a_k \geq a_{k+1} \rightarrow 0$. $c_k \doteq S_k/a_k - k$, $b_k \doteq 1/a_k$.
 $c_k/b_k = S_k - ka_k$,

$$\frac{c_k - c_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} = \frac{\frac{S_k}{a_k} - k - \frac{S_{k-1}}{a_{k-1}} + k - 1}{\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}}} = S_{k-1} \rightarrow S$$

Ne segue $c_k/b_k \rightarrow S$ e quindi $ka_k \rightarrow 0$.

78.8.2 Dalla stima $\frac{a_k}{S_k} \leq \frac{a_k}{a_1}$ segue che se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum \frac{a_k}{S_k}$. Supponiamo ora che $\sum a_k$ diverge. Per far vedere che $\sum \frac{a_k}{S_k}$ non converge è sufficiente (anche necessario per la verità) far vedere che non è di Cauchy la successione $\frac{a_k}{S_k}$. Dobbiamo dunque mostrare

$$\text{che } \exists \varepsilon > 0 : \forall k \exists N > 0 : \sum_{j=k+1}^{N+k} \frac{a_j}{S_j} \geq \varepsilon. \quad \sum_{j=k+1}^{N+k} \frac{a_j}{S_j} \geq \frac{1}{S_{N+k}} \sum_{j=k+1}^{N+k} a_j = \frac{S_{N+k} - S_k}{S_{N+k}} = 1 - \frac{S_k}{S_{N+k}}.$$

Essendo la serie di partenza divergente e a termini positivi, si può prendere N abbastanza grande

da avere $\frac{S_k}{S_{N+k}} \leq \frac{1}{2}$ e quindi $\sum_{j=k+1}^{N+k} \frac{a_j}{S_j} \geq \frac{1}{2}$. Ne segue la tesi.

Dalla conclusione segue: data $a_k > 0$ e $\sum a_k = +\infty$, esiste sempre una serie positiva divergente $\sum b_k$ tale che $b_k > 0$ e $\lim \frac{a_k}{b_k} = +\infty$. La successione $\{b_k\}$ sarebbe $\frac{a_k}{A_k}$ chiaramente ma non è certo l'unica successione possibile. Guardando [\[Rich.1\]](#), se ne trova un'altra senza far ricorso al presente risultato.

- Se a_k converge allora $S_k \rightarrow l$ e quindi $\frac{a_k}{S_k^{1-\delta}} \leq C_{l,\delta} a_k$ per una opportuna costante $C_{l,\delta}$ (facilmente identificabile) da cui la convergenza.
- Se $\sum a_k$ diverge allora $S_k \rightarrow +\infty$ e quindi $\frac{a_k}{S_k^{1-\delta}} \geq \frac{a_k}{S_k}$ da cui la divergenza grazie al punto precedente
- La serie $\sum a_k$ che segue converge ma $\sum a_k/S_k$ diverge.

Sia $z_k = (-1)^{k-1}/\ln(k+1) \doteq (-1)^{k-1}a_k$ la cui serie $\sum z_k$ ovviamente converge

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k+1)} > \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} > 0 \text{ ed il limite } s \text{ di } s_n \text{ è positivo. Inoltre abbiamo } s_{2n} < s < s_{2n+1}$$

Dimostriamo che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}a_k}{s_k}$ diverge.

$$\frac{1}{s_k} = \frac{1}{s} \left(\frac{s}{s_k} - 1 \right) + \frac{1}{s} \text{ quindi}$$

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{k-1}a_k}{s_k} \right| \geq \frac{1}{s} \left| \sum_{k=m}^n (-1)^{k-1}a_k \left(\frac{s-s_k}{s_k} \right) \right| - \left| \sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{k-1}a_k}{s} \right|.$$

$$\frac{1}{s} \left| \sum_{k=m}^n (-1)^{k-1}a_k \right| < \varepsilon \text{ per ogni } n, m \text{ grande abbastanza. } (-1)^{k-1}a_k \left(\frac{s-s_k}{s_k} \right) < 0 \text{ per ogni } k$$

$$\text{quindi } \left| \sum_{k=m}^n (-1)^{k-1}a_k \left(\frac{s-s_k}{s_k} \right) \right| = \sum_{\substack{k=m \\ \text{keven}}}^n a_k \left(\frac{s-s_k}{s_k} \right) + \sum_{\substack{k=m \\ \text{kodd}}}^n a_k \left(\frac{s_k-s}{s_k} \right)$$

Dimostriamo che per ogni m esiste n grande abbastanza tale che

$$\sum_{\substack{k=m \\ \text{keven}}}^n a_k \left(\frac{s-s_k}{s_k} \right) + \sum_{\substack{k=m \\ \text{kodd}}}^n a_k \left(\frac{s_k-s}{s_k} \right) \geq \frac{1}{2}$$

Facciamo uso di

- 1) $s_k \leq 2s$ per ogni k grande abbastanza
- 2) $x - x^2 \leq \ln(1+x)$ per ogni x piccolo abbastanza e positivo

$$s - s_{2p} = \sum_{r=2p+1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\ln(r+1)} = \frac{1}{\ln(2p+2)} - \frac{1}{\ln(2p+3)} + \frac{1}{\ln(2p+4)} - \frac{1}{\ln(2p+5)} + \dots$$

Se p è grande abbastanza, da 1), 2) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(2p+N)} - \frac{1}{\ln(2p+N+1)} &= \frac{\ln(1 + \frac{1}{2p+N})}{\ln(2p+N) \ln(2p+N+1)} \geq \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2p+N} - \left(\frac{1}{2p+N} \right)^2 \right) (\ln(2p+N))^{-2} &\geq \\ \geq \frac{1}{4} (2p+N)^{-1} (\ln(2p+N))^{-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s - s_{2p} &\geq \frac{1}{4} \int_2^{\infty} \frac{dx}{(2p+x)(\ln(2p+x))^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\ln(2p+2)} \\ \sum_{\substack{k=m \\ \text{even}}}^n a_k \left(\frac{s-s_k}{s_k} \right) &\geq \frac{1}{2s} \frac{1}{4} \sum_{\substack{k=m \\ \text{even}}}^n \frac{1}{\ln(k+2)} \frac{1}{\ln(k+1)} \end{aligned}$$

Ne segue che per ogni m , esiste n grande abbastanza tale che $\frac{1}{s} \sum_{\substack{k=m \\ \text{even}}}^n a_k \left(\frac{s-s_k}{s_k} \right) \geq \frac{1}{2}$ e a sua

volta implica $\left| \sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{k-1} a_k}{s_k} \right| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$

• La serie $\{a_k\}$ che segue diverge ma $\sum a_k/S_k$ converge. *La dimostrazione proviene dalla soluzione inserita nella rivista di pubblicazione del problema.* La soluzione del presente problema sembra essere più complicata della precedente in quanto, dovendo convergere $\sum a_k/S_k$, una buona parte degli S_k debbono, per così dire, “mettere le cose a posto” nella serie $\sum a_k/S_k$. In altre parole è facile inventare una serie $\sum a_k$ divergente a segno non definito ma poi gli S_k debbono essere tali che l'altra serie converga. Lo stratagemma consiste, per così dire, nell'invertire le parti. Osserviamo che

$$b_k \doteq \frac{a_k}{S_k} = \frac{a_k}{a_k + S_{k-1}} = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k} = 1 - \frac{S_{k-1}}{S_k}$$

e quindi $S_k = \frac{S_{k-1}}{1-b_k} = \dots = \frac{S_1}{(1-b_k)(1-b_{k-1})\dots(1-b_2)}$. Si noti che essendo $S_k \neq 0$ per ipotesi, $b_k \neq 1$. Se S_k convergesse ad un valore, allora convergerebbe anche il prodotto $(1-b_k)(1-b_{k-1})\dots(1-b_2)$ e quindi convergerebbe pure la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln|1-b_k|$. Basta prendere

$b_k = (-)^k/\sqrt{k}$ per vedere che ciò non è vero.

79.8.2 La serie $\sum a_k$ può convergere ad un valore S oppure divergere a $+\infty$. Supponiamo che converga a S . In tal caso abbiamo $\sum \frac{a_k}{S_k^{1+\delta}} \leq \sum \frac{a_k}{a_1^{1+\delta}} < +\infty$

Supponiamo che $\sum a_k$ diverga.

Prima dimostrazione Da [HLP] pag.121,

$$\sum \frac{a_k}{S_k^{1+\delta}} = \sum \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k S_k^\delta}$$

Dalla convessità della funzione $1/x^\delta$ si ha

$$\frac{1}{S_{k-1}^\delta} \geq \frac{1}{S_k^\delta} - \frac{\delta}{S_k^{1+\delta}}(S_{k-1} - S_k) \iff \frac{(S_k - S_{k-1})}{S_k^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{S_{k-1}^\delta} - \frac{1}{S_k^\delta} \right)$$

Quello che segue è l'argomento in [HLP].

$$\sum \frac{a_k}{S_k^{1+\delta}} \leq \sum \frac{a_k}{S_k S_{k-1}^\delta} = \sum \frac{\delta(S_k - S_{k-1})S_k^{\delta-1}}{\delta S_k^\delta S_{k-1}^\delta} \leq \sum \frac{S_k^\delta - S_{k-1}^\delta}{\delta S_k^\delta S_{k-1}^\delta} \leq \sum \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{S_{k-1}^\delta} - \frac{1}{S_k^\delta} \right)$$

che chiaramente tende a un limite essendo una somma telescopica in cui il termine generale tende a zero per ipotesi. Supponendo che $0 < \delta < 1$, si è usata la disuguaglianza $rx^{r-1}(x-y) \leq x^r - y^r$ con $x > y > 0$ e $0 < r < 1$ che è conseguenza di $1 - x^p \geq p(1 - x)$ con $0 < p < 1$ e $0 < x < 1$ ossia della concavità di x^p

Se fosse $\delta \geq 1$ allora basta osservare che $\frac{a_k}{S_k^{1+\delta}} \leq \frac{a_k}{S_k^{1+\delta'}}$ con $0 < \delta' < 1$.

Seconda dimostrazione

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S_k^{1+\delta}} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k^{1+\delta}} \leq \sum_{k=1}^n \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dx}{x^{1+\delta}} = \int_{S_0}^{S_n} \frac{dx}{x^{1+\delta}} \leq \int_{S_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}}$$

80.8.2 Sia $d_k = k^k$.

$$S_n = n^n \left(1 + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \frac{(n-2)^{n-2}}{n^n} + \dots + 1 \right) \leq n^n \left(1 + \frac{(n-1)^n}{n^n} \right) \leq n^n \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

e quindi
$$\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{S_{k-1}^\alpha} \geq \frac{e^\alpha}{(e-1)^\alpha} \frac{n^n}{(n-1)^{\alpha(n-1)}}$$

81.8.2 Vediamo la divergenza. Certamente basta considerare $\alpha = 0$. Abbiamo

$$\sum_{k=p}^q \frac{c_k}{r_{k-1}} = \sum_{k=p}^q \frac{r_{k-1} - r_k}{r_{k-1}} \geq \frac{1}{r_{p-1}} \sum_{k=p}^q r_{k-1} - r_k = \frac{r_{p-1} - r_q}{r_{p-1}} = 1 - \frac{r_q}{r_{p-1}} \geq \frac{1}{2}$$

se q è grande abbastanza.

Vediamo ora la convergenza. Sia $\alpha = -|\alpha|$. Se $|\alpha| \geq 1$ non c'è nulla da dimostrare in quanto $r_k \rightarrow 0$. Supponiamo che $0 < |\alpha| < 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q \frac{c_k}{r_{k-1}^{1-|\alpha|}} &= \sum_{k=p}^q \frac{r_{k-1} - r_k}{r_{k-1}^{1-|\alpha|}} = \sum_{k=p}^q r_{k-1}^{|\alpha|} \left(1 - \frac{r_k}{r_{k-1}} \right) \leq \sum_{k=p}^q r_{k-1}^{|\alpha|} \frac{1}{|\alpha|} \left[1 - \frac{r_k^{|\alpha|}}{r_{k-1}^{|\alpha|}} \right] = \\ &= \sum_{k=p}^q \frac{1}{|\alpha|} \left[r_{k-1}^{|\alpha|} - r_k^{|\alpha|} \right] = \frac{1}{|\alpha|} (r_{p-1}^{|\alpha|} - r_q^{|\alpha|}) < \varepsilon \end{aligned}$$

essendo la serie $\sum c_n$ convergente.

È interessante notare come il risultato [\[rich.21\]](#), nel caso che $S_n \rightarrow +\infty$, segua da quello appena scritto. Definiamo $s_n \doteq 1/r_n$ e sappiamo che $r_n \rightarrow 0$. Abbiamo $c_n = r_{n-1} - r_n = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} \doteq \frac{d_n}{s_n s_{n-1}}$. Ne segue che $\frac{c_n}{r_{n-1}^{1+\alpha}} = \frac{d_n}{s_n s_{n-1}^{-\alpha}}$ e $\alpha < 0$ ed otteniamo esattamente la formula nella soluzione di [\[rich.21\]](#).

82.8.2 Sia $\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. $\sum a_k f(S_k) = \sum (S_k - S_{k-1})f(S_k) \leq \sum \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(x)dx < \infty$

e quindi la convergenza di $\sum a_k f(S_k)$.

Sia ora $\int^{+\infty} f(x)dx = +\infty$. $\sum a_k f(S_{k-1}) = \sum (S_k - S_{k-1})f(S_{k-1}) \geq \sum \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(x)dx = \infty$

e quindi la divergenza di $\sum a_k f(S_{k-1})$.

- $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $a_k = 2^{k^2}$, $S_k > 2^{k^2}$
- $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, $a_k = 2^{k^2}$, $S_{k-1} > 2^{(k-1)^2}$

83.8.2 Supponiamo che $f(x) = O(x)$ e quindi $f(x) \leq Ax$. Supponiamo inoltre che $\sum a_k = +\infty$, $a_k > 0$. Si ha $\sum \frac{a_k}{f(S_k)} \geq \sum \frac{a_k}{AS_k}$ e quest'ultima serie diverge per il criterio di Abel-Dini.

Viceversa supponiamo che $\sum \frac{a_k}{f(S_k)} = +\infty$ per qualsiasi serie positiva divergente $\sum a_k$ e per

assurdo supponiamo che $f(x) \neq O(x)$ e quindi esiste una successione $x_k \rightarrow +\infty$ tale che $f(x_k) \geq 2^k x_k$ (la scelta di 2^k è arbitraria). Definiamo la successione $\{a_k\} \stackrel{\text{def}}{=} x_k - x_{k-1}$. Si ha $\sum \frac{a_k}{f(x_k)} =$

$\sum \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \frac{x_k}{f(x_k)} \leq \sum 2^{-k}$ il che è assurdo per ipotesi.

84.8.2 Abbiamo la relazione $\sum f(S_k)a_k \leq \int f(x)dx \leq \sum f(S_{k-1})a_k$ per cui se dimostriamo che dalla convergenza di $\sum f(S_k)a_k$ segue quella di $\sum f(S_{k-1})a_k$ segue il risultato.

1) Sia a_k limitata ossia $a_k \leq A$ e supponiamo che $\sum a_k f(S_k)$ converga.

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(S_{k-1})a_k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{k-1}) - f(S_k))a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} f(S_k)a_k$$

$\sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{k-1}) - f(S_k))a_k \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{k-1}) - f(S_k))A$ ed essendo telescopica tale somma è pari a

$Af(S_{k_0-1})a_{k_0-1}$ usando il fatto che la funzione $f \searrow 0$

2) Sia $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq A$.

$$\sum a_k f(S_{k-1}) = \sum f(S_{k-1}) \frac{a_k}{a_{k-1}} a_{k-1} \leq A \sum f(S_{k-1}) a_{k-1} < +\infty$$

per cui converge $\sum a_k f(S_{k-1})$

La successione $a_k = k^{2k}$ e la funzione $f(x) = 1/(x \ln^2 x)$ soddisfano $\sum f(S_k)a_k < +\infty$ e $\sum f(S_{k-1})a_k = +\infty$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^{2k} &= n^{2n} \sum_{k=1}^n \frac{k^{2k}}{n^{2n}} = n^{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^{2(n-k)}}{n^{2n}} < n^{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^{2n}}{n^{2n}} < n^{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{2n} < \\ &< n^{2n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-2k} = Cn^{2n} \end{aligned}$$

$$n^{2n} < S_n = \sum_{k=1}^n k^{2k} < en^{2n}$$

$$\sum \frac{k^{2k}}{S_k \ln^2(S_k)} \leq \sum \frac{k^{2k}}{k^{2k} (2k)^2 \ln^2 k} < +\infty$$

$$\sum \frac{k^{2k}}{S_{k-1} \ln^2(S_{k-1})} \geq \sum \frac{k^{2k}}{e(k-1)^{2k-2} (2k-2)^2 (\ln(k-1+e))^2} = +\infty$$

3) **Calcoli inconclusivi. Dubbi sulla correttezza dell'affermazione** Sia ora $\frac{S_k}{S_{k-1}} \leq A$ ma supponiamo $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ illimitata perché altrimenti vale 2). Inoltre $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \neq +\infty$ perché per Cesàro-Stolz $S_{k+1}/S_k \rightarrow +\infty$. Quindi a_{k+1}/a_k illimitata senza che il limite esista ma S_{k+1}/S_k limitata.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n f(S_{k-1})(S_k - S_{k-1}) &= \sum_{k=m}^n f(S_{k-1})S_{k-1} \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 \right) \leq \sum_{k=m}^n f(S_{k-1})S_{k-1}(A - 1) = \\ &= \sum_{k=m}^n f(S_{k-1})(a_{k-1} + S_{k-2})(A - 1) \leq \sum_{k=m}^n f(S_{k-1})a_{k-1}(A - 1) + \sum_{k=m}^n f(S_{k-2})S_{k-2}(A - 1) \end{aligned}$$

ma non è detto che $\sum_{k=m}^n f(S_{k-2})S_{k-2}$ sia piccola.

Una possibile condizione è $S_k \leq Ca_k$ che darebbe $\sum_{k=m}^n f(S_{k-2})S_{k-2} \leq \sum_{k=m}^n f(S_{k-2})a_{k-2} < \varepsilon$.

85.8.2 $(\arccos x)' = -(1-x^2)^{-1/2}$, $(\arccos x)'' = -x(1-x^2)^{-3/2}$ da cui $\arccos x \geq 1-x$ per $0 \leq x \leq 1$ e quindi $\sum_{n=p}^q \arccos \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \sum_{n=p}^q 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_{q+1}} \sum_{n=p}^q (a_{n+1} - a_n) = 1 - \frac{a_p}{a_{q+1}} \geq 1/2$ se q è grande abbastanza.

86.8.2 $(\arccos^2 x)' = \frac{-2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'' = \frac{2(-\sqrt{1-x^2} + x \arccos x)}{(1-x^2)^{3/2}} \doteq \frac{F(x)}{(1-x^2)^{3/2}}$
 $F'(x) = \arccos x < 0$ ed essendo $F(0) = -1$, $F(1) = 0$ segue che $F(x) \leq 0$ e quindi $(\arccos x)^2$ è concava. Inoltre $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = -2$ e quindi $(\arccos x)^2 \leq 2(1-x)$ da cui

$$\sum_{k=p}^q \arccos^2 \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq \sum_{k=p}^q 1 - \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq \sum_{k=p}^q \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}} \leq \frac{a_{q+1} - a_p}{a_{p+1}} < \varepsilon \text{ se } a_k \rightarrow L \in \mathbf{R}$$

Sia ora $a_k \nearrow +\infty$. D'altra parte $(\arccos x)^2 \geq \pi(1-x)/4$ per le stesse ragioni di prima e quindi

$$\sum_{k=p}^q \arccos^2 \frac{a_k}{a_{k+1}} \geq \frac{\pi}{4} \sum_{k=p}^q 1 - \frac{a_k}{a_{k+1}} \geq \frac{\pi}{4} \sum_{k=p}^q \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}} \geq \frac{a_{q+1} - a_p}{a_{q+1}} \geq \frac{1}{2} \text{ se } a_k \rightarrow +\infty$$

87.8.2 1) $\implies$ 2).

$$0 \leq \sum_{k=r}^s \frac{a_k}{k^p} = \frac{A_s}{s^p} - \frac{A_{r-1}}{(r-1)^p} + \sum_{k=r}^s A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^p} - \frac{1}{k^p} \right] \leq \varepsilon$$

Da [rich.35](#) $A_s/s^p \rightarrow 0$ e $A_{r-1}/(r-1)^p \rightarrow 0$ con $a_k = 1/k^p$ e $b_k = a_k$

$$\left| \frac{A_s}{s^p} - \frac{A_{r-1}}{(r-1)^p} \right| \leq \frac{A_s}{s^p} + \frac{A_{r-1}}{(r-1)^p} < \frac{\varepsilon}{2} \implies 0 \leq \sum_{k=r}^s A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^p} - \frac{1}{k^p} \right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k=r-1}^{s-1} A_k \left[\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p} \right] > \sum_{k=r-1}^{s-1} \frac{2pA_k}{k^{p+1}} > 0 \text{ da cui il risultato}$$

Sia $q > 1$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=r}^s \frac{a_{k^q}}{(k^q)^p} \leq \sum_{k=r}^s \frac{A_{k^q} - A_{(k-1)^q}}{k^{pq}} = \sum_{k=r}^s \frac{A_{k^q}}{k^{pq}} - \frac{A_{(k-1)^q}}{(k-1)^{pq}} + \sum_{k=r}^s \frac{A_{(k-1)^q}}{(k-1)^{pq}} - \frac{A_{(k-1)^q}}{k^{pq}} = \\ &= \frac{A_{s^q}}{s^{qp}} - \frac{A_{(r-1)^q}}{(r-1)^{qp}} + \sum_{k=r}^s A_{k^q-1} \left[\frac{1}{(k-1)^{pq}} - \frac{1}{k^{pq}} \right] < \varepsilon \end{aligned}$$

Per le stesse ragioni di prima $\frac{A_{s^q}}{s^{qp}} + \frac{A_{(r-1)^q}}{(r-1)^{qp}} < \frac{\varepsilon}{2}$ se $s \rightarrow s^q$, $r-1 \rightarrow (r-1)^q$, da cui

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{k=r}^s A_{k^q-1} \left[\frac{1}{(k-1)^{pq}} - \frac{1}{k^{pq}} \right] \geq \sum_{k=r}^s \frac{pqA_{k^q-1}}{k^{1+pq}} = \sum_{k=r}^s \frac{pqA_{k^q}}{k^{1+pq}} - \sum_{k=r}^s \frac{pqA_{s^q}}{k^{1+pq}}$$

ed essendo $\sum_{k=r}^s \frac{pqA_{s^q}}{k^{1+pq}} < \frac{\varepsilon}{2}$ si ha $\sum_{k=r}^s \frac{pqA_{k^q}}{k^{1+pq}} < \varepsilon$ da cui la tesi.

Possibile sviluppo dell'esercizio

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=r}^s \frac{a_{k^q}}{(k^q)^p} = \sum_{k=r}^s \frac{A_{k^q} - A_{k^q-1}}{k^{pq}} = \sum_{k=r}^s \frac{A_{k^q}}{k^{pq}} - \frac{A_{(k-1)^q}}{(k-1)^{pq}} + \sum_{k=r}^s \frac{A_{(k-1)^q}}{(k-1)^{pq}} - \frac{A_{k^q-1}}{k^{pq}} = \\ &= \frac{A_{s^q}}{s^{qp}} - \frac{A_{(r-1)^q}}{(r-1)^{qp}} + \sum_{k=r}^s A_{k^q-1} \left[\frac{1}{(k-1)^{pq}} - \frac{1}{k^{pq}} \right] + \sum_{k=r}^s \frac{1}{(k-1)^{pq}} [A_{(k-1)^q} - A_{k^q-1}] < \varepsilon \end{aligned}$$

Sapendo che

$$\begin{aligned} &\left| \frac{A_{s^q}}{s^{qp}} - \frac{A_{(r-1)^q}}{(r-1)^{qp}} + \sum_{k=r}^s A_{k^q-1} \left[\frac{1}{(k-1)^{pq}} - \frac{1}{k^{pq}} \right] \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{A_{s^q}}{s^{qp}} - \frac{A_{(r-1)^q}}{(r-1)^{qp}} \right| + \sum_{k=r}^s A_{k^q-1} \left[\frac{1}{(k-1)^{pq}} - \frac{1}{k^{pq}} \right] \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

dal calcolo precedente e quindi

$$\sum_{k=r}^s \frac{1}{(k-1)^{pq}} [A_{k^q-1} - A_{(k-1)^q}] \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^{pq}} [A_{k^q-1} - A_{(k-1)^q}] \text{ converge}$$

fine del possibile sviluppo

2) $\implies$ 3).

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=r}^s \frac{a_{Q^k}}{Q^{kp}} = \sum_{k=r}^s \frac{A_{Q^k} - A_{Q^{k-1}}}{Q^{kp}} \leq \sum_{k=r}^s \frac{A_{Q^k} - A_{Q^{k-1}}}{Q^{kp}} = \\ &= \sum_{k=r}^s \left[\frac{A_{Q^k}}{Q^{kp}} - \frac{A_{Q^{k-1}}}{Q^{(k-1)p}} \right] + \sum_{k=r}^s \frac{A_{Q^{k-1}}}{Q^{(k-1)p}} - \frac{A_{Q^{k-1}}}{Q^{kp}} = \frac{A_{Q^s}}{Q^{sp}} - \frac{A_{Q^{r-1}}}{Q^{(r-1)p}} + \sum_{k=r}^s \frac{A_{Q^{k-1}}}{Q^{(k-1)p}} \left(1 - \frac{1}{Q^p} \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

Come all'inizio

$$\frac{A_{Q^s}}{Q^{sp}} + \frac{A_{Q^{r-1}}}{Q^{(r-1)p}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=r}^s \frac{A_{Q^{k-1}}}{Q^{(k-1)p}} \left(1 - \frac{1}{Q^p}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ da cui la tesi}$$

2) $\implies$ 1). Sia $q = 1$ in 2). Da Abel

$$\sum_{k=r}^s \frac{a_k}{k^p} = \frac{A_s}{s^p} - \frac{A_{r-1}}{(r-1)^p} + \sum_{k=r}^s A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^p} - \frac{1}{k^p} \right]$$

$$0 \leq \sum_{k=r}^s A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^p} - \frac{1}{k^p} \right] \leq \sum_{k=r}^s \frac{p A_{k-1}}{(k-1)^{p+1}} < \varepsilon$$

$$2) \implies \varepsilon > \sum_{k=n}^{2n} \frac{A_k}{k^{1+p}} \geq \frac{1}{2n} \min_{n \leq k \leq 2n} (2n - n + 1) \frac{A_k}{k^p}$$

Sia $k = k_0$ il valore per il quale si ha il minimo.

$$\varepsilon \geq \frac{n+1}{2n} \frac{A_{k_0}}{k_0^p} = \frac{n-1}{2n} \frac{A_n + a_{n+1} + \dots + a_{k_0}}{n^p} \frac{n^p}{k_0^p} \implies \varepsilon \geq \frac{n+1}{2n} \frac{n^p}{k_0^p} \frac{A_n}{n^p} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{2^p} \frac{A_n}{n^p}$$

Sia $q > 1$. Abbiamo sempre

$$\sum_{k=r}^s \frac{a_k}{k^p} = \frac{A_s}{s^p} - \frac{A_{r-1}}{(r-1)^p} + \sum_{k=r}^s A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^p} - \frac{1}{k^p} \right]$$

e sia $n^q \leq s < (n+1)^q$. L'ipotesi 2) ora implica

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{2n} \frac{A_{k^q}}{k^{1+pq}} \geq \frac{1}{2n} \min_{n \leq k \leq 2n} (2n - n + 1) \frac{A_{k^q}}{k^{pq}}$$

e sia $k = k_0$ il valore del minimo per cui

$$\varepsilon \geq \frac{n+1}{2n} \frac{A_{k_0^q}}{k_0^{pq}} \geq \frac{1}{2} \frac{A_{n^q} + a_{n^q+1} + \dots + a_{(2n)^q}}{n^{pq}} \frac{n^{pq}}{k_0^{pq}} \implies \varepsilon \geq \frac{1}{2} \frac{A_{n^q}}{n^{pq}} \frac{1}{2}$$

Poi è rimasta da dimostrare

$$0 \leq \sum_{k=r}^s A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^p} - \frac{1}{k^p} \right] \leq \sum_{k=r}^s \frac{p A_{k-1}}{(k-1)^{p+1}} < \varepsilon \iff \sum_{k=r-1}^{s-1} \frac{p A_k}{k^{p+1}} < \varepsilon$$

Sia $m^q \leq r < (m+1)^q$, $n^q \leq r < (n+1)^q$ da cui

$$\sum_{k=r}^s \frac{A_k}{k^{p+1}} \leq \sum_{k=m}^n \sum_{k^q \leq r < (k+1)^q - 1} \frac{A_r}{r^{1+p}} \leq \sum_{k=m}^n \frac{A_{(k+1)^q} - A_{k^q-1}}{k^{q+pq}} \leq \sum_{k=m}^n \frac{A_{(k+1)^q} + A_{k^q-1}}{k^{1+pq}} \leq \varepsilon$$

data la convergenza della serie $\sum A_{k^q}/k^{1+pq}$

88.8.2 Da Abel

$$\sum_{k=m}^n \frac{a_k}{k^{1+r}} = \frac{A_n}{n^{1+r}} - \frac{A_{m-1}}{(m-1)^{1+r}} + \sum_{k=m}^n A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^{1+r}} - \frac{1}{k^{1+r}} \right]$$

$$\frac{A_n}{n^{1+r}} \rightarrow 0 \text{ e}$$

$$\left| \sum_{k=m}^n A_{k-1} \left[\frac{1}{(k-1)^{1+r}} - \frac{1}{k^{1+r}} \right] \right| \leq \sum_{k=m}^n |A_{k-1}| \frac{(1+r)}{(k-1)^{2+r}} \leq \varepsilon \sum_{k=m}^n \frac{(1+r)}{(k-1)^{1+r}} \leq C\varepsilon$$

Con $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$ la convergenza non è assoluta. Infatti usando Abel si dimostra che $\sum_{n=1}^N (-1)^n \sqrt{n} \sim \sqrt{N}$ per cui $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (-1)^n \sqrt{n} \rightarrow 0$ ma $\sum \frac{|(-1)^n \sqrt{n}|}{n^{1+r}} = \sum \frac{\sqrt{n}}{n^{1+r}} = \sum \frac{1}{n^{1/2+r}} = +\infty$ se $1/2 + r \leq 1$ ossia $r \leq 1$.

Per quanto riguarda la convergenza di $\sum a_n/n$ basta prendere $a_n = 1/\ln n$

89.8.2 Disponiamo in ordine decrescente la successione a_k e sia $A_n = \{a_k: 1/(n+1) \leq a_k < 1/n\}$. Ora cominciamo a scegliere un elemento da ciascun gruppo A_n purché non vuoto. Se la serie così ottenuta è convergente, scartiamo la sottosuccessione a_{n_k} ottenuta. Siccome $\sum a_n = +\infty$, almeno una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ deve esistere altrimenti $\sum a_k < +\infty$. La monotonìa è essenziale.

Mettere il controesempio del libro

90.8.2 Prima dimostrazione (Hardy)

$$\frac{S_n^2}{n^2} = \left[a_n + \frac{S_n}{n} - a_n \right]^2 \leq 2a_n^2 + 2 \left(\frac{S_n}{n} - a_n \right)^2 = 4a_n^2 + 2 \frac{S_n^2}{n^2} - 4 \frac{a_n S_n}{n}$$

Inoltre $-2a_n S_n = -(S_n^2 - S_{n-1}^2) - a_n^2 \leq -(S_n^2 - S_{n-1}^2)$ quindi

$$-2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k S_k}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{-S_k^2 + S_{k-1}^2}{k} = -\frac{S_1^2}{1 \cdot 2} - \frac{S_2^2}{2 \cdot 3} - \frac{S_3^2}{3 \cdot 4} - \dots - \frac{S_{n-1}^2}{(n-1) \cdot n} - \frac{S_n^2}{n} \leq -\sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k(k+1)}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2} \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k(k+1)} = 4 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2(k+1)}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2} \left(1 - \frac{2}{k+1} \right) \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k^2$$

da cui la convergenza.

Il contrario non è vero. Basta prendere $a_k = 1/(k \ln k)$ e osservare che $S_k \sim \ln(\ln k)$ da cui $\sum 1/(k \ln k) = +\infty$ ma $S_k/k^2 \sim (\ln(\ln k))^2/k^2$ quindi la serie converge.

Hardy invece dà come esempio $a_k = \begin{cases} 1, & k = 2^p, p = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Nella referenza 3) gli autori dicono testualmente: *Hardy had plainly not realized that inequality*

$$(8) \left[\sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2} \left(1 - \frac{2}{k+1} \right) \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k^2 \right] \text{ can be used to derive the discrete Hardy inequality (1)}$$

$$\left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k^2}{k^2} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=1}^n a_k^2 \right] \text{ for } p = 2 \text{ and do so with the sharp constant } 4.$$

L'argomento (I.Schür) può essere migliorato al fine di ottenere

$$\sum_{k=1}^n \frac{S_k^2}{k^2} \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k^2$$

Prendiamo mN , $m = 2, 3, \dots$, al posto di N e definiamo $c_n = 1 - 2/(n+1)$. poi prendiamo

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = b_1, \quad a_{m+1} = \dots = a_{2m} = b_2, \dots, a_{m(N-1)+1} = \dots = a_{Nm} = b_N$$

e

$$\begin{aligned} 4m \sum_{n=1}^N b_n^p &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \frac{S_n^p}{n^p} c_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \left(\sum_{j=1}^{m k} a_j + \sum_{j=m k+1}^n a_j \right)^p \frac{c_n}{n^p} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \left(m b_1 + \dots + m b_k + \sum_{j=m k+1}^n a_j \right)^p \frac{c_n}{n^p} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} (m b_1 + \dots + m b_k + (n - m k) b_{k+1})^p \frac{c_n}{n^p} \end{aligned}$$

Siccome procediamo a blocchi di N , abbiamo

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} (m b_1 + \dots + m b_k + (n - m k) b_{k+1})^p \frac{c_n}{n^p} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (m b_1 + \dots + m b_k + m b_{k+1})^p \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \frac{1}{n^p} c_n \geq \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} m^p B_{k+1}^p \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \frac{c_n}{(m(k+1))^p} \geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{B_{k+1}^p}{(k+1)^p} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} c_n \end{aligned}$$

e $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} c_n = 1$ quindi otteniamo

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{B_n}{n} \right)^p \leq 4 \sum_{k=1}^N b_k^p$$

Seconda dimostrazione (Gandjot) Si basa sulla identità (è la (3) di pag.116 ma sembra sia sbagliata, manca $(A_n^2/n - A_{n-1}^2/(n-1))$)

$$\frac{2a_n A_n}{n} - \frac{A_n^2}{n^2} = \frac{A_n^2}{n} - \frac{A_{n-1}^2}{n-1} + (n-1) \left(\frac{A_n}{n} - \frac{A_{n-1}}{n-1} \right)^2$$

da cui

$$\sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{n^2} - \frac{2a_n A_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{-A_n^2}{n} + \frac{A_{n-1}^2}{n-1} - (n-1) \left(\frac{A_n}{n} - \frac{A_{n-1}}{n-1} \right)^2 = \frac{-A_N^2}{N^2} - \sum_{n=1}^N (n-1) \left(\frac{A_n}{n} - \frac{A_{n-1}}{n-1} \right)^2$$

da cui

$$\sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{n^2} \leq \sum_{n=1}^N \frac{2a_n A_n}{n} \leq 2 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \iff \sum_{k=1}^N \left(\frac{A_n}{n} \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^N a_k^2$$

Terza dimostrazione (Hardy) Abbiamo bisogno del seguente risultato

Se $\sum a_k^2 < +\infty$ e $\sum a_k A_k/k < +\infty$ allora $\sum A_k^2/k^2 < +\infty$

Dimostrazione Sia $U_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^2 \sim 1/n$. Da Abel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{A_k^2}{k^2} &= \sum_{k=1}^n A_k^2 (U_k - U_{k+1}) = \sum_{k=1}^n (A_k^2 U_k - A_{k+1}^2 U_{k+1}) + \sum_{k=1}^n U_{k+1} (A_{k+1}^2 - A_k^2) = \\ &= \frac{\pi^2 a_1^2}{6} - A_{n+1}^2 U_{n+1} + \sum_{k=1}^n U_{k+1} (2a_k A_k + a_k^2) \end{aligned}$$

$$A_n^2 U_n = U_n \left(\sum_{k=1}^n 1 \cdot a_k \right)^2 \leq U_n (\sqrt{n})^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \sim \sum_{k=1}^n a_k^2 < \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^n U_{k+1} (2a_k A_k + a_k^2) \leq \sum_{k=1}^n U_{k+1} 3a_k A_k \sim 3 \sum_{k=1}^n \frac{a_k A_k}{k} \leq 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k A_k}{k} \quad \blacksquare$$

Sia b_n un riarrangiamento decrescente della successione $\{a_n\}$. Chiaramente $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$.

Inoltre $B_n = b_1 + \dots + b_n \geq a_1 + \dots + a_n = A_n$ e quindi ci basta far vedere che $\sum B_k^2/k^2 < +\infty$. Assumiamo quindi che $\{a_k\}$ sia decrescente. Dal risultato precedente è sufficiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k A_k}{k} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{a_j a_k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k,j, \\ n \leq \frac{k}{j} < n+1}} \frac{a_j a_k}{k} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k,j, : n \leq \frac{k}{j} < n+1} \frac{a_j a_k}{j} < +\infty = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} \sum_{k: n \leq \frac{k}{j} < n+1} a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} j a_{jn} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{jn} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2 \end{aligned}$$

Dimostrazione del corollario Dalla convergenza di $\sum a_k^2$ e $\sum A_k^2/k^2$ segue per Cauchy-Schwarz la convergenza della serie $\sum a_k A_k/k$. Ora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_k a_m}{k+m} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^k \frac{a_k a_m}{k+m} \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} \sum_{m=1}^k a_m \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} A_k$$

91.8.2

2) implica 1).

$$\begin{aligned} -2 \sum_{k=m}^n \frac{a_k S_k}{k} &\leq \sum_{k=m}^n \frac{-S_k^2 + S_{k-1}^2}{k} \leq \frac{S_{m-1}^2}{m} - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{S_k^2}{k(k+1)} - \frac{S_n^2}{n} \leq \frac{S_{m-1}^2}{m} - \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2}{k(k+1)} \\ 2 \sum_{k=m}^n \frac{a_k S_k}{k} &\geq \frac{S_{m-1}^2}{m} - \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2}{k(k+1)} \geq \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2}{k(k+1)} = \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2}{k^2} - \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2}{k^2(k+1)} \end{aligned}$$

Da Cesàro–Stolz

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S_k^2}{k^2(k+1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S_k^2 - S_{k-1}^2}{k^4} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k^2 + 2a_k S_k}{k^4} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k S_k + 2a_k S_k}{k^4} = 0$$

quindi finalmente $2 \sum_{k=m}^n \frac{a_k S_k}{k} \geq \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2}{k^2}$.

L'equivalenza della convergenza di 1), 2) e 5) è già stata dimostrata.

1) implica 2).

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{a_k S_k}{k} &= \sum_{k=m}^n \frac{(S_k - S_{k-1}) S_k}{k} = \sum_{k=m}^n \left[\frac{S_k^2}{k} - \frac{S_{k-1}^2}{k-1} \right] + \sum_{k=m}^n \left[\frac{S_{k-1}^2}{k-1} - \frac{S_{k-1} S_k}{k} \right] = \\ &= \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + \sum_{k=m}^n S_{k-1} \left[\frac{S_{k-1}}{k-1} - \frac{S_k}{k} \right] = \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + \sum_{k=m}^n (S_k - a_k) \left[\frac{S_k - a_k}{k-1} - \frac{S_k}{k} \right] = \\ &= \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + \sum_{k=m}^n (S_k - a_k) \left[\frac{S_k - a_k}{k-1} - \frac{S_k}{k} \right] = \\ &= \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + \sum_{k=m}^n \frac{(S_k - a_k)^2}{k} \left(1 - \frac{1}{k-1} \right) - \frac{S_k(S_k - a_k)}{k} = \\ &= \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + \sum_{k=m}^n \frac{a_k^2}{k} - \frac{a_k S_k}{k} + \frac{S_k^2 + a_k^2 - 2a_k S_k}{k(k-1)} \leq \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2 + a_k^2 - 2a_k S_k}{k(k-1)} = \\ &= \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2 + a_k^2 - 2a_k S_k}{k^2} + \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2 + a_k^2 - 2a_k S_k}{k^2(k-1)} \leq \\ &\leq \frac{S_n^2}{n} - \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + 2 \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2 + S_k^2 + 2S_k^2}{k^2} \leq \frac{S_n^2}{n} + \frac{S_{m-1}^2}{m-1} + 8 \sum_{k=m}^n \frac{S_k^2}{k^2} < \varepsilon + \varepsilon + 8\varepsilon \end{aligned}$$

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{2n} \frac{S_k^2}{k^2} \geq \frac{S_n^2(n+1)}{4n^2} \geq \frac{S_n^2}{4n}$$

2) implica 3) e 3) implica 2)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^k a_n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k S_k}{k} : 3) \iff 2)$$

1) implica 4).

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{2n} \frac{S_k^2}{k^2} \geq S_n^2 \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{S_n^2}{2n} \text{ da cui } S_n = o(\sqrt{n}).$$

$$\begin{aligned} |R_m - R_n| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{a_k}{k} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n \left[\frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \right] + \sum_{k=m+1}^n \frac{S_k}{k(k-1)} \right| \leq \\ &\leq \frac{S_n}{n} + \frac{S_m}{m} + \sum_{k=m+1}^n \frac{S_k}{k(k-1)} < \varepsilon \implies R_n \rightarrow R \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \right] + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{S_k}{k(k-1)} = \\ &= \frac{O(\sqrt{n})}{n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{O(\sqrt{k})}{k(k-1)} = O(1/\sqrt{n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n R_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n - S_{n-1}) R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n R_n - S_{n-1} R_{n-1}) - \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n-1} (R_n - R_{n-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n R_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n S_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} o(\sqrt{n}) O(1/\sqrt{n}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n S_{n-1}}{n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n S_n}{n} \end{aligned}$$

che è 2) il quale a sua volta converge se 1) converge.

1) implica 3).

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} R_n^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n - (n-1)) R_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (n R_n^2 - (n-1) R_{n-1}^2) - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) (R_n^2 - R_{n-1}^2) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n o(1/n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) \left(\frac{a_n^2}{n^2} + 2 \frac{a_n}{n} R_n \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n A_n}{n} + 2 a_n R_n \right) \end{aligned}$$

e $\sum (a_k A_k)/k$ è 2) mentre $\sum a_k R_k$ è 4). Quindi se 1) converge allora converge pure 3).

3) implica 1).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^k a_n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k S_k}{k} : 3) \implies 2) \implies 1)$$

4) implica 2).

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k R_k &= \sum_{k=m}^n \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} = \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} \sum_{k=m}^{\min\{j-1, n\}} a_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} \frac{a_j}{j} \sum_{k=m}^{j-1} a_k + \sum_{j=n+2}^{+\infty} \frac{a_j}{j} \sum_{k=m}^n a_k = \\ &= \sum_{j=m+1}^{n+1} \frac{a_j}{j} (A_{j-1} - A_{m-1}) + \sum_{j=n+2}^{+\infty} \frac{a_j}{j} (A_n - A_{m-1}) = \\ &= \sum_{j=m+1}^{n+1} \frac{a_j}{j} A_{j-1} + \sum_{j=n+2}^{+\infty} \frac{a_j}{j} A_n + \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} A_{m-1} \geq \sum_{j=m+1}^{n+1} \frac{a_j}{j} A_j \end{aligned}$$

5) implica 2) e 2) implica 5)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} \sum_{m=1}^k a_m \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_k a_m}{k+m} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^k \frac{a_k a_m}{k+m} \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} \sum_{m=1}^k a_m \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k} A_k$$

La parte per cui se $\sum a_k^2 < +\infty$ allora sono vere 1)–5) la tralascio in quanto la dimostrazione è la stessa del precedente esercizio ossia Hardy mostra che $\sum a_k^2 < +\infty$ implica 1) e quindi

tutte le altre. Alla fine però dà un'altra interessante dimostrazione che la mette in relazione alle serie di Fourier. Hardy considera la funzione $f(\vartheta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \cos(k\vartheta)$ con $\sum a_k^2 < +\infty$.

La funzione è definita q.o. ma a quanto ne so, serve il Teorema di Carleson che al tempo di Hardy non era stato dimostrato (1966). **Non mi è chiaro come Hardy sia in grado di ammettere che tale funzione esista.** Probabilmente Hardy intende dire che siccome esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\vartheta) \right|^2 d\vartheta \text{ può scrivere testualmente } f(\vartheta) \sim \sum a_k \cos(k\vartheta)$$

Ad ogni modo

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) a_k \cos(k\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) a_n \cos(n\vartheta) d\vartheta$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\vartheta + \frac{1}{2} \cos n\vartheta = \frac{\sin \frac{2n-1}{2}\vartheta}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{2} \cos n\vartheta = \frac{1}{2} \sin n\vartheta \cot \frac{\vartheta}{2}$$

da cui

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \frac{1}{2} \sin n\vartheta \cot \frac{\vartheta}{2} d\vartheta$$

Si definisce poi $g(\vartheta) = \frac{1}{2} V.P. \int_{\vartheta}^{\pi} f(u) \cot \frac{u}{2} du$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\vartheta d\vartheta \frac{1}{2} V.P. \int_{\vartheta}^{\pi} f(u) \cot \frac{u}{2} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du f(u) \cot \frac{u}{2} \int_{-\pi}^u \cos n\vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(nu) \cos \frac{u}{2} du = \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + \frac{a_n}{2}}{n} \end{aligned}$$

Ora usiamo l'esercizio **110.8** sugli integrali per dire che dalla convergenza di $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\vartheta) d\vartheta$ otteniamo la convergenza dell'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \left(\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f(u)}{u} du \right)^2$ e da questo segue la convergenza dell'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta g^2(\vartheta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \left(\frac{1}{2} V.P. \int_{\vartheta}^{\pi} f(u) \cot \frac{u}{2} du \right)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \left(\frac{1}{2} V.P. \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f(u)}{u} (u \cot \frac{u}{2}) du \right)^2$$

Infatti per il teorema della media possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \left(\frac{1}{2} V.P. \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f(u)}{u} (u \cot \frac{u}{2}) du \right)^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \left(\hat{u} \cot \frac{\hat{u}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} V.P. \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f(u)}{u} du \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{M^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \left(V.P. \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f(u)}{u} du \right)^2 \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione $g(\vartheta)$ è a quadrato sommabile e quindi converge $\sum (a_0 + \dots + a_{n-1} + a_n/2)^2/n^2$ e siccome chiaramente $a_n \rightarrow 0$, converge pure $\sum (A_n/n)^2$

92.8.2 Prima dimostrazione (Landau) $y^p \geq 1 + p(y-1)$ per la convessità di y^p . Per $y = y_1/y_2$ abbiamo $y_1^p - p y_1 y_2^{p-1} + (p-1) y_2^p \geq 0$. Poniamo $y_1 = b_n$, $y_2 = (p-1)B_n/(pn)$, con $B_n = b_1 + \dots + b_n$. Otteniamo

$$b_n^p - p b_n \left(\frac{p-1}{p} \frac{B_n}{n} \right)^{p-1} + (p-1) \left(\frac{p-1}{p} \frac{B_n}{n} \right)^p \geq 0$$

da cui

$$\sum_{n=1}^N b_n^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \sum_{n=1}^N p b_n \left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1) \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^N \left(\frac{B_n}{n}\right)^p \geq 0$$

Per convessità

$$y^p \geq B_n^p + p B_n^{p-1}(y - B_n) \implies B_{n-1}^p \geq B_n^p + p B_n^{p-1}(B_{n-1} - B_n)$$

Da Abel

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N p b_n \left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} &= \sum_{n=1}^N p(B_n - B_{n-1}) \left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} = \sum_{n=1}^N \frac{B_n^p - B_{n-1}^p}{n^{p-1}} \geq \sum_{n=1}^N \frac{B_n^p}{n^{p-1}} - \frac{B_n^p}{(n+1)^{p-1}} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^N \frac{(p-1)B_n^p}{(n+1)^{p-1}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^N b_n^p \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^N B_n^p \left(\frac{p}{(n+1)^p} - \frac{p-1}{n^p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^N \frac{B_n^p}{n^p} \left(\frac{pn^p}{(n+1)^p} - p - 1\right)$$

$c_n = \frac{pn^p}{(n+1)^p} - p + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ in modo crescente. Poi sostituiamo Nm a N e definiamo

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = a_1, \quad b_{m+1} = \dots = b_{2m} = a_2, \dots, b_{m(N-1)+1} = \dots = b_{Nm} = a_N$$

$$\begin{aligned} m \sum_{n=1}^N a_n^p &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \frac{B_n^p}{n^p} c_n = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \left(\sum_{j=1}^{m k} b_j + \sum_{j=m k+1}^n b_j\right)^p \frac{c_n}{n^p} = \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \left(m a_1 + \dots + m a_k + \sum_{j=m k+1}^n b_j\right)^p \frac{c_n}{n^p} = \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} (m a_1 + \dots + m a_k + (n - m k) a_{k+1})^p \frac{c_n}{n^p} \end{aligned}$$

Siccome procediamo a blocchi di N , abbiamo

$$\begin{aligned} &\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} (m a_1 + \dots + m a_k + (n - m k) a_{k+1})^p \frac{c_n}{n^p} = \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} (m a_1 + \dots + m a_k + m a_{k+1})^p \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \frac{1}{n^p} c_n \geq \\ &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} m^p A_{k+1}^p \sum_{n=m k+1}^{m k+m} \frac{c_n}{(m(k+1))^p} \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_{k+1}^p}{(k+1)^p} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} c_n \end{aligned}$$

e $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=m k+1}^{m k+m} c_n = 1$ quindi otteniamo

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^N a_k^p$$

Facciamo ora vedere che la costante $(p/(p-1))^p$ non può essere abbassata. Sia $a_n = n^{-1/p-\varepsilon}$ con $0 < \varepsilon < 1 - 1/p$.

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n k^{-1/p-\varepsilon} > \int_1^{+\infty} x^{-1/p-\varepsilon} dx = \frac{1}{1-1/p-\varepsilon} (n^{1-1/p-\varepsilon} - 1) > \frac{p}{p-1} (n^{1-1/p-\varepsilon} - 1) \\ \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &> \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (n^{-1/p-\varepsilon} - n^{-1})^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-p\varepsilon} \left(1 - n^{-1+1/p+\varepsilon}\right)^p \geq \\ &\geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-p\varepsilon} \left(1 - pn^{-1+1/p+\varepsilon}\right) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(n^{-1-p\varepsilon} - pn^{-2+1/p+\varepsilon-\varepsilon p}\right) \\ \sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &> \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left[\sum_{n=1}^N a_n^p - p \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{2-1/p-\varepsilon+\varepsilon p}} \right] \end{aligned}$$

se e solo se

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \left[\sum_{n=1}^N a_n^p \right]^{-1} > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(1 - C_{N,\varepsilon} \left[\sum_{n=1}^N a_n^p \right]^{-1}\right)$$

Mandiamo prima $N \rightarrow +\infty$ e poi $\varepsilon \rightarrow 0^+$ da cui $\sum_{n=1}^N a_n^p \rightarrow +\infty$ e quindi la costante $(p/(p-1))^p$ non può essere abbassata

Seconda dimostrazione (Hardy rimaneggiando una dimostrazione di M.Riesz)

Sia $\Phi_n = \sum_{k=n}^{+\infty} k^{-p}$. Da Abel ($A_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &= \sum_{n=1}^N A_n^p (\Phi_n - \Phi_{n+1}) = \sum_{n=1}^N (A_n^p - A_{n-1}^p) \Phi_n - A_N^p \Phi_{N+1} \leq \sum_{n=1}^N (A_n^p - A_{n-1}^p) \Phi_n \leq \\ &\leq p \sum_{n=1}^N a_n A_n^{p-1} \Phi_n \end{aligned}$$

$$\Phi_n < n^{-p} + \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = n^{-p} + \frac{n^{-p+1}}{p-1} \leq n^{-p+1} + \frac{n^{-p+1}}{p-1} \leq \frac{p}{p-1} n^{-p+1}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \frac{p^2}{p-1} \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} \leq \frac{p^2}{p-1} \left[\sum_{n=1}^N a_n^p \right]^{1/p} \left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \right]^{1-1/p}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p^2}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^N a_n^p$$

ma la costante è $\frac{p^{2p}}{(p-1)^p} > \frac{p^p}{(p-1)^p}$

È immediato vedere che

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \left[\frac{1}{n^p} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^p} \right] + \left[\frac{1}{(2n)^p} + \dots + \frac{1}{(3n-1)^p} \right] + \dots + \left[\frac{1}{(3n)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} \right] + \dots \\ &\leq n \left[\frac{1}{n^p} + \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(3n)^p} \dots \right] = \frac{1}{n^{p-1}} \zeta(p) \end{aligned}$$

per cui la costante $\frac{p^{2p}}{(p-1)^p}$ è sostituita da $(p\zeta(p))^p$

Terza dimostrazione (Elliott) Si utilizza la disuguaglianza AGM-media pesata $\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta$ se $\alpha + \beta = 1$, $x, y \geq 0$. Quindi se $1/p + 1/p' = 1$ si ha $ab \leq a^{p'}/p' + b^p/p$ con $1/p + 1/p' = 1$ per cui $p' = p/(p-1)$, $a, b \geq 0$. Sia $\alpha_n = A_n/n$

$$\begin{aligned} \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \alpha_n^{p-1} \alpha_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} (n\alpha_n - (n-1)\alpha_n) \alpha_n^{p-1} = \alpha_n^p (1 - \frac{np}{p-1}) + \frac{(n-1)p}{p-1} \alpha_n^{p-1} \alpha_{n-1} \leq \\ &\leq \alpha_n^p (1 - \frac{np}{p-1}) + \frac{p(n-1)}{p-1} \left[\frac{(p-1)(\alpha_n^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{\alpha_{n-1}^p}{p} \right] = \\ &= \alpha_n^p (1 - \frac{np}{p-1}) + \frac{(n-1)}{p-1} [(p-1)\alpha_n^p + \alpha_{n-1}^p] = \frac{1}{p-1} ((n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p) \end{aligned}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^N \frac{A_n^p}{n^p} \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \frac{A_n^{p-1}}{n^{p-1}} a_n \leq \frac{-N\alpha_N^p}{p-1} \leq 0$$

Ora usiamo Hölder

$$\sum_{n=1}^N \frac{A_n^p}{n^p} \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \frac{A_n^{p-1}}{n^{p-1}} a_n \leq \frac{p}{p-1} \left[\sum_{n=1}^N a_n^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^N \frac{A_n^p}{n^p} \right]^{\frac{p-1}{p}} \iff \sum_{n=1}^N \frac{A_n^p}{n^p} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N a_n^p$$

e inoltre

$$\sum_{n=1}^N \frac{A_n^p}{n^p} \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \frac{A_n^{p-1}}{n^{p-1}} a_n \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N a_n^p$$

Per il passaggio dalla prima alla seconda riga possiamo pure usare la convessità di x^p con $p > 1$ per cui

$$\alpha_{n-1}^p \geq \alpha_n^p + p\alpha_n^{p-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \iff p\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \leq \alpha_{n-1}^p + \alpha_n^p(p-1)$$

93.8.2

$$\begin{aligned} \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} - \frac{p}{p-1} \lambda_n a_n \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} &= \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} - \frac{p}{p-1} (A_n - A_{n-1}) \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} = \left(\lambda_n - \frac{p}{p-1} \Lambda_n \right) \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} + \\ &+ \frac{\Lambda_{n-1}}{p-1} \left(p \frac{A_{n-1}}{\Lambda_{n-1}} \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} \right) \leq \left(\lambda_n - \frac{p}{p-1} \Lambda_n \right) \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} + \frac{\Lambda_{n-1}}{p-1} \left(\frac{A_{n-1}^p}{\Lambda_{n-1}^p} + (p-1) \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \right) = \\ &= \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \left(\lambda_n - \frac{p}{p-1} \Lambda_n + A_{n-1} \right) + \frac{\Lambda_{n-1}}{p-1} \frac{A_{n-1}^p}{\Lambda_{n-1}^p} = \frac{\Lambda_{n-1}}{p-1} \frac{A_{n-1}^p}{\Lambda_{n-1}^p} - \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \frac{\Lambda_n}{p-1} \end{aligned}$$

Assumendo $A_0 = 0$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} - \frac{p}{p-1} \lambda_n a_n \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} = -\frac{A_N^p}{\Lambda_N^p} \frac{\Lambda_N}{p-1} \leq 0 \quad (1)$$

Da Hölder

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{A_k^p}{\Lambda_k^p} \right)^{p-1} &= \\ &= (\lambda_1 a_1^p + \dots + \lambda_n a_n^p) \underbrace{\left(\lambda_1 \frac{A_1^p}{\Lambda_1^p} + \dots + \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \right)^{p-1}}_{p-1} \geq \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^n \left(\lambda_k^{\frac{1}{p}} \right)^p a_k \frac{A_k^{p-1}}{\Lambda_k^{p-1}} \right)^p = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \frac{A_k^{p-1}}{\Lambda_k^{p-1}} \right)^p \end{aligned}$$

Da (1) otteniamo

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \right)^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p$$

Inoltre

$$\frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{p(1-\frac{1}{p})} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p$$

e alla fine abbiamo

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \frac{A_n^{p-1}}{\Lambda_n^{p-1}} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p$$

Se sostituiamo $a_n^{\frac{1}{p}}$ a a_n ed eseguendo il limite $p \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{A_n^p}{\Lambda_n^p} \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p \implies \sum_{n=1}^N \lambda_n \left((a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n})^{1/\Lambda_n} \right) \leq e \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n$$

94.8.2 Da Hölder

$$\begin{aligned} & (\lambda_n a_n^p + \dots + \lambda_N a_N^p) \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\Lambda_n^{\frac{p}{p-1}}} + \dots + \frac{\lambda_N}{\Lambda_N^{\frac{p}{p-1}}} \right)}_{p-1} \dots \left(\frac{\lambda_n}{\Lambda_n^{\frac{p}{p-1}}} + \dots + \frac{\lambda_N}{\Lambda_N^{\frac{p}{p-1}}} \right) \geq \\ & \geq \left(\lambda_n^{\frac{1}{p}} (a_n^p)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_n^{\frac{1}{p}}}{\Lambda_n^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1} + \dots + \lambda_N^{\frac{1}{p}} (a_N^p)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_N^{\frac{1}{p}}}{\Lambda_N^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1} \right)^p = \left(\frac{\lambda_n a_n}{\Lambda_n} + \dots + \frac{\lambda_N a_N}{\Lambda_N} \right)^p \end{aligned}$$

quindi

$$A_{n,N}^p = \left(\frac{\lambda_n a_n}{\Lambda_n} + \dots + \frac{\lambda_N a_N}{\Lambda_N} \right)^p \leq (\lambda_n a_n^p + \dots + \lambda_N a_N^p) \left(\frac{\lambda_n}{\Lambda_n^{\frac{p}{p-1}}} + \dots + \frac{\lambda_N}{\Lambda_N^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{p-1}$$

Poi

$$\sum_{j=n}^N \frac{\lambda_j}{\Lambda_j^{\frac{p}{p-1}}} = \sum_{j=n}^N \frac{\Lambda_j - \Lambda_{j-1}}{\Lambda_j^{\frac{p}{p-1}}} < \int_{\Lambda_{n-1}}^{\Lambda_N} \frac{dx}{x^{\frac{p}{p-1}}} = (p-1)(\Lambda_{n-1}^{-\frac{1}{p-1}} - \Lambda_N^{-\frac{1}{p-1}}) \leq (p-1)\Lambda_{n-1}^{-\frac{1}{p-1}}$$

da cui

$$A_{n,N}^p \leq (\lambda_n a_n^p + \dots + \lambda_N a_N^p)(p-1)^{p-1} \Lambda_{n-1}^{-1}$$

Poiché $\lim_{N \rightarrow +\infty} \lambda_n a_n^p + \dots + \lambda_N a_N^p$ esiste per ipotesi, possiamo scrivere

$$A_n^p = \lim_{N \rightarrow +\infty} A_{n,N}^p \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda_k a_k^p (p-1)^{p-1} \Lambda_{n-1}^{-1} \doteq R_{n-1} (p-1)^{p-1} \Lambda_{n-1}^{-1}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lambda_n A_n^p - p \lambda_n a_n A_n^{p-1} &= \lambda_n A_n^p - p \Lambda_n \frac{\lambda_n a_n}{\Lambda_n} A_n^{p-1} = \lambda_n A_n^p - p \Lambda_n A_n^{p-1} (A_n - A_{n+1}) = \\ &= (\lambda_n - p \Lambda_n) A_n^p + p \Lambda_n A_n^{p-1} A_{n+1} \end{aligned}$$

Essendo x^p convessa per $p > 1$ si ha

$$A_{n+1}^p \geq A_n^p + p A_n^{p-1} (A_{n+1} - A_n) \iff p A_n^{p-1} A_{n+1} \leq A_{n+1}^p + p A_n^p - A_n^p$$

quindi

$$\lambda_n A_n^p - p \lambda_n a_n A_n^{p-1} \leq (\lambda_n - p \Lambda_n) A_n^p + \Lambda_n A_{n+1}^p + \Lambda_n p A_n^p - \Lambda_n A_n^p = -\Lambda_{n-1} A_n^p + \Lambda_n A_{n+1}^p$$

Assumendo $\Lambda_0 = 0$ si ha

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p - p \lambda_n a_n A_n^{p-1} \leq \sum_{n=1}^N -\Lambda_{n-1} A_n^p + \Lambda_n A_{n+1}^p = \Lambda_N A_{N+1}^p \leq R_N (p-1)^{p-1}$$

ossia

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p \leq p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n A_n^{p-1} + R_N (p-1)^{p-1} \quad (1)$$

Poi da Hölder abbiamo

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n A_n^{p-1} \right]^p &= \left[\sum_{n=1}^N \lambda_n^{\frac{1}{p}} a_n \lambda_n^{1-\frac{1}{p}} A_n^{p-1} \right]^p \leq \left[\sum_{n=1}^N \lambda_n^{\frac{p}{p-1}} a_n^p \right]^{\frac{p}{p-1}} \left[\sum_{n=1}^N \lambda_n^{\frac{p-1}{p} \frac{p}{p-1}} A_n^{(p-1) \frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p(p-1)}{p}} = \\ &= \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p \cdot \left[\sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p \right]^{p-1} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p &\leq p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n A_n^{p-1} + R_N (p-1)^{p-1} \leq p \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p \right]^{1-\frac{1}{p}} + R_N (p-1)^{p-1} \\ \sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p &\leq \left(p \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{R_N (p-1)^{p-1}}{\left(\sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p \right)^{1-\frac{1}{p}}} \right)^p \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n A_n^p \leq p^p \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n^p \end{aligned}$$

da cui segue

$$p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n A_n^{p-1} + R_N (p-1)^{p-1} \leq p \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} p^{p(1-\frac{1}{p})} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n A_n^p \right)^{1-\frac{1}{p}} + R_N (p-1)^{p-1}$$

e quindi

$$p \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n A_n^{p-1} \leq p^p \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n^p$$

Eseguendo il limite in (1) otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n A_n^p \leq p \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n A_n^{p-1} \leq p^p \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n^p$$

Le costanti sono le minime possibili. Prendiamo $\lambda_n = 1$, $\Lambda_n = n$, $a_n = n^{-\varepsilon-1/p}$

$$\int_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon+1/p}} = \frac{p}{1+p\varepsilon} \frac{1}{(n-1)^{\varepsilon+1/p}} \geq A_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon+1/p}} \geq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon+1/p}} = \frac{p}{1+p\varepsilon} \frac{1}{n^{\varepsilon+1/p}},$$

se $n \neq 1$. Se $n = 1$ abbiamo $1 + \frac{p}{1+p\varepsilon} \geq A_1 \geq \frac{p}{1+p\varepsilon}$

$$A_n^p \geq \left(\frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^p n^{-p\varepsilon-1} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n A_n^p \geq \left(\frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^p \frac{1}{p\varepsilon}$$

$$a_n A_n^{p-1} \leq \left(\frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^{p-1} \frac{1}{n^{\varepsilon+1/p}} \frac{1}{(n-1)^{p\varepsilon-\varepsilon+1-1/p}} \leq \left(\frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^{p-1} \frac{1}{(n-1)^{p\varepsilon+1}} \quad \text{se } n \geq 2.$$

Se $n = 1$ abbiamo $a_1 A_1^{p-1} \leq \left(1 + \frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^{p-1}$. La relazione $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n A_n^p \leq p \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n A_n^{p-1}$ implica

$$\left(\frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^p \frac{1}{p\varepsilon} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n A_n^p \leq p \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n A_n^{p-1} \leq p \left(1 + \frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^{p-1} + \frac{p}{p\varepsilon} \left(\frac{p}{1+p\varepsilon} \right)^{p-1}$$

e se $\varepsilon \rightarrow 0$ qualsiasi numero minore di p davanti a $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n A_n^{p-1}$ non va bene.

95.8.2 Sappiamo che $\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_k}{D_k} \rightarrow +\infty$ rich.8

Sia $p \leq 0$, $q < 0$.

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_k} \leq \int_{D_{k-1}}^{D_k} \frac{dx}{x} = \ln(D_k/D_{k-1}) \quad (1)$$

da cui

$$\sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_k}{D_k} \right)^q \geq \sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \ln \frac{D_k}{D_1} \right)^q \underset{D_k \rightarrow +\infty}{\geq} C \sum d_k (\ln D_k)^q = +\infty$$

Dunque da ora in poi supponiamo $p > 0$.

Sia $p \leq 0$, $q \geq 0$.

Diverge a maggior ragione oppure si può scrivere

$$\sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_k}{D_k} \right)^q \geq \sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} \right)^q \geq \frac{d_1^q}{D_1^q} \sum d_k = +\infty$$

Sia ora $p > 1$, $q \geq 0$. ($q < 0$ a maggior ragione)

$$\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{D_k} = \frac{d_1}{D_1} + \sum_{k=2}^n \frac{d_k}{D_k} = \frac{d_1}{D_1} + \sum_{k=2}^n \frac{D_k - D_{k-1}}{D_k} \leq \frac{d_1}{D_1} + \int_{D_1}^{D_n} \frac{dx}{x} = \frac{d_1}{D_1} + \ln \frac{D_n}{D_1}$$

per cui

$$\sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_k}{D_k} \right)^q \leq \sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \ln \frac{D_k}{D_1} \right)^q \underset{D_k \rightarrow +\infty}{\leq} C \sum \frac{d_k}{D_k^{p'}} < +\infty$$

($p' > 1$).

Sia $p = 1$, $q < -1$. Definiamo $\sum \frac{d_k}{D_k} = b_n$. La serie si scrive come

$$\sum \frac{d_k}{D_k} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_k}{D_k} \right)^q = \sum (b_k - b_{k-1}) b_k^q \leq \int^{+\infty} x^q dx < +\infty$$

da cui la convergenza della serie.

Sia $p = 1$, $-1 \leq q \leq 0$. La serie si scrive come

$$\begin{aligned} \sum \frac{d_k}{D_k} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_k}{D_k} \right)^q &= \sum (b_k - b_{k-1}) b_k^q \geq \sum (b_k - b_{k-1}) b_{k-1}^q \geq \\ &\geq \int^{+\infty} x^q dx = +\infty \end{aligned}$$

da cui la convergenza della serie.

Sia $p = 1$, $q > 0$. Diverge a maggior ragione.

Sia $0 < p < 1$, $q \geq 0$. $\sum_{j=1}^k \frac{d_j}{D_j} = \sum_{j=1}^k \frac{D_j - D_{j-1}}{D_j} \geq \frac{1}{D_1} \sum_{j=1}^k (D_j - D_{j-1}) = \frac{1}{D_1} (D_k - D_0)$ per

cui

$$\sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_n}{D_n} \right)^q \geq \frac{1}{D_1} \sum \frac{d_k}{D_k^p} (D_k - D_0)^q \underset{D_k \rightarrow +\infty}{\geq} C_1 \sum d_k D_k^{q-p} = +\infty$$

non appena $q - p \geq -1$ e quindi $q \geq 0$.

Sia $0 < p < 1$, $q < 0$. Da (1) abbiamo

$$\begin{aligned} \sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \frac{d_2}{D_2} + \dots + \frac{d_k}{D_k} \right)^q &\geq \sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \sum_{j=2}^k \ln \frac{D_k}{D_{j-1}} \right)^q = \\ &= \sum \frac{d_k}{D_k^p} \left(\frac{d_1}{D_1} + \ln \frac{D_k}{D_1} \right)^q \underset{D_k \rightarrow +\infty}{\geq} C \sum \frac{d_k}{D_k^{p'}} \quad 0 < p' < 1 \end{aligned}$$

da cui la divergenza.

96.8.2 Sia

$$B_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{d_k}{D_k^p} < \int_{D_{n-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \underbrace{=}_{p>1} \frac{D_{n-1}^{1-p}}{p-1} \underbrace{=}_{\frac{D_n}{D_{n-1}}=O(1)} O(D_n^{1-p})$$

Definendo $A_0 = 0$ e prendendo $q > 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{D_k^p} A_k^q &= \sum_{k=1}^n (B_k - B_{k+1}) A_k^q = \sum_{k=1}^n B_k (A_k^q - A_{k-1}^q) + \sum_{k=1}^n (B_k A_{k-1}^q - B_{k+1} A_k^q) = \\ &= \sum_{k=1}^n B_k (A_k^q - A_{k-1}^q) + B_1 A_0 - B_{n+1} A_n^q = \sum_{k=1}^n B_k (A_k^q - A_{k-1}^q) - B_{n+1} A_n^q \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n B_k (A_k^q - A_{k-1}^q) = \sum_{k=1}^n O(D_k^{1-p}) (A_k^q - A_{k-1}^q) \leq \\ &\leq K \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^{p-1}} (A_k^q - A_{k-1}^q) \underbrace{\leq}_{x^q \text{ convessa}} K \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^{p-1}} A_k^{q-1} (A_k - A_{k-1}) = K \sum_{k=1}^n \frac{A_k^{q-1} a_k d_k}{D_k^{p-1}} = \\ &= K \sum_{k=1}^n \left[\frac{A_k^{q-1} d_k^{\frac{q-1}{q}}}{D_k^{p \frac{q-1}{q}}} \right] \cdot \left[\frac{d_k^{1/q} a_k}{D_k^{p/q} D_k^{-1}} \right] \leq \\ &\leq K \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{A_k^{q-1} d_k^{\frac{q-1}{q}}}{D_k^{p \frac{q-1}{q}}} \right]^{\frac{q}{q-1}} \right\}^{\frac{q-1}{q}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{d_k^{1/q} a_k}{D_k^{p/q} D_k^{-1}} \right]^q \right\}^{\frac{1}{q}} = \\ &= K \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k^q d_k}{D_k^p} \right\}^{\frac{q-1}{q}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{d_k a_k^q}{D_k^p D_k^{-q}} \right\}^{\frac{1}{q}} = \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k^q d_k}{D_k^p} \leq K^q \sum_{k=1}^n \frac{d_k a_k^q}{D_k^{p-q}}$$

La convessità di x^q è usata così $x^q \geq y^q + qy^{q-1}(x-y)$ da cui, se $y \geq x$, $y^q - x^q \leq (y-x)qy^{q-1}$.

Se $q = 1$, una volta arrivati a $K \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^{p-1}} (A_k^q - A_{k-1}^q) = K \sum_{k=1}^n \frac{1}{D_k^{p-1}} a_k d_k$ abbiamo concluso

Se $p \leq 1$ il risultato non è necessariamente valido. Infatti $\sum d_k/D_k^p$ diverge e se $q > 0$ $A^q \rightarrow +\infty$ per cui la serie di sinistra nel testo diverge. D'altra parte con $p = 1$ e $a_k = 1/(D_k \ln D_k)$, la serie di destra converge.

97.8.2 $D_0 = 0$, $A_0 = 0$.

$$B_k = \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{D_j^p} = \sum_{j=1}^k \frac{D_j - D_{j-1}}{D_j^p} \leq \int_{D_0}^{D_k} \frac{dx}{x^p} = \frac{D_k^{1-p} - D_0^{1-p}}{1-p} \leq C D_k^{1-p}$$

Poi usiamo Abel

$$\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{D_k^p} A_k^q = \sum_{k=1}^n (B_k - B_{k-1}) A_k^q = \sum_{k=1}^n B_k (A_k^q - A_{k+1}^q) + \sum_{k=1}^n (B_k A_{k+1}^q - B_{k-1} A_k^q)$$

che possiamo riscrivere come ($B_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} B_k(A_k^q - A_{k+1}^q) + B_n A_n^q - B_n A_{n+1}^q + \sum_{k=1}^n (B_k A_{k+1}^q - B_{k-1} A_k^q) &= \sum_{k=1}^{n-1} B_k(A_k^q - A_{k+1}^q) + B_n A_n^q \\
 B_n A_n^q &\leq C D_n^{1-p} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k d_k \right)^q = C D_n^{1-p} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k d_k^{\frac{1}{q}} D_k^{\frac{q-p}{q}} d_k^{\frac{q-1}{q}} D_k^{-\frac{q-p}{q}} \right)^q \underbrace{\leq}_{\text{Holder}} \\
 &\leq C D_n^{1-p} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^q \left(d_k^{\frac{1}{q}} \right)^q \left(D_k^{\frac{q-p}{q}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q} q} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} d_k^{\frac{q-1}{q}} \right)^{\frac{q}{q-1}} \left(D_k^{-\frac{q-p}{q}} \right)^{\frac{q}{q-1}} = \\
 &= C D_n^{1-p} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^q d_k D_k^{q-p} \right) \left(\sum_{k=n}^{+\infty} d_k D_k^{-\frac{q-p}{q-1}} \right)^{q-1} \\
 \sum_{k=n}^{+\infty} d_k D_k^{-\frac{q-p}{q-1}} &= \sum_{k=n}^{+\infty} (D_k - D_{k-1}) D_k^{-\frac{q-p}{q-1}} < \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{D_{k-1}}^{D_k} \frac{dx}{x^{\frac{q-p}{q-1}}} = \int_{D_{n-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{q-p}{q-1}}} = \frac{p-1}{q-1} D_{n-1}^{\frac{p-1}{q-1}} = \\
 &= \frac{p-1}{q-1} \frac{D_{n-1}^{\frac{p-1}{q-1}}}{D_n^{\frac{p-1}{q-1}}} D_n^{\frac{p-1}{q-1}} = \frac{p-1}{q-1} O(1) D_n^{\frac{p-1}{q-1}}
 \end{aligned}$$

per cui

$$B_n A_n^q \leq \left(\frac{p-1}{q-1} \right)^{q-1} C D_n^{1-p} D_n^{p-1} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^q d_k D_k^{q-p} \right) \leq C_1 \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^q d_k D_k^{q-p} \right)$$

Poi abbiamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} B_k(A_k^q - A_{k+1}^q) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} C D_k^{1-p} A_k^{q-1} (A_k - A_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} C D_k^{1-p} A_k^{q-1} a_k d_k \leq \\
 &\leq K \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k^q d_k}{D_k^p} \right\}^{\frac{q-1}{q}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{d_k a_k^q}{D_k^p D_k^{-q}} \right\}^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{D_k^p} A_k^q \leq K \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{A_k^q d_k}{D_k^p} \right\}^{\frac{q-1}{q}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{d_k a_k^q}{D_k^p D_k^{-q}} \right\}^{\frac{1}{q}} + C_1 \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^q d_k D_k^{q-p} \right)$$

98.8.2 1) $F(x)$ è monotona decrescente.

$$\sum a_k f(S_k) = \sum (S_k - S_{k-1}) f(S_k) \leq \sum (S_k - S_{k-1}) F(S_k) \leq \int^{+\infty} F(x) dx$$

• Viceversa supponiamo che $\sum a_k f(S_k) = \sum (S_k - S_{k-1}) f(S_k) < +\infty$ per qualsiasi serie $\sum a_k = +\infty$ positiva. Sia $\{t_k\}$ una successione crescente che tende a $+\infty$. Possiamo sceglierla in modo tale che $t_k \leq S_k < t_{k+1}$ e $f(S_k) \geq \max\{F(t_k), F(t_{k+1})\}/2$

$$\begin{aligned}
 \sum (S_k - S_{k-1}) f(S_k) &= \sum (S_k - t_k) f(S_k) + \sum (t_k - S_{k-1}) f(S_k) \geq \\
 &\geq \sum (S_k - t_k) \frac{1}{2} F(t_k) + \sum (t_k - S_{k-1}) \frac{1}{2} F(t_{k+1}) \geq \sum (S_k - t_k) \frac{1}{2} F(t_k) + \sum (t_k - S_{k-1}) \frac{1}{2} F(t_k) \geq \\
 &\geq \sum (S_k - S_{k-1}) F(t_k) = \int^{+\infty} F(x) dx
 \end{aligned}$$

il che è una contraddizione se l'integrale diverge.

2) $F(x)$ è monotona crescente e $R_k \doteq r_k^{-1}$. $F(R_k)$ è monotona decrescente

$$\sum a_k F(r_k^{-1}) = \sum \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k R_{k+1}} F(R_k) \leq \sum \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k^2} F(R_k) \leq \int^{+\infty} \frac{F(x)}{x^2} dx$$

$$\int^{+\infty} \frac{F(x)}{x^2} dx \leq \sum \frac{R_{k+1} - R_k}{R_{k+1}^2} F(R_{k+1}) = \sum a_k F(r_{k+1}^{-1})$$

Ciò richiama rich.20 solo che al posto della serie convergente lì si ha una serie divergente. Al posto di $r_n \rightarrow 0$ lì si ha $S_n \rightarrow +\infty$ e al posto della funzione $F(x)$ crescente lì si ha una funzione decrescente.

Non è possibile dare come condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie $\sum a_k F(r_k^{-1})$ quella dell'integrale $\int^{+\infty} f(x) dx$. È possibile in rich.27 ma a condizione a_k limitata o a_{k+1}/a_k limitata. Scrivendo

$$\sum \frac{R_{k+1} - R_k}{R_{k+1}^2} F(R_{k+1}) - \sum \frac{R_{k+1} - R_k}{R_k R_{k+1}} F(R_k) = \sum \frac{R_{k+1} - R_k}{R_{k+1}^2} (F(R_{k+1}) - F(R_k))$$

l'analoga condizione sarebbe $R_{n+1} - R_n = \frac{1}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k} - \frac{1}{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k} < A$ che è implicata da

$$a_n / \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right)^2 < A$$

99.8.2 Dal fatto che una serie $\sum u_n$ converge se e solo se la successione $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ è di

Cauchy, segue che per dimostrare la divergenza della serie $\sum \frac{a_k}{R_k}$ basta far vedere che $\exists \varepsilon >$

0 t.c. $\forall k \exists N_\varepsilon > k$ t.c. $\tilde{S}_{N_\varepsilon} - \tilde{S}_k > \varepsilon$ dove $\tilde{S}_{N_\varepsilon} = \sum_k^{N_\varepsilon} \frac{a_k}{R_k}$. $\tilde{S}_{N_\varepsilon} - \tilde{S}_k = \frac{a_{k+1}}{R_{k+1}} + \dots + \frac{a_{k+N_\varepsilon}}{R_{k+N_\varepsilon}} \geq$
 $\geq \frac{a_{k+1} + \dots + a_{N_\varepsilon+k}}{R_{k+1}} = \frac{S_{N_\varepsilon+k} - (S - R_k)}{R_k} = \frac{R_k - R_{N_\varepsilon+k}}{R_k} = 1 - \frac{R_{N_\varepsilon+k}}{R_k} > 1^-$ dove 1^- è un qualsiasi numero più piccolo di 1 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ essendo la serie convergente).

• Se prendiamo $a_k = e^{-k^2}$ allora $\sum \frac{a_{k+1}}{R_k}$ converge. Infatti $\sum_{p=k}^{+\infty} e^{-p^2} \sim \int_k^{+\infty} e^{-x^2} dx = O(e^{-k^2}/k)$ per cui $\sum \frac{a_{k+1}}{R_k} = O\left(\sum k e^{-k}\right)$ che chiaramente converge.

• $\sum_{k=p}^q \frac{a_k}{R_k^{1-\delta}} = \sum_{k=p}^q \frac{R_k - R_{k+1}}{R_k^{1-\delta}} = \sum_{k=p}^q R_k^\delta \left(1 - \frac{R_{k+1}}{R_k}\right) \leq \sum_{k=p}^q \frac{1}{\delta} R_k^\delta \left(1 - \frac{R_{k+1}^\delta}{R_k^\delta}\right) = \sum_{k=p}^q \frac{1}{\delta} (R_k^\delta - R_{k+1}^\delta) = \frac{1}{\delta} (R_p^\delta - R_q^\delta) < \varepsilon$ se p, q sono abbastanza grandi. Per la maggiorazione si usa la concavità della funzione x^δ , con $0 < \delta < 1$.

• Diamo una serie convergente $\sum a_k$ tale che $R_k \neq 0$, e $\sum a_k/R_k$ pure converge. La dimostrazione proviene dalla soluzione inserita nella rivista di pubblicazione del problema. Detta

$b_k \doteq \frac{a_k}{S_k}$ si ha $R_k = (1 + b_{k-1})(1 + b_{k-2}) \dots (1 + b_1)R_1$. Dalle ipotesi segue che $R_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S$

e quindi $R_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$. Ne segue che $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + b_{k-1})(1 + b_{k-2}) \dots (1 + b_1) = 0$ e quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^k \ln(1 + b_j) = -\infty. \text{ Basta prendere di nuovo } b_k = \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}.$$

100.8.2 L'affermazione è falsa. Basta prendere $a_k = \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}$ e $b_k = \ln(1 + \frac{(-)^k}{\sqrt{k}})$. Se $a_k > 0$ (anche solo definitivamente) allora sarebbe vera.

101.8.2 $\boxed{p > 1}$ Si considerino le seguenti maggiorazioni: $\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{2}{2^p}$, $\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{4}{4^p}$, $\sum_{k=8}^{15} \frac{1}{k^p} < \frac{8}{8^p}$ e via dicendo per cui $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(1-p)}$ e si ha convergenza per $p > 1$.

$\boxed{p = 1}$ osserviamo che $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ e così via per cui (volendo essere pignoli nei calcoli) si ha $\sum_{k=1}^{2^{M+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{N=1}^M \sum_{2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{k} > 1 + \frac{1}{2} + \sum_{N=1}^M \frac{1}{2} = \frac{M+3}{2}$ e quindi divergenza.

$\boxed{p < 1}$ $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$ e quindi si ha divergenza.

102.8.2 Basta osservare che $|a_k - a_{k+1}| = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$ e $\sum k^{-2}$ converge.

103.8.2 Sia $l > 0$. Dalla relazione $l - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < l + \varepsilon$ valida per $k > k_\varepsilon$ segue $b_k < (l - \varepsilon)a_k$ e $a_k < (l + \varepsilon)b_k$ da cui segue il risultato non appena $\varepsilon < l$. Se $l < 0$ il risultato è lo stesso prendendo la successione $-b_k$.

104.8.2 Detto $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$, che supponiamo essere positivo, dalla sua definizione segue che $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : k > k_\varepsilon \Rightarrow l \leq \frac{a_k}{b_k} < l + \varepsilon$ e quindi se $\sum b_k$ converge allora converge pure $\sum a_k$ mentre se $\sum a_k$ diverge, diverge pure $\sum b_k$.

• si prendano le successioni $a_k = \begin{cases} k^{-4} & k = 2p \\ k^{-3} & k = 2p+1 \end{cases}$ $b_k = \begin{cases} k^{-4} & k = 2p \\ k^{-2} & k = 2p+1 \end{cases}$ dalle quali si

evince che $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$, ma non esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k}$

• successioni monotone possono essere $a_j = \begin{cases} k^{-4} & k^2 \leq j < (k+1)^2 \\ 2 \cdot k^{-4} & (k+1)^2 \leq j < (k+2)^2 \end{cases}$ $b_j = k^{-4}$
 $k^2 \leq j < (k+1)^2$

105.8.2 Sia $\alpha > 1$ e sia $b_k = k^{-p}$. $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{k})^p} = 1 - \frac{p}{k} E(k)$ dove $E(k) \rightarrow 1$ per $k \rightarrow +\infty$.

Se dunque $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} E(k)$ allora $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ con $\alpha > p > 1$ e quindi, grazie al criterio precedente, si ha convergenza.

Se viceversa $\alpha < 1$ allora $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} E(k) > 1 - \frac{p}{k} E(k)$ con $\alpha < p < 1$ e quindi divergenza.

• Per $a_k = \frac{1}{k}$ si ha $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k} \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k} E(k)$ e quindi in questo caso, con $\alpha = 1$, si ha divergenza.

• Se invece $a_{k+1} = \frac{1}{k \ln^2 k}$ allora $\frac{a_{k+1}}{a_k} = (1 - \frac{1}{k})(1 + 2 \frac{\ln(1 - \frac{1}{k})}{\ln k} + \frac{\ln^2(1 - \frac{1}{k})}{\ln^2 k}) = 1 - \frac{1}{k} E(k)$

e quindi stavolta, con $\alpha = 1$, si ha convergenza.

• $\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=1}^k (1+i\alpha)}{\prod_{i=1}^k (1+i\beta)}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha(n+1)+1}{\beta(n+1)+1}$ e quindi, per il criterio del rapporto), se $\beta > \alpha > 0$ si ha convergenza mentre se $0 < \beta \leq \alpha$ si ha divergenza.

• $\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^k (2 - e^{\frac{\alpha}{i}})$. Se $\alpha = \ln 2$ si ha $a_k \equiv 0$. e quindi la serie converge. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2 - e^{\frac{\alpha}{k}} = 1 - \frac{\alpha}{k} + O(\frac{1}{k^2})$ e quindi se $\alpha > 1$ la serie converge mentre se $\alpha < 1$ la serie diverge.

• $1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum a_n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a-b}{n} + O(n^{-2})$ e quindi se $b > a+1$ converge.

Sia $u_{n+1} = \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)}$, $u_0 = 1$. Per definizione $u_n(a+n) = u_{n+1}(b+n)$ e quindi $(b-a-1)u_{n+1} = u_n(a+n) - u_{n+1}(a+1+n)$. Sommando da $n=0$ a $n=m$ si ha $(b-a-1)(S_m - u_0) = au_0 - (a+1+m)u_{m+1}$. Poiché $u_{n+1} \leq u_n$ e la serie converge segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$ (vedi

rich.5) e quindi si ha $(b-a-1)S = au_0 + (b-a-1)u_0$ e quindi la somma della serie è $\frac{b-1}{b-a-1}$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_n$. Detto a_n il termine della serie si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \frac{a+n}{b+n} = 1 + \frac{1}{n}(-b+a+1) + O(\frac{1}{n^2})$ e se $b > a+2$ la serie converge; altrimenti diverge. Per trovare la

somma della serie scriviamo $(n+1) \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)} = \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)} (a+n+1) - \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)} a = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} (a+k)}{\prod_{k=0}^{n+1} (b+k)} - \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)} a$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)} a = \frac{a^2}{b-a-1}$ in base al risultato di prima.

Sia $c_n = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} (a+k)}{\prod_{k=0}^n (b+k)}$. $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a+n+2}{b+n+1}$ e quindi $c_{n+1}(b-a-2) = (n+2+a)c_n - a_{n+1}(n+1+2+a)$. $(b-a-2) \sum_{n=0}^m c_n = c_0(2+a) - c_{m+1}(m+3+a)$. Tenendo conto del fatto che $\sum c_n$

converge e $c_n \searrow 0$, segue $(b-a-2) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = c_0(2+a)$ dove $c_0 = \frac{a(a+1)}{b}$. Dunque $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n =$

$c_0 + \frac{c_0(2+a)}{b-a-2} = \frac{a(a+1)}{b-a-2}$. Il risultato è dato da $\frac{a(a+1)}{b-a-2} - \frac{a^2}{b-a-1} = \frac{ab-a}{(b-a-1)(b-a-2)}$.

106.8.2 Prima dimostrazione. Dimostro che a_n è limitata dall'alto e quindi la serie $\sum 1/a_k$ diverge essendo monotona. $a_3 = 7/4$. Dimostro per induzione che $a_{2+n} \leq 17/2 - (17/2)/(2+n)$. Scriviamo la relazione come $a_n \leq M - P/n$ con $n \geq 3$ ed abbiamo

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2} \leq M - \frac{P}{n} + \frac{1}{n^2} (M - \frac{P}{n-1}) \leq M - \frac{P}{n+1} \iff M - \frac{P}{n-1} \leq P - \frac{P}{n+1}$$

da cui $M \leq P$ per forza. Inoltre $a_3 = \frac{9}{4} < \frac{17}{2} - \frac{17}{6} = \frac{17}{3}$

Seconda dimostrazione Usiamo il criterio di Raabe.

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 - \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}k^2} \geq 1 - \frac{\alpha}{k} E(k) \implies \text{la serie diverge}$$

107.8.2 Si ha $a_k = k^{-\alpha(1+\frac{\alpha(1)}{\alpha})}$ da cui il risultato

108.8.2 Si ha $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k}(1 - o(1)) = 1 - \frac{\alpha}{k}E(k)$

109.8.2 Utilizziamo il teorema di Cesàro–Stolz.

Teorema di Cesàro–Stolz Sia $b_k \nearrow +\infty$. Allora se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} = r$, si ha pure $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k/b_k = r$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/a_{k+1}) - \ln(1/a_k)}{\ln(k+1) - \ln(k)} = - \lim_{k \rightarrow +\infty} k \ln(a_{k+1}/a_k)$$

Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} [k(1 - a_{k+1}/a_k)] = \alpha \in \mathbf{R}$ allora $a_{k+1}/a_k \rightarrow 1$. Inoltre

$$\ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln \left[\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) + 1 \right] = \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right)^2 + o \left(\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right)^2 \right)$$

ossia

$$k \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = k \ln \left[\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) + 1 \right] = k \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) - \frac{k}{2} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right)^2 + ko \left(\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right)^2 \right)$$

e quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} k \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) = -\alpha$$

da cui il risultato. Supponiamo ora $\alpha = +\infty$. Dividiamo i naturali in due gruppi. Nel gruppo A_1 mettiamo quegli interi per cui $a_{k+1}/a_k \leq 1/e$ e nel secondo A_2 quegli interi per cui $a_{k+1}/a_k \geq 1/e$. Siccome $\alpha = +\infty$ definitivamente deve essere $a_{k+1}/a_k < 1$. Se $0 < x \leq 1/e$ abbiamo $1 - x \leq \frac{\ln(1/x)}{e}$ da cui

$$[k(1 - a_{k+1}/a_k)] \leq \frac{-k}{e} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad k \in A_1, \quad -k \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq k, \quad k \in A_2$$

La successione $1/2, 1/3, 1/2, 1/3, \dots$ è tale per cui $n(1 - a_{k+1}/a_k)$ non converge ma $\ln(1/a_k)/\ln k \rightarrow 0$.

110.8.2 Sia $\alpha \leq 1$ e si prenda $a_k = \frac{1}{k \ln k}$. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)}\right) \cdot$

$\left(1 - \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln k} + \frac{\ln^2(1 + \frac{1}{k})}{\ln^2 k + \ln k \ln(1 + \frac{1}{k})}\right) = 1 - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\ln k}\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Ciò vuol dire che per qualsiasi

successione positiva $b_k > 0$ per cui $\frac{b_{k+1}}{b_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} + \frac{f(k)}{k^s}$, $s > 1$, con $\alpha \leq 1$ e $|f(k)| \leq A$ si ha

$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ e quindi $\sum b_k$ diverge.

Se $\alpha > 1$ si ricade nell'esercizio relativo a rich.6

111.8.2

$$\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = 1 - \frac{(n+1)(a_n - a_{n+1}) - a_n}{na_n} \doteq 1 + q_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n} o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

e

$$\prod_{n=1}^N \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \frac{(N+1)a_{N+1}}{a_1} = \prod_{n=1}^N (1 + q_n)$$

$$\ln \prod_{n=1}^N (1 + q_n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln N \implies \prod_{n=1}^N (1 + q_n) \sim N$$

e quindi $a_n \sim 1$ da cui la divergenza della serie $\sum a_n$ e $s_n \sim na_n$. Hardy invece dice $na_n \sim \ln n$ ma in tal caso si avrebbe $s_n \sim (\ln n)^2/2$ e non sarebbe vero che $s_n \sim na_n$

Una seconda dimostrazione della divergenza. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$ allora definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} + \frac{f(n)}{n^s}$ e per [Rich.6] (**Criterio di Raabe**) la serie $\sum a_n$ diverge

112.8.2 $\sum (1 - \frac{x}{n} \ln n)^n$ bisogna effettuare lo sviluppo asintotico di $\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

$$a_{k+1} = \exp\{-x \ln k - x \ln(1 + \frac{1}{k}) - \frac{x^2}{2(k+1)} \ln^2(k+1) + O(\frac{x^3}{k^2} \ln^3 k)\};$$

$$a_k = \exp\{-x \ln k - \frac{x^2}{2k} \ln^2 k + O(\frac{x^3}{k^2} \ln^3 k)\}; \text{ e quindi}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \exp\{-x \ln(1 + \frac{1}{k}) - \frac{x^2}{2k+2} \ln^2(1+k) + \frac{x^2}{2k} \ln^2 k + O(\frac{x^3}{k^2} \ln^3 k)\};$$

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{k} (1 - \frac{1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + O(k^{-3}).$$

$$\frac{x^2}{2k} \ln^2 k - \frac{x^2}{2k+2} \ln^2(1+k) = \frac{x^2}{2k} (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) + \frac{x^2}{2k^2} \ln^2(1+k) + x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^3}) =$$

$$= \frac{x^2}{2k} (\ln k - \ln(1+k)) (\ln k + \ln(1+k)) + \frac{x^2}{2k^2} \ln^2(1+k) + x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^3}) =$$

$$= \frac{x^2}{2k} \ln(2k+1) \ln(1 - \frac{1}{k+1}) + \frac{x^2}{2k^2} \ln^2(1+k) + x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^3}) = x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^2})$$

e quindi si ottiene $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \exp\{-\frac{x}{k} + xO(\frac{1}{k^2}) + (x^2 + x^3)O(\frac{\ln^3 k}{k^2})\} = \exp\{-\frac{x}{k} + (x + x^2 + x^3)O(\frac{\ln^3 k}{k^2})\} = 1 - \frac{x}{k} + O(\frac{\ln^3 k}{k^2})$. Il risultato è che se $x > 1$ la serie converge e diverge se $0 \leq x \leq 1$

113.8.2 $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2 - e^{\frac{\alpha}{k}} = 1 - \frac{\alpha}{k} + O(\frac{1}{k^2})$ e quindi diverge anche per $\alpha = 1$

114.8.2 $\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} e^{-j^a}$ converge sempre. Infatti $\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{j+1}{j+1-k} e^{-(j+1)^a + j^a} =$

$$= (1 + \frac{k}{j} + O(\frac{k^2}{j^2})) e^{j^a(1 - (1 + \frac{1}{j})^a)} = (1 + \frac{k}{j} + O(\frac{k^2}{j^2})) (1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!} (j^a(1 - (1 + \frac{1}{j})^a))^r). \text{ La serie in}$$

r converge e prendiamo: 1) N intero tale che $\frac{a}{1-a} < N \leq \frac{1}{1-a}$, 2) $\beta > 1$. Riscriviamo

$$\text{quindi } \frac{a_{j+1}}{a_j} = (1 + \frac{k}{j} + O(\frac{k^2}{j^2})) (1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{c_r}{r! j^{(1-a)r}}) = (1 + \frac{k}{j} + O(\frac{k^2}{j^2})) (1 + \sum_{r=1}^N \frac{c_r}{r! j^{(1-a)r}} +$$

$$O(j^{-(N+1)(1-a)})) = 1 + \frac{k}{j} + O(\frac{k^2}{j^2}) + \sum_{r=1}^N \frac{c_r}{r! j^{(1-a)r}} + k \sum_{r=1}^N \frac{c_r}{r! j^{(1-a)r+1}} + O(\frac{k^2}{j^2}) \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{c_r}{r! j^{(1-a)r}} +$$

$$O(j^{-(N+1)(1-a)}) = 1 + \frac{k}{j} + \frac{c_1}{j^{1-a}} (1 + o(\frac{1}{j^{1-a}})) + O(\frac{1}{j^\beta}) = 1 - \frac{1}{j} (-k + a j^a + o(j^a)) + O(\frac{1}{j^\beta}). \text{ Ne}$$

segue che, per qualsiasi $\alpha > 1$, esiste j_0 tale che $j \geq j_0$ tale che $1 - \frac{\alpha}{j} + O(\frac{1}{j^\beta}) \geq 1 - \frac{1}{j} (-k +$

$aj^a + o(j^a)) + O(\frac{1}{j^\beta})$ e quindi la serie converge per qualsiasi valore di k .

• Se $N \leq 0$ la serie ovviamente non converge in quanto il termine generale non tende a zero.
 $\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} j^{-N} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{j+1}{j+1-k} \frac{j^N}{(j+1)^{N+1}} = 1 - \frac{1}{j}(N-k) + O(j^{-2})$ per $j \rightarrow +\infty$. Ne segue che la serie converge per $k < N-1$ e diverge se $k \geq N$.

115.8.2 Usiamo $1 - x/2 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. Per $0 \leq x \leq 2$ la parte sinistra è vera. La parte destra è vera sempre. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{(k-1)\pi}{2n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}} \underbrace{=}_{n-k=p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n} \sin^2 \frac{(k+1)\pi}{2n}} = \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \frac{\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \frac{\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right)^2}{\sin^2 \frac{(k+1)\pi}{2n}} \frac{(2k+1)\pi}{2n} \left(\frac{2n}{(k+1)\pi}\right)^2 \left(\frac{2n}{k\pi}\right)^2 \\ & \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \frac{\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \frac{\left(\frac{(k+1)\pi}{2n}\right)^2}{\sin^2 \frac{(k+1)\pi}{2n}} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{k\pi}{2n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+1)\pi}{2n}\right)^2} = \\ & = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{k\pi}{4n}\right)^p\right)^2 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(k+1)\pi}{4n}\right)^p\right)^2 = \left(1 + \frac{\frac{k\pi}{4n}}{1 - \frac{k\pi}{4n}}\right)^2 \left(1 + \frac{\frac{(k+1)\pi}{4n}}{1 - \frac{(k+1)\pi}{4n}}\right)^2 \leq \\ & \leq \left(1 + \frac{\frac{k\pi}{4n}}{1 - \frac{\pi}{4}}\right)^2 \left(1 + \frac{\frac{(k+1)\pi}{4n}}{1 - \frac{\pi}{4}}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{\frac{(k+1)\pi}{4n}}{1 - \frac{\pi}{4}}\right)^4 \end{aligned}$$

Ora osserviamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^p} = 0$ per ogni $p \geq 0$ e quindi alla fine rimaniamo solo con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k+1)\pi}{2n} \left(\frac{2n}{(k+1)\pi}\right)^2 \left(\frac{2n}{k\pi}\right)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{(k+1)^2 k^2} \frac{8}{\pi^3} = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{8}{\pi^3}$$

116.8.2 Sia $A_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2 \rightarrow \pi^2/6$, $H_n \sim \ln n$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = O(1/k)$

$$\begin{aligned}
 1 + \sum_{k=2}^N \frac{H_k}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^N (A_k H_k - A_{k-1} H_{k-1}) + \sum_{k=2}^N A_{k-1} (H_{k-1} - H_k) = A_N H_N - \sum_{k=2}^N \frac{A_{k-1}}{k} = \\
 &= A_N H_N - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \right) = A_N H_N - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \\
 &= \underbrace{\left(A_N - \frac{\pi^2}{6} \right) H_N}_{\rightarrow 0} + \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=k}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tj} t dt = \int_0^{+\infty} t dt \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \frac{e^{-tk}}{1 - e^{-t}} = - \int_0^{+\infty} \frac{t \ln(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} dt = \\
 &= - \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x(1-x)} dx = - \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} dx = 2 \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} dx = \\
 &= -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^{k-1} \ln x dx = -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{x^k \ln x}{k} \right]_0^1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{k^2} \int_0^1 x^{k-1} dx = 2\zeta(3)
 \end{aligned}$$

117.8.2 La serie $1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (a+k)}{\prod_{k=0}^n (a+1+k)}$ diverge in quanto $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ e quindi diverge

118.8.2 La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^n (a+k \ln k)}{\prod_{k=1}^n (b+k \ln k)}$ diverge per ogni valore di $a, b > 0$. Se $a \geq b$ allora $a_n \geq 1$ e quindi diverge. Per $b > a$ abbiamo $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \frac{b-a}{n \ln n} + O(\frac{1}{n^2}) \geq 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$ e quindi diverge

119.8.2 Il criterio di D'Alembert per la convergenza è $\overline{\lim} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l < 1$. Dobbiamo mostrare che a patto di prendere una opportuna successione $\{b_k\}$ si ha $\frac{a_k}{a_{k+1}} - \frac{b_{k+1}}{b_k} \geq \frac{c}{b_k}$ per un opportuno positivo c . È come dire $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_k}{c + b_{k+1}}$. Ora prendiam $b_k = 1$, $c > 1$ ed abbiamo il risultato (almeno asintoticamente). Non è difficile ora trovare altre due successioni valide per i criteri di *Raabe* e *Gauss*.

120.8.2

$$a_n \geq a_{n+1} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{-1} > a_{n+2} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{c}{n+1}\right)^{-1}$$

$$a_n \geq \frac{a_{n+k+1}}{\left(1 + \frac{c}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{c}{n+k}\right)} > a_{n+k+1} e^{\frac{-c}{n} - \frac{c}{n+1} - \cdots - \frac{c}{n+k}} > a_{n+k+1} e^{\frac{-c}{n}} > a_{n+k+1} e^{-c} \quad 0 \leq k \leq n$$

e quindi $\varepsilon > \sum_{k=n}^{2n+1} a_k > e^{-c} \sum_{k=n}^{2n+1} a_n = e^{-c} (n+2) a_n$ da cui $na_n \rightarrow 0$.

121.8.2 Dal fatto che $\sum a_k$ converge e dal fatto che $\{a_k\}$ è monotona, segue che $\sum 2^k a_{2^k} \stackrel{\text{def}}{=} \sum b_k$ converge. Dal fatto che $\{b_k\}$ è monotona segue che $\lim_{k \rightarrow +\infty} k b_k = 0$ e quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} k 2^k a_{2^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(2^k) 2^k a_{2^k} = 0$. Supponiamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} k \ln(k) a_k \neq 0$ oppure che il limite

non esista. Vuol dire che esiste ε_0 ed esiste una sottosuccessione k_n tale che $k_n \ln(k_n) a_{k_n} \geq \varepsilon_0$. Sia j_n tale che $2^{j_n} \leq k_n \leq 2^{j_n+1}$ e inoltre $2^{j_n} a_{j_n} (\ln 4) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Abbiamo

$$\varepsilon_0 \leq k_n \ln(k_n) a_{k_n} \leq a_{2^{j_k}} 2^{j_k+1} \ln(2^{j_k+1}) = a_{2^{j_k}} 2^{j_k} 2(\ln(2^{j_k}) + \ln 2)$$

e quindi $\varepsilon_0 - a_{2^{j_k}} 2^{j_k} \ln 4 \leq 2a_{2^{j_k}} 2^{j_k} \ln(2^{j_k})$ da cui $\frac{\varepsilon_0}{4} \leq a_{2^{j_k}} 2^{j_k} \ln(2^{j_k})$. Chiaramente vi è una contraddizione.

• Si applica il secondo risultato di [\[Rich.7\]](#) alla successione p_{2^k} . Dunque abbiamo la successione b_k , monotona decrescente con serie $\sum b_k$, convergente, tale che $p_{2^n} n b_n \not\rightarrow 0$ e costruita in base al risultato precedente. Definiamo $b_n \stackrel{\text{def}}{=} 2^n a_{2^n}$ per cui $p_{2^n} 2^n a_{2^n} \ln 2^n \not\rightarrow 0$. Fino ad ora abbiamo definito a_{2^k} . Definiamo $a_k = a_{2^n}$ per $2^{n-1} < k \leq 2^n$. a_k è sempre decrescente così come $2^k a_{2^k}$. Inoltre $\sum a_k = \sum_k a_{2^k} (2^k - 2^{k-1}) = \frac{1}{2} \sum_k 2^k a_{2^k} = \frac{1}{2} \sum b_k < +\infty$

122.8.2 Facciamo vedere che $\sum a_k < +\infty \Rightarrow \sum k(a_k - a_{k+1}) < +\infty$. Dimostriamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : p, q > N_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=p}^q k(a_k - a_{k+1}) < \varepsilon$. Basta scrivere $\sum_{k=p}^q k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=p}^q a_{k+1} -$

$$(q+1)a_{q+1} + pa_p = \sum_{k=p-1}^{q-1} a_k - (q+1)a_{q+1} + pa_p < \varepsilon \text{ grazie al risultato per cui se una serie non}$$

negativa monotona $\sum a_k$ converge, allora ka_k tende a zero (vedi [\[Rich.7\]](#)) e al fatto che la serie converge.

• Facciamo vedere che $\sum a_k = +\infty$ e $na_n \rightarrow 0$ implicano $\sum k(a_k - a_{k+1}) = +\infty$. Mostriamo che $\sum k(a_k - a_{k+1}) < +\infty \Rightarrow \sum a_k < +\infty$. Usiamo sempre $\sum_{k=p}^q k(a_k - a_{k+1}) + (q+1)a_{q+1} - pa_p =$

$$\sum_{k=p}^q a_{k+1}. \quad (q+1)a_{q+1} = (q+1)(a_{q+1} - a_{q+2}) + \dots + (q+1)(a_{q+N-1} - a_{q+N}) + (q+1)a_{q+N} \leq$$

$$\sum_{j=q+1}^{q+N-1} j(a_j - a_{j+1}) + (q+1)a_{q+N}. \text{ Analogamente abbiamo } pa_p = p(a_p - a_{p+1}) + \dots + p(a_{p+N-1} -$$

$$a_{p+N}) + pa_{p+N} \leq \sum_{j=p}^{p+N-1} j(a_j - a_{j+1}) + pa_{p+N}. \text{ Dunque } \sum_{k=p}^q a_{k+1} \leq \sum_{k=p}^q k(a_k - a_{k+1}) + \sum_{j=q+1}^{q+N-1} j(a_j -$$

$$a_{j+1}) + (q+1)a_{q+N} + \sum_{j=p}^{p+N-1} j(a_j - a_{j+1}) + pa_{p+N} \text{ e se } p, q, N \text{ sono grandi abbastanza la somma}$$

dei cinque termini è minore di ε .

• Diamo ora una serie $\sum a_k$ convergente con $a_k \geq 0$ ma tale che $\sum k(a_k - a_{k+1})$ non converge e chiaramente a_k non è monotona. Prendiamo $a_k = \begin{cases} 1/k, & k = p^2 \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$

• Diamo ora una serie divergente $\sum a_k = +\infty$ ma tale che $\sum k(a_k - a_{k+1})$ converge con $a_k \geq 0$ ma a_k non monotona. Prendiamo $a_k = \begin{cases} 1 + 1/k^3, & k = 2p \\ 1 - 1/k^3, & k = 2p - 1 \end{cases}$

123.8.2 A partire dalle successioni $\{k^{-1}\}$ e $\{k^{-2}\}$, costruiamo le due nuove successioni

$a_k = 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$ e $b_k = 1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \dots$. Entrambe contengono la stessa sottosuccessione divergente ma $c_k = \min\{a_k, b_k\} = k^{-2}$.

$$\bullet c_k = k^{-2}, k_1 > 1, k_{l+1} = 2k_l. a_j = \begin{cases} c_{k_l} & k_l < j \leq k_{l+1} \\ c_j & k_{l+1} < j \leq k_{l+2} \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} c_j & k_l < j \leq k_{l+1} \\ c_{k_l} & k_{l+1} < j \leq k_{l+2} \end{cases}$$

Chiaramente $\sum c_k$ converge, $\sum a_k \geq \sum_l \sum_{j=k_l}^{k_{l+1}} k_j c_j \geq \sum_l k_l \frac{1}{k_l} = +\infty$ e $\sum b_k$ la stessa cosa.

• Se vogliamo a_k, b_k strettamente decrescenti, basta modificare le precedenti nell'intervallo di indici in cui sono costanti. Ad esempio nell'intervallo $k_l < j \leq k_{l+1}$ prendiamo $a_j = c_{k_l} - \varepsilon_j^{(l)}$ con $\varepsilon_j^{(l)} = \frac{j}{k_l} \varepsilon (c_{k_{l+1}} - c_{k_l})$ e $0 < \varepsilon < 1$.

124.8.2 Consideriamo ora una successione $c_k \searrow 0$, tale che $\sum c_k < +\infty$. Induttivamente definiamo una successione crescente di interi $\{q_k\}$ tale che $c_{q_k} q_{k+1} \geq \varepsilon$ e $q_{k+1} \geq 2q_k$ per ogni intero k e $\varepsilon > 0$ fissato. Ad esempio sia $q_1 = 1, q_2 = \max \left\{ 2q_1, \left\lceil \frac{\varepsilon}{c_{q_1}} \right\rceil \right\}, q_3 = \max \left\{ 2q_2, \left\lceil \frac{\varepsilon}{c_{q_2}} \right\rceil \right\}$.

Definiamo poi le seguenti successioni: $a_j = \begin{cases} c_j & q_k \leq j < q_{k+1} \\ c_{q_{k+1}} & q_{k+1} \leq j < q_{k+2} \end{cases}$

$$b_j = \begin{cases} c_{q_k} & q_k \leq j < q_{k+1} \\ c_j & q_{k+1} \leq j < q_{k+2} \end{cases}$$

Si verifichi che $\sum a_k = \sum b_k = +\infty$ e che $\min\{a_k, b_k\} = c_k$. Infatti

$$\sum_{j=q_{k+1}}^{q_{k+2}-1} a_j = \sum_{j=q_{k+1}}^{q_{k+2}-1} c_{q_{k+1}} = c_{q_{k+1}} (q_{k+2} - q_{k+1}) \geq \frac{1}{2} c_{q_{k+1}} q_{k+2} \geq \varepsilon/2$$

definitivamente. In $\{b_k\}$ succede la stessa cosa.

• Il problema risolto nella referenza 1) è un pò diverso. Lì si chiede di trovare due successioni monotone positive $\{d_k\}$ e $\{d'_k\}$ tali che $\sum d_k = \sum d'_k = +\infty$ ma $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$. Il risolutore immagina di avere due successioni positive $D_n > C_n$ tali che $C_n \searrow 0, D_n \searrow 0$ e

$\sum D_n = +\infty$ e $\sum C_n < +\infty$. Quindi per ogni intero q esiste un intero $R(q)$ tale che $\sum_{n=q}^{R(q)} D_n \geq \varepsilon$.

Definiamo allora la successione $\{n_k\}$ per induzione: $n_1 = 1, n_2$ è tale che $D_{n_2} < C_{R(1)}$ e via dicendo $D_{n_{k+1}} < C_{R(n_k)}$. Siccome

$$C_{n_{k+1}} < D_{n_{k+1}} < C_{R(n_k)}$$

segue che $n_k < R(n_k) < n_{k+1}$. Ora definiamo

$$\{a_n\} = C_{n_1}, C_{n_1+1}, \dots, C_{R(n_1)}, D_{n_2}, D_{n_2+1}, \dots, D_{R(n_2)}, C_{n_3}, \dots, C_{R(n_3)}, D_{n_4}, \dots$$

$$\{b_n\} = D_{n_1}, D_{n_1+1}, \dots, D_{R(n_1)}, C_{n_2}, C_{n_2+1}, \dots, C_{R(n_2)}, D_{n_3}, \dots, D_{R(n_3)}, C_{n_4}, \dots$$

Chiaramente $\sum a_k = \sum b_k = +\infty$ in quanto contengono i pezzi $\sum_{k=q}^{R(q)} D_k \geq \varepsilon$ e d'altra parte

$$\sum \min\{a_k, b_k\} < \sum C_k < +\infty.$$

In relazione agli esercizi di questo gruppo, è interessante notare che se invece di $c_k = \min\{a_k, b_k\}$ si prendesse $d_k = \max\{a_k, b_k\}$ allora $\sum d_k$ divergerebbe (una volta date a_k e b_k con le precedenti caratteristiche). Se invece sapessimo che $\sum a_k$ converge e $\sum b_k$ converge allora $\sum c_k$ e $\sum d_k$ convergerebbero entrambe. La ragione risiede nel seguente fatto: se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ converge/diverge allora $\sum (a_k + b_k)$ converge/diverge e inoltre $a_k + b_k = c_k + d_k$. Supponiamo che

$\sum a_k$ e $\sum b_k$ convergano; converge pure $\sum c_k$ e quindi $\sum d_k = \sum(a_k + b_k) - \sum c_k$ converge essendo la differenza di serie convergenti. Se viceversa divergono $\sum a_k$ e $\sum b_k$ allora diverge pure $\sum d_k$. Nulla però si può dire della serie $\sum c_k = \sum(a_k + b_k) - \sum d_k$ in quanto la differenza di due serie divergenti può divergere essa stessa oppure può convergere.

125.8.2 Prendiamo $N = 3$ e le tre successioni $a_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ le richiamiamo $\{a\}$, $\{b\}$, $\{d\}$. Consideriamo ora una successione $c_k \searrow 0$, tale che $\sum c_k < +\infty$. Induttivamente definiamo una successione crescente di interi $\{q_k\}$ tale che $c_{q_k} q_{k+1} \geq \varepsilon$ e $2q_{k+1} \geq q_k$ per ogni intero k e $\varepsilon > 0$ fissato. Ad esempio sia $q_1 = 1$, $q_2 = \max\left\{2q_1, \frac{\varepsilon}{[c_{q_1}]}\right\}$, $q_3 = \max\left\{2q_2, \frac{\varepsilon}{[c_{q_2}]}\right\}$.

$$a_j = \begin{cases} c_{q_k} & q_k \leq j < q_{k+1} \\ c_{q_{k+1}} & q_{k+1} \leq j < q_{k+2} \\ c_j & q_{k+2} \leq j < q_{k+3} \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} c_{q_k} & q_k \leq j < q_{k+1} \\ c_j & q_{k+1} \leq j < q_{k+2} \\ c_{q_{k+2}} & q_{k+2} \leq j < q_{k+3} \end{cases} \quad d_j = \begin{cases} c_j & q_k \leq j < q_{k+1} \\ c_{q_{k+1}} & q_{k+1} \leq j < q_{k+2} \\ c_{q_{k+2}} & q_{k+2} \leq j < q_{k+3} \end{cases}$$

$$\sum \min\{a_j, b_j\} > \sum_{q_k}^{q_{k+1}} c_{q_k} = c_{q_k}(q_{k+1} - q_k + 1) \geq c_{q_k} q_{k+1}/2$$

$$\sum \min\{a_j, d_j\} > \sum_{q_{k+1}}^{q_{k+2}} c_{q_{k+1}} = c_{q_{k+1}}(q_{k+2} - q_{k+1} + 1) \geq c_{q_{k+1}} q_{k+2}/2$$

$$\sum \min\{b_j, d_j\} > \sum_{q_{k+2}}^{q_{k+3}} c_{q_{k+2}} = c_{q_{k+2}}(q_{k+3} - q_{k+2} + 1) \geq c_{q_{k+2}} q_{k+3}/2$$

$$\sum \min\{a_j, b_j, d_j\} = \sum c_j < +\infty$$

126.8.2 Se $\{d_k\}$ e $\{d'_k\}$ sono monotone, anche $c_k \doteq \min\{d_k, d'_k\}$ lo è ed essendo la serie $\sum c_k$ convergente, $\lim_{k \rightarrow +\infty} k c_k = 0$ da cui $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k d_{n_k} = 0$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k d'_{m_k} = 0$ per due opportune sottosuccessioni $\{n_k\}$ e $\{m_k\}$. Quindi $\underline{\lim} k d_k = \underline{\lim} k d'_k = 0$ ossia $\overline{\lim}(k d_k)^{-1} = \overline{\lim}(k d'_k)^{-1} = +\infty$

La monotonia di c_k . $c_{k+1} = \min\{d_{k+1}, d'_{k+1}\}$ e supponiamo che $c_{k+1} = d_{k+1}$. Se $d_k \leq d'_k$ allora $d_{k+1} \leq d_k = c_k$. Se $d'_k \leq d_k$ allora $d_{k+1} \leq d'_{k+1} \leq d'_k = c_k$.

• Siccome $d_k \rightarrow 0$ possiamo trovare una sottosuccessione $\{p_k\}$ tale che $d_{p_k} \leq 1/k^2$. Costruiamo allora la successione $\{d'_k\}$

$$d'_1 = d_{p_1}, d'_2 = d_{p_2}, \dots, d'_{p_1-1} = d_{p_{p_1-1}}, d'_{p_1} = 1, d'_{p_1+1} = d_{p_{p_1+1}}, \dots, d'_{p_2-1} = d_{p_{p_2-1}}, d'_{p_2} = 1, \dots$$

Chiaramente $d_{p_j} \leq d_j$ grazie alla decrescenza.

$$\sum_j d'_j > \sum_{j=1}^{\infty} d'_{p_j} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

Ne segue che per $n = 1, 2, \dots$, si ha

$$c_j \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d_j, d'_j\} = \begin{cases} d'_j, & j \neq p_n \\ d_{p_n}, & j = p_n \end{cases} = \begin{cases} d_{p_j}, & j \neq p_n \\ d_{p_n}, & j = p_n \end{cases} \implies \sum c_j = 2 \sum d_{p_j} \leq 2 \sum 1/j^2 < +\infty$$

$\{d'_j\}$ non è monotona. Se la vogliamo monotona possiamo operare nel seguente modo

A partire da $\{d_k\}$ e $\{d'_k\}$ costruiamo due nuove successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ induttivamente nel seguente modo. $a_1 = d_1$, $b_1 = d'_1$.

1) Se $d_2 \leq d_1$ e $d'_2 \leq d'_1$ allora $a_2 = d_2$ e $b_2 = d'_2$.

2) Se $d_2 > d_1$ e $d'_2 \leq d'_1$ allora sia m_2 il più piccolo intero tale che $d_2/m_2 < d_1$. In tal modo definiamo $a_2 = d_2/m_2$, $a_3 = d_2/m_2$, e così via fino al termine $a_{1+m_2} = d_2/m_2$. Inoltre definiamo $b_2 = d'_2/m_2$, $b_3 = d'_2/m_2$, e così via fino al termine $a_{1+m_2} = d'_2/m_2$.

3) Se $d_2 > d_1$ e $d'_2 > d'_1$ allora sia m_2 il più piccolo intero tale che $d_2/m_2 < d_1$ e sia m'_2 il più piccolo intero tale che $d'_2/m'_2 < d'_1$.

In tal caso definiamo prendiamo il più grande fra m_2 e m'_2 che chiamiamo r_2 e definiamo $a_2 = d_2/r_2$, $a_3 = d_2/r_2$, e così via fino al termine $a_{1+r_2} = d_2/r_2$. Inoltre definiamo $b_2 = d'_2/r_2$, $b_3 = d'_2/r_2$, e così via fino al termine $a_{1+r_2} = d'_2/r_2$.

4) Se $d_2 \leq d_1$ e $d'_2 > d'_1$ allora sia m'_2 il più piccolo intero tale che $d'_2/m'_2 < d'_1$. In tal modo definiamo $b_2 = d'_2/m'_2$, $a_3 = d'_2/m'_2$, e così via fino al termine $b_{1+m'_2} = d'_2/m'_2$. Inoltre definiamo $a_2 = d_2/m'_2$, $a_3 = d_2/m'_2$, e così via fino al termine $a_{1+m'_2} = d_2/m'_2$.

Chiaramente $\sum a_k = \sum d_k = +\infty$ e $\sum d'_k = \sum b_k = +\infty$.

Una volta formate le successioni monotone $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ formiamo $c'_k = \min\{a_k, b_k\}$ e per costruzione $c'_k \leq \min\{d_k, d'_k\}$ per cui $\sum c'_k < +\infty$.

127.8.2

128.8.2 Se la serie convergesse allora sarebbe di Cauchy e quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon: n, m > k_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=p}^q \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k} < \varepsilon. \text{ Dimosteremo che } \exists \varepsilon > 0: \forall p \exists q >$$

$$p: \sum_{k=p}^q \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k} \geq \varepsilon. \sum_{k=p}^q \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k} \geq \sum_{k=p}^q \frac{m_k - m_{k-1}}{m_q} = 1 - \frac{m_{p-1}}{m_q} \text{ e per ogni } p \text{ si può}$$

prendere q abbastanza grande in modo tale che $\frac{m_{p-1}}{m_q} < \frac{1}{2}$ da cui il risultato. Nel passaggio $\geq$ si è usata la monotonia di m_k .

Una seconda dimostrazione. Bisogna osservare che si può scrivere $m_k = m_{k-1} + a_k$ con a_k

intero. Al passo successivo si ha $m_k = m_{k-2} + a_{k-1} + a_k$ e quindi $m_k = \sum_{i=1}^k a_k$. La re-

lazione $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$ diventa $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{\sum_{j=1}^k a_k}$. Tramite il risultato dell'esercizio rich.8 la serie

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{\sum_{j=1}^k a_k}$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, il che è impossibile essendo gli a_k interi.

• Se gli m_k non sono tutti interi ancorché strettamente crescenti, bisogna distinguere i due casi:

$$1) \lim_{k \rightarrow +\infty} m_k = +\infty, \quad 2) \lim_{k \rightarrow +\infty} m_k = l \neq 0.$$

1) è lo stesso caso degli interi e quindi la serie diverge.

2) In tal caso la serie converge. Infatti la proprietà di Cauchy diventa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon: p, q > k_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=p}^q \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k} < \varepsilon \text{ in quanto } \sum_{k=p}^q \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k} < \frac{m_q - m_{p-1}}{m_p} < \varepsilon$$

se p e q sono sufficientemente grandi.

Se supponiamo che $\sum \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$ converge, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k = l$ per un qualche l perché se fosse $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k = +\infty$ allora la serie divergerebbe.

• Se $p = 2$ allora la serie diventa $\sum (\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}) = \frac{1}{m_1}$ e quindi converge. Se $p > 2$, per

confronto, la serie converge.

Sia $1 < p < 2$. Essendo $0 < p - 1 < 1$, usiamo la disuguaglianza $1 - x^{p-1} \geq (p-1)(1-x)$,

$x > 0$, per ottenere $\frac{1}{m_k^{p-1}}(1 - \frac{m_k}{m_{k+1}}) < \frac{1}{p-1}(1 - \frac{m_k^{p-1}}{m_{k+1}^{p-1}})$ e quindi la serie si maggiora con

$\frac{1}{p-1} \sum (\frac{1}{m_k^{p-1}} - \frac{1}{m_{k+1}^{p-1}})$ da cui la convergenza.

• Sia $m_k > 0$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k = 0$. Consideriamo la sottosuccessione $\{n_k\}$ tale che $\{m_{n_k}\}$ sia monotona decrescente. Facciamo vedere che la serie $\sum \frac{m_{n_k} - m_{n_k-1}}{m_{n_k}}$ non converge. Essendo

$m_k > 0$ non può convergere la serie originaria. Facciamo vedere che $\sum \frac{m_{n_k} - m_{n_k-1}}{m_{n_k}}$ non è di

Cauchy. $\sum_{k=p}^q \frac{m_{n_k} - m_{n_k-1}}{m_{n_k}} \geq \frac{1}{m_{n_q}} \sum_{k=p}^q (m_{n_k} - m_{n_k-1}) = \frac{m_{n_q} - m_{n_p-1}}{m_{n_q}}$. Prendiamo ora q così

grande che $2m_{n_p-1} < m_{n_q}$ e quindi la proprietà di Cauchy non è verificata.

• Non esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} m_k$. In tal caso la serie può convergere oppure divergere. Si prenda infatti

la successione $m_k = \begin{cases} -1 & k = 2p \\ 1 & k = 2p+1 \end{cases}$ e la serie non converge. Viceversa prendendo la seguente

successione

$m_k = \begin{cases} 2 + \sin k + \frac{1}{k^2} & k = 2p \\ 2 + \sin k & k = 2p+1 \end{cases}$ la serie converge.

129.8.2 Le serie divergono entrambe. Nel primo caso abbiamo

$\sum_{j=k}^n \frac{a_j - a_{j+1}}{a_{j+1}} \geq \sum_{j=k}^n \frac{a_j - a_{j+1}}{a_{k+1}} = \frac{a_k - a_n}{a_{k+1}} = \frac{a_k}{a_{k+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_{k+1}} \geq \frac{1}{2} \frac{a_k}{a_{k+1}} \geq \frac{1}{2}$ se n è grande

abbastanza per cui diverge.

• Per $\sum_{j=k}^n \frac{a_j - a_{j+1}}{a_j}$ si ha $\sum_{j=k}^n \frac{a_j - a_{j+1}}{a_j} \geq \sum_{j=k}^n \frac{a_j - a_{j+1}}{a_k} = \frac{a_k - a_n}{a_k} = \frac{a_k}{a_k} - \frac{a_{n+1}}{a_k} \geq \frac{1}{2}$

130.8.2 Se $p < 0$ allora $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}^p} \leq \sum (a_k - a_{k+1})$ e converge essendo una serie telescopica e $a_k \rightarrow 0$

Se $p > 1$ abbiamo $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}^p} \geq \sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} = +\infty$ da rich.25

$0 < p < 1$ può convergere o divergere a seconda della successione $\{a_k\}$. Se ad esempio $a_k = 1/k$

si ha $\frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}^p} \sim \frac{1}{k^{2-p}}$ la cui serie evidentemente converge ma se si prende la successione

$a_k = 2^{-q^k}$, $q > 1$, la serie converge o diverge a seconda del valore di q . Infatti $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}^p} =$

$\sum (2^{q^k(pq-1)} - 2^{-q^{k+1}(1-p)})$. La seconda serie converge mentre la prima converge o diverge a seconda che sia $pq < 1$ oppure $pq > 1$.

• $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k^p}$ Se $p < 1$ la serie converge. Infatti dalla concavità della funzione $1/x^{p-1}$, abbiamo

$$\frac{1}{a_{k+1}^{p-1}} \leq \frac{1}{a_k^{p-1}} + \frac{1-p}{a_k^p} (a_{k+1} - a_k) \iff (1-p) \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k^p} \leq \frac{1}{a_k^{p-1}} - \frac{1}{a_{k+1}^{p-1}}$$

da cui al convergenza. Se $p > 1$ si ha $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k^p} \geq \sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k} = +\infty$

131.8.2 Usare la monotonia della funzione.

$$\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1})f(a_n) < \sum_{n=1}^N \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)dx < \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

e quindi possiamo passare al limite $N \rightarrow +\infty$. Ugualmente scriviamo

$$\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1})f(a_{n+1}) > \sum_{n=1}^N \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)dx > \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

132.8.2 Cominciamo con 2). Sappiamo che

$$\sum (a_k - a_{k+1})f(a_k) \leq \int_0 f(x)dx \leq \sum (a_k - a_{k+1})f(a_{k+1}) \quad (0)$$

per cui se l'integrale diverge, diverge la serie di destra. Vogliamo far vedere che se l'integrale converge, converge pure la serie di destra. È la stessa cosa dimostrare che se la serie di destra diverge, allora diverge pure l'integrale. Facciamo vedere che sotto la condizione 2), se la serie di destra diverge, diverge pure la serie di sinistra. Infatti

$$+\infty = \sum_{k=k_0}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})f(a_{k+1}) = \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (a_{k-1} - a_k)f(a_k) \underbrace{\leq}_{\text{da 2)}} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} C(a_k - a_{k+1})f(a_k) \quad (1)$$

con C costante positiva. Ne segue la divergenza delle serie di destra in (1) e quindi, da (0), dell'integrale.

Le condizioni 1) e 3) sembrano essere sbagliate. Sia $a_k = 1/\ln k$. $a_k^{-1} - a_{k-1}^{-1} = \ln k - \ln(k-1) \sim 1/k$ da cui $\overline{\lim}(a_k^{-1} - a_{k-1}^{-1}) < +\infty$. Sia $f(x) = 1/\sqrt{x}$, e quindi $\int_0 f(x)dx < +\infty$ ma

$\sum (a_k - a_{k+1})f(a_k) \sim \sum \frac{\sqrt{k}}{k} = +\infty$. Quindi se l'integrale diverge, diverge pure la serie ma viceversa è falso. Inoltre $\overline{\lim} a_k/a_{k-1} > 0$.

133.8.2 i) Si usa rich.20. La condizione è $a_k \leq d_k \lambda^{D_k}$ e come funzione $f(x)$ prendiamo $f(x) = \lambda^x$ che è integrabile a $+\infty$.

ii) La condizione si scrive come $\frac{a_{k+1}/d_{k+1}}{a_k/d_k} \leq 1 - \rho d_k \leq e^{-\rho d_k}$ essendo $0 < \rho d_k < 1$. Ne segue

$\frac{a_n/d_n}{a_1/d_1} \leq e^{-\rho D_n+1} = e^{-\rho D_{n-1}+\rho d_n} < e^{-\rho D_n+1}$ e quindi $a_n \leq \frac{a_1}{d_1} d_n e^{-\rho D_n+1}$ e si applica rich.20

con $f(x) = e^{-\rho x}$.

134.8.2 i) $a_k \geq c_k \lambda^{1/R_k}$ che riscriviamo come $\tilde{a}_k \geq \tilde{c}_k \lambda^{1/\tilde{R}_k}$ ed applichiamo rich.26. $a_k = \tilde{R}_k$, $a_{k-1} - a_k = \tilde{R}_{k-1} - \tilde{R}_k = \tilde{c}_k$, $f(x) = \lambda^{1/x}$. Ne segue $\sum \tilde{a}_k \geq \sum \tilde{c}_k \lambda^{1/\tilde{R}_k} = \sum (\tilde{R}_{k-1} - \tilde{R}_k) \lambda^{1/\tilde{R}_k}$, e siccome $\int_0 f(x)dx = +\infty$, anche la serie diverge.

ii) La disuguaglianza diventa $\frac{c_k}{a_k} \frac{a_{k-1}}{a_{k-1}} \leq 1 - \rho(R_k^{-1} - R_{k-1}^{-1}) \leq e^{-\rho(R_k^{-1} - R_{k-1}^{-1})}$ da cui $\frac{c_k}{a_k} \leq \frac{c_1}{a_1} e^{-\rho(R_k^{-1} - R_1^{-1})}$ e quindi $a_k \geq \frac{a_1}{c_1} c_k e^{\rho(R_k^{-1} - R_1^{-1})}$. Essendo $c_k = R_{k-1} - R_k$ si ha $a_k \geq \frac{a_1}{c_1} e^{-\rho R_1^{-1}} (R_{k-1} - R_k) e^{\rho R_k^{-1}}$ da cui la divergenza di $\sum a_k$ grazie a rich.20 ($f(x) = e^{\rho/x}$)

135.8.2 Sia $c_k = \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k+1}}$. La serie chiaramente converge. D'altra parte $c_k d_k = \frac{d_{k+1} - d_k}{d_{k+1}}$ e diverge essendo $\sum_{k=p}^q \frac{d_{k+1} - d_k}{d_k} \geq 1 - \frac{d_p}{d_{q+1}} \geq \frac{1}{2}$ (usando la monotonia di d_k).

136.8.2 Sia $A_k = \frac{1}{a_k}$ per cui $A_k \nearrow +\infty$. Sia $d_k = \frac{A_{k+1} - A_k}{A_{k+1}}$. $\sum d_k$ diverge (per la monotonia) ma $\sum d_k a_k = \sum \frac{A_{k+1} - A_k}{A_k A_{k+1}} = \sum \left(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{A_{k+1}} \right)$ converge. Non è detto che $\{d_k\}$ sia monotona. Come si vede la monotonia di $\{a_k\}$ è essenziale.

Un'altra soluzione dove $\{d_k\}$ è monotona. Sia $\nu_k = \min\{j: a_j \leq 2^{-k}\}$. Definiamo $d_j = \frac{1}{\nu_{k+1}}$ per $\nu_k < j \leq \nu_{k+1}$. Dalla monotonia di a_j segue che $d_j \geq d_{j+1}$ e

$$\begin{aligned} \sum_{j=p}^q d_j &\geq \sum_{\substack{k=k_1 \\ p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q}}^{k_2} \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \frac{1}{\nu_{k+1}} = \sum_{\substack{k=k_1 \\ p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q}}^{k_2} \frac{\nu_{k+1} - \nu_k}{\nu_{k+1}} \geq \\ &\geq \frac{1}{\nu_{k_1+1}} \sum_{\substack{k=k_1 \\ p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q}}^{k_2} (\nu_{k+1} - \nu_k) = \frac{\nu_{k_1+1} - \nu_{k_2}}{\nu_{k_1+1}} \end{aligned}$$

dove k_1 e k_2 sono rispettivamente il più grande ed il più piccolo fra i k che soddisfano $p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q$. La successione $a_j d_j$ è monotona decrescente e

$$\begin{aligned} \sum_{j=p}^q a_j d_j &= \sum_{\substack{k=k_1 \\ p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q}}^{k_2} \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_j d_j \leq \sum_{\substack{k=k_1 \\ p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q}}^{k_2} \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} 2^{-k} \frac{1}{\nu_{k+1}} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{k=k_1 \\ p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q}}^{k_2} 2^{-k} \frac{\nu_{k+1} - \nu_k}{\nu_{k+1}} \leq \sum_{\substack{k=k_1 \\ p \leq \nu_k \leq \nu_{k+1} \leq q}}^{k_2} 2^{-k} < \varepsilon \end{aligned}$$

Anche qui la monotonia di $\{a_k\}$ è essenziale.

137.8.2 Per $a < 1$ la serie converge. Infatti da un certo n in poi si ha $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{(\ln n)^a}}} \leq \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ossia $e^{2 \ln(\ln n)} \leq e^{(\ln n)^{1-a}}$. Per $a = 1$ si ha $a_n = \frac{e}{n}$ da cui la divergenza. Per $a > 1$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 1$.

138.8.2 Applichiamo il criterio di Abel. Con un minimo di trigonometria si ottiene $\sum_{k=0}^n \sin(k\vartheta) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2i} (e^{ik\vartheta} - e^{-ik\vartheta}) = \frac{1}{2i} \frac{1 - e^{i(n+1)\vartheta}}{1 - e^{i\vartheta}} - \frac{1}{2i} \frac{1 - e^{-i(n+1)\vartheta}}{1 - e^{-i\vartheta}} = \frac{e^{i\frac{\vartheta}{2}(n-1)}}{2i} \frac{\sin \frac{n\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} - \frac{e^{-i\frac{\vartheta}{2}(n+1)}}{2i} \frac{\sin \frac{n\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} = \frac{\sin \frac{n\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \frac{(n+1)\vartheta}{2}$ e quindi $|\sum_{k=0}^n \sin(k\vartheta)| \leq |(\sin \frac{\vartheta}{2})^{-1}|$ e quindi la convergenza. Peraltro si ha lo stesso risultato se al posto di $\frac{1}{k}$ si avesse una successione che tende a zero più lentamente.

139.8.2 Basta osservare che $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin(k\vartheta)}{k} \right| \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(k\vartheta)}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2(k\vartheta)}{k}$ e la seconda serie converge grazie al precedente esercizio (vedi rich.9).

140.8.2 Come prima cosa dimostriamo che $a_k(x) \searrow 0$ per ogni $0 \leq x < \pi$. Basta osservare che $0 < \sin x < x$ non appena $0 < x < \pi$. Dunque $a_k(x)$ è una successione strettamente decrescente limitata inferiormente da zero e quindi convergente ad un numero ξ . Bisogna mostrare che $\xi = 0$. Per questo osserviamo che $\xi = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin a_{k-1}(x) = \sin(\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k-1}(x)) = \sin \xi$ e questo è possibile solo se $\xi = 0$.

$S_2(x)$ converge essendo una serie di Leibnitz.

$S_1(x)$. Dimostriamo per induzione che per $n \geq 1$ si ha $a_n(x) \geq \frac{r}{n}$, $0 < r < 1$ e r dipendente da x . Sia infatti $\sin(x) = r$. Al secondo passo si ha $\sin(\sin(x)) = \sin r \geq r - \frac{1}{6}r^3 \geq \frac{r}{2}$ per ogni $0 < r < 1$. Al passo $n+1$ -esimo abbiamo $a_{n+1}(x) = \sin a_n(x) \geq \sin \frac{r}{n} \geq \frac{r}{n} - \frac{1}{6} \frac{r^3}{n^3} \geq \frac{r}{n+1}$ anche qui per ogni $0 < r < 1$.

Per ogni $C \geq 31$ (dipendente da x) si ha $\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n} \leq a_n(x) \leq \sqrt{\frac{3}{n}}$ per ogni $n \geq 1$. Dal criterio del confronto segue che $S_1(x)$ diverge. La dimostrazione procede per induzione. Supponiamo che per $1 \leq k \leq n$ si ha $\sqrt{\frac{3}{k}} - \frac{C}{k} \leq a_k(x) \leq \sqrt{\frac{3}{k}}$ (se $\sqrt{\frac{3}{k}} - \frac{C}{k} < 0$ per qualche k si sostituisce 0.)

$a_{n+1}(x) = \sin a_n(x) \geq \sin(\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n}) \geq \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n} - \frac{1}{6}(\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n})^3$ e vogliamo che tale quantità sia maggiore o uguale a $\sqrt{\frac{3}{n+1}} - \frac{C}{n+1}$ ossia $\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3}{n+1} - \frac{C}{n} - \frac{1}{6}(\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n})^3 \geq \frac{C}{n+1}$. $\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3}{n+1} \geq \frac{\sqrt{3}}{2n^{3/2}}$ per cui la disuguaglianza da dimostrare segue da $\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{6} \frac{3\sqrt{3}}{n^{3/2}} + \frac{9C}{6n^2} + \frac{C^3}{6n^3} - \frac{3\sqrt{3}C^2}{n^{5/2}} \geq \frac{C}{n^2} \geq \frac{C}{n} - \frac{C}{n+1}$ e quindi $\frac{C}{n^2}(\frac{1}{2} + \frac{C^2}{6n} - \frac{3\sqrt{3}C}{n^{1/2}}) > 0$. Per $n = 1$ e $C \geq 31$ la disuguaglianza è vera.

$$a_{n+1}(x) = \sin a_n(x) \leq \sin \sqrt{\frac{3}{n}} \leq \sqrt{\frac{3}{n}}$$

141.8.2 Si può prendere $a_k = \frac{\sqrt{k}}{(-)^k}$ $k \neq 0$. La serie $\sum \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}$ è una serie di Leibnitz e quindi converge. La serie $\sum \frac{(-)^k}{\sqrt{k} - (-)^k}$ non è una serie di Leibnitz. La somma $\frac{1}{a_k - 1} + \frac{1}{a_{k+1} - 1}$ è pari a $\frac{(-)^k}{\sqrt{k} - (-)^k} + \frac{(-)^{k+1}}{\sqrt{k+1} - (-)^{k+1}} = (-)^k \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k} + (-)^k + (-)^{k+2}}{(\sqrt{k} + (-)^{k+1})(\sqrt{k+1} + (-)^k)} = \frac{2 + (-)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k} + (-)^{k+1})(\sqrt{k+1} + (-)^k)} \geq \frac{2}{c(k+1)}$ per una opportuna costante c se k è sufficientemente grande. Da tale relazione segue la non convergenza (basta scrivere $\sum_{j=k}^n \frac{1}{a_j - 1}$).

Può essere utile capire come nasce l'idea di prendere la successione $a_k = \frac{\sqrt{k}}{(-)^k}$. Se una delle due serie deve convergere, diciamo $\sum \frac{1}{a_k}$, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_k} = 0$ ossia $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k| = +\infty$. Supponiamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = +\infty$. Ne seguirebbe $\frac{1}{a_k - 1} = \frac{1}{a_k} \frac{a_k}{a_k - 1}$ e quindi $0 < \frac{1}{a_k - 1} \leq \frac{2}{a_k}$ da un certo k in poi e quindi la convergenza grazie al criterio del confronto. Se viceversa a_k non ha segno definito, la precedente maggiorazione non vale. Come serie non avente segno definito si sarebbe

potuta prendere $a_k = \frac{k}{(-)^k}$ ma rifacendo i precedenti calcoli si otterrebbe $|\frac{1}{a_k - 1} + \frac{1}{a_{k+1} - 1}| = |(-)^k \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}| \leq \frac{1}{2k^{3/2}}$ e quindi convergenza.

142.8.2 Supponiamo $a_k \geq 0$. Poiché $a_k \rightarrow 0$ segue che $\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon, n_\varepsilon : \forall q > k_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=q}^{q+n_\varepsilon} a_k < \varepsilon$. Supponiamo per ora che sono finiti sia l che L . Supponiamo ora che $\overline{\{S_n\}} \neq [l, L]$.

Ciò implica che esiste un intervallo aperto $(a, b) \subset [l, L]$ tale che $(a, b) \cap \{S_n\} = \emptyset$. Sia n_1 tale che

$$n_1 > k_\varepsilon \text{ e } S_{n_1} \in (-\infty, l). \text{ La successione } T_N = \sum_{k=1}^{n_1} a_k + \sum_{k=n_1}^{n_1+Nn_\varepsilon} a_k = \sum_{k=1}^{n_1} a_k + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=n_1+jn_\varepsilon}^{n_1+(j+1)n_\varepsilon} a_k,$$

$N \in \mathbf{N}$, procede a "salti" di lunghezza al massimo ε e quindi se $\varepsilon < b - a$ la successione entra prima o poi nell'intervallo (a, b) . Se $l = -\infty$ oppure $L = +\infty$ il discorso è lo stesso.

Se a_k non ha segno definito, certamente esiste $a_{k_0} = \min_k a_k$ e definiamo la successione $b_k = a_k - a_{k_0} \geq 0$ e ripetiamo il discorso di prima.

Il testo dell'esercizio del libro [MGLP] prevede che $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$. In tal caso definiamo $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - a_1$, $b_3 = a_3 - a_2$, $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$. $S_1 = a_1$, $S_2 = b_1 + b_2 = a_2$, $S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = a_3$, e via dicendo $S_n = b_n$ e riappliciamo il risultato di prima.

143.8.2 Se la successione S_n diverge non ha punti limite. Se converge ne ha uno solo e quindi l'unico caso da studiare è quello in cui la successione è indeterminata. In tal caso, se ξ è un punto limite della successione si ha $l \leq \xi \leq L$ dove l e L sono stati definiti in [\[rich.18\]](#). Sia quindi ξ_n una successione di punti limite che converge a ξ . Poiché $a_n \rightarrow 0$, segue che anche ξ è un punto limite.

144.8.2 Dimostriamo che $\exists \varepsilon > 0 : \forall k \exists n_\varepsilon > k : \sum_{j=k}^{n_\varepsilon} \frac{a_j}{M_j} \geq \varepsilon$. Dalla non decrescenza di B_k

$$\text{segue che } M_k \text{ è non decrescente e quindi } \sum_{j=k}^{n_\varepsilon} \frac{a_j}{M_j} \geq \frac{1}{M_{n_\varepsilon}} \sum_{j=k}^{n_\varepsilon} a_j = \frac{A_{n_\varepsilon} - A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} = \frac{A_{n_\varepsilon}}{M_{n_\varepsilon}} - \frac{A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}}.$$

Se esiste una sottosuccessione j_l tale che $M_{j_l} = A_{j_l}$ il risultato è dimostrato in quanto come n_ε prendiamo gli elementi della sottosuccessione e quindi $\frac{A_{n_\varepsilon}}{M_{n_\varepsilon}} - \frac{A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} = 1 - \frac{A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} \geq 1 - \frac{A_{k-1}}{A_{n_\varepsilon}} \geq \frac{1}{2}$

Se non esiste nessuna sottosuccessione j_l tale che $M_{j_l} = A_{j_l}$ allora vuol dire che definitivamente

$$\sum_{k=n}^{n'} \frac{a_k}{M_k} = \sum_{k=n}^{n'} \frac{a_k}{B_k} \xrightarrow{n' \rightarrow +\infty} +\infty$$

145.8.2 Chiaramente $a_k < A_k$ per cui $a_k/(A_k g_k) \rightarrow 0$ e quindi esiste una sottosuccessione $\{A\} \subset \mathbf{N}$ tale che $\sum_{k \in A} \frac{a_k}{A_k g_k} < +\infty$. Supponiamo $g_k \geq 1$, altrimenti dovremmo introdurre una costante. Se non volessimo f_n necessariamente monotona, potremmo prendere la successione

$$f_k = \begin{cases} a_k & k \in A, \\ A_k^2 g_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sum \frac{a_k}{f_k} = \sum_{k \in A, k \leq n} \frac{a_k}{a_k} + \sum_{k \notin A, k \leq n} \frac{a_k}{A_k^2 g_k} \geq \sum_{k \in A, k \leq n} \frac{a_k}{a_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

D'altra parte

$$\sum \frac{a_k}{\max\{A_k g_k, f_k\}} = \sum_{k \in A} \frac{a_k}{A_k g_k} + \sum_{k \notin A} \frac{a_k}{A_k^2 g_k} \leq \sum_{k \in A} \frac{a_k}{A_k g_k} + \sum_{k \notin A} \frac{a_k}{A_k^2} < +\infty$$

146.8.2 Scrivendo lo sviluppo decimale di ogni intero, fra $(10)^k$ e $(10)^{k+1}$, la serie in questione si maggiora con

$$\sum_{k_0=1}^8 \frac{1}{k_0} + \sum_{k_0=0}^8 \frac{1}{k_0} \sum_{k_1=1}^8 \frac{1}{(10) \cdot k_1} + \sum_{k_0=0}^8 \frac{1}{k_0} \sum_{k_1=0}^8 \frac{1}{(10) \cdot k_1} \sum_{k_2=1}^8 \frac{1}{(10^2) \cdot k_2} \dots \leq 8 + \frac{9 \cdot 8}{10} + \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{10^2} + \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} + \dots = 8 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k,$$

147.8.2 Sia $N_k = \{k: 2^{-k-1} < d_k \leq 2^{-k}\}$ e sia q_k il più grande intero che sta in N_k . Sia $D_k = \sum_{i=1}^k d_i$, $\delta > 0$, e si definisca $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2^{-k} & j = q_k, \quad k \in \mathbf{N} \\ \frac{d_j}{D_j^{1+\delta}} & j \neq q_k \end{cases}$

È chiaro che $\sum c_k < +\infty$ e inoltre $c_{q_k} \geq d_{q_k}$. Se si prendesse $c_{q_k} = k^{-2}$ si avrebbe $\overline{\lim} c_k/d_k = +\infty$

• Una seconda dimostrazione è presa da [K] pag.300. Sia c'_k una successione positiva convergente data. Essendo $d_k \rightarrow 0$, definiamo ricorsivamente una successione di indici $\{n_k\}$ nel seguente modo: sia $\{m_k\}$ una successione di interi strettamente crescente. Sia n_1 tale che $d_{n_1} < q_1 c'_1$, $d_{n_2} < q_2 c'_{m_2}$, $d_{n_3} < q_3 c'_{m_3}$ e così via. Ora definiamo una nuova successione $\{c_k\}$ ottenuta da $\{c'_k\}$ scambiando di posto c'_{n_k} con c'_{m_k} e per tutti gli altri indici si ha $c_k = c'_k$. Essendo le serie assolutamente convergenti, $\sum c'_k = \sum c_k$ e inoltre $\frac{c_{n_k}}{d_{n_k}} \geq \frac{1}{q_k}$ e se $q_k \rightarrow 0$ otteniamo $\overline{\lim} c_{n_k}/d_{n_k} = +\infty$

• È possibile trovare c_k monotona con d_k monotona?

• È possibile trovare c_k monotona con d_k non monotona? Chiaramente sì se si riesce a risolvere il precedente.

Se d_k è monotona in generale non è possibile. Infatti se $c_k \searrow 0$ e $\sum c_k < +\infty$ allora $nc_n \rightarrow 0$ e quindi, dovendo essere $c_k \geq d_k$ per infiniti k , si avrebbe $kn d_{kn} \rightarrow 0$ e ciò non è in generale vero. A questo punto ci si pone la domanda:

Se è data $nd_n \rightarrow 0$ e $\sum d_k = +\infty$, è possibile trovare una successione monotona convergente $c_k \searrow 0$ e $\sum c_k < +\infty$, tale che $c_n \geq d_n$ per infiniti n ?

• Un esempio con c_k chiaramente monotona è

$$d_k = \frac{1}{k \log_2 k} \quad \forall k, \quad c_k = \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}}, \quad 2^{n^2} < k \leq 2^{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbf{N}$$

al variare di n . Come è evidente $d_{2^{(n+1)^2}} = c_{2^{(n+1)^2}}$ e $c_k \leq d_k$ altrimenti. D'altro canto

$$\sum_k c_k = \sum_n \sum_{k=2^{n^2}+1}^{2^{(n+1)^2}} \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}} < \sum_n \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

In questo caso $\overline{\lim} c_k/d_k = 1$.

In generale sia $q_n d_{q_n} \rightarrow 0$ e sia $q_n d_{q_n} < 1/n^2$ per cui $d_{q_n} < 1/(n^2 q_n)$. Sia $c_k = d_{q_{n+1}}$ per $q_n + 1 \leq k \leq q_{n+1}$. Chiaramente $c_k \leq d_k$ ed inoltre

$$\sum_k c_k = \sum_n \sum_{k=q_n+1}^{q_{n+1}} c_k = \sum_n \sum_{k=q_n+1}^{q_{n+1}} d_{q_{n+1}} < \sum_n \sum_{k=q_n+1}^{q_{n+1}} \frac{1}{(n+1)^2 q_{n+1}} \leq \sum_n \frac{1}{n^2}$$

• Nel prossimo esempio abbiamo $\overline{\lim} \frac{c_k}{d_k} = +\infty$. Come prima $d_n = \frac{1}{n \log_2 n}$. Sia $q_n = 2^{n^2}$, $q_{n+1} = 2^{(n+1)^2} (1 + [\sqrt{n}])$, $q_{n+2} = 2^{(n+2)^2}$, $q_{n+3} = 2^{(n+3)^2} (1 + [\sqrt{n+2}])$, e via dicendo. Inoltre sia $c_k = \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}}$ per $q_n < k \leq q_{n+1}$. Come prima abbiamo

$$\sum_k c_k = \sum_n \sum_{k=q_n}^{q_{n+1}} \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}} < K \sum_n \frac{q_{n+1} - q_n}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}} < K \sum_n \frac{[\sqrt{n}]}{(n+1)^2} < +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{Inoltre per } k = q_{n+1}(1 + [\sqrt{n}]) \text{ si ha } \frac{c_k}{d_k} &= \frac{\frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}}}{\frac{1}{(2^{(n+1)^2} + q_n) \log_2 (2^{(n+1)^2} + q_n)}} = \\ &= \frac{2^{(n+1)^2} (1 + [\sqrt{n}]) \log_2 (2^{(n+1)^2} (1 + [\sqrt{n}]))}{2^{(n+1)^2} (n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

148.8.2 Dimostriamo che $\frac{I_k}{k}$ limitata implica $\sum d_{I_k} = +\infty$. Dire $\frac{I_k}{k}$ limitata vuol dire $k \leq I_k \leq Ak$ e quindi $k \leq I_k \leq [A]k$ da cui $d_k \geq d_{I_k} \geq d_{[A]k}$. Dimostriamo ora che $\sum d_{[A]k}$ diverge. Costruiamo la somma

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{k'} d_{[A]j} &= d_{[A]k} + d_{[A](k+1)} + d_{[A](k+2)} + \dots + d_{[A]k'} \geq \\ &\geq \frac{d_{[A]k} + d_{[A]k+1} + d_{[A]k+2} + \dots + d_{[A](k+1)-1}}{[A]} + \\ &+ \frac{d_{[A](k+1)} + d_{[A](k+1)+1} + d_{[A](k+1)+2} + \dots + d_{[A](k+2)-1}}{[A]} + \dots + \\ &+ \frac{d_{[A]k'-[A]} + d_{[A]k'-[A]+1} + d_{[A]k'-[A]+2} + \dots + d_{[A]k'}}{[A]} = \frac{1}{[A]} \sum_{j=k[A]}^{k'[A]} d_j \geq \varepsilon \end{aligned}$$

prendendo k' sufficientemente grande, essendo $\sum d_k$ divergente.

• Viceversa supponiamo I_k/k illimitata. Vuol dire che esiste una sottosuccessione $\{n_k\}$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{I_{n_k}}{n_k} = +\infty$ e scegliamo gli n_k in modo che i) $n_k \geq k^2$, ii) $I_{n_{k+1}} \geq I_{n_k} + n_{k+1} - n_k$.

Definiamo la successione $d_j = \frac{1}{k^2}$ per $I_{n_k} \leq j < I_{n_{k+1}}$. La successione è certamente non crescente e inoltre

$$\sum_j d_j = \sum_k \sum_{I_{n_k} < j \leq I_{n_{k+1}}} d_j \geq \sum_k \sum_{n_k < j \leq n_{k+1}} d_j \geq \sum_k \frac{n_{k+1} - n_k}{k^2} \geq \sum_k \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} = +\infty$$

in quanto

$$\sum_{k=p}^q \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} \geq \frac{1}{n_q} (n_{q+1} - n_p) \geq 1/2$$

D'altro canto $\sum_k d_{I_{n_k}} = \sum_k \frac{1}{k^2} < +\infty$

149.8.2 Si prenda $a_k = \frac{c_k}{\ln k}$ dove $c_k = 1$ se $k = 3p$, oppure $k = 3p + 1$, mentre $c_k = -2$ se $k = 3p + 2$. Facciamo vedere che la serie $\sum a_k$ converge. L'osservazione da fare è che

$\frac{1}{\ln k} + \frac{1}{\ln(k+1)} - \frac{2}{\ln(k+2)} = \frac{3}{k \ln^2 k} + O(\frac{1}{k^2})$. Per dimostrare che la serie converge usiamo

la proprietà di Cauchy ossia $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : k, k' > n_\varepsilon \Rightarrow |\sum_{j=k}^{k'} a_k| < \varepsilon$. Supponiamo che k

è della forma $k = 3p$ dimodoché $\sum_{j=k}^{k'} a_k$ può essere una delle tre possibilità a seconda che k'

sia pari a $3p' - 1$, $3p'$ oppure $3p' + 1$; 1) $\sum_{j=k}^{k'} a_k = \sum_{j=p}^{p'-1} (\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} - \frac{2}{\ln(3j+2)})$ 2)

$\sum_{j=k}^{k'} a_k = \sum_{j=p}^{p'-1} (\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} - \frac{2}{\ln(3j+2)}) + \frac{1}{\ln(3p')}$ 3) $\sum_{j=k}^{k'} a_k = \sum_{j=p}^{p'-1} (\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} -$

$\frac{2}{\ln(3j+2)}) + \frac{1}{\ln(3p')} + \frac{1}{\ln(3p'+1)}$. Nel primo caso abbiamo $|\sum_{j=k}^{k'} a_k| = \sum_{j=p}^{p'-1} (\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} -$

$\frac{2}{\ln(3j+2)}) \leq \sum_{j=p}^{p'-1} (\frac{3}{j \ln^2 j} + O(\frac{1}{j^2}))$ e vogliamo che tale quantità sia minore di ε per ogni p

grande abbastanza. Innanzitutto prendiamo $p > p_1$ in modo tale che $O(j^{-2}) < \frac{1}{j \ln^2 j}$. Poi

stimiamo $\sum_{j=p}^{p'-1} \frac{3}{j \ln^2 j} < \int_p^{p'-1} dx \frac{3}{x \ln^2 x} = \frac{3}{\ln p} - \frac{3}{\ln(p'-1)} < \frac{4}{\ln p} < \varepsilon$ e quindi $p > e^{\frac{3}{\varepsilon}}$ da cui

$p \geq \max\{p_1, e^{\frac{3}{\varepsilon}}\} \stackrel{\text{def}}{=} p_\varepsilon$ e quindi $n_\varepsilon = 3p_\varepsilon$. Il secondo e terzo caso si trattano allo stesso modo tenendo conto delle piccole ovvie modifiche dovute alla presenza rispettivamente di uno e due addendi.

• Dimostriamo ora che $\sum sgn(a_k)|a_k|^a$ diverge per ogni $a \neq 1$ positivo. L'osservazione chiave è $\frac{1}{\ln^a k} + \frac{1}{\ln^a(k+1)} - (\frac{2}{\ln(k+2)})^a = \frac{1}{\ln^a k} (2 - 2^a) + \frac{1}{k} \frac{a}{\ln^{1+a} k} (2^{1+a} - 1) + O(k^{-3/2})$ da cui la divergenza non appena $a \neq 1$.

• Nella referenza citata si prende il seguente esempio $\frac{1}{\ln^a 2} - \frac{1}{2 \ln^a 2} - \frac{1}{2 \ln^a 2} + \frac{1}{\ln^a 3} - \frac{1}{2 \ln^a 3} - \frac{1}{2 \ln^a 3} + \frac{1}{\ln^a 4} - \frac{1}{2 \ln^a 4} - \frac{1}{2 \ln^a 4} + \dots + \frac{1}{\ln^a n} - \frac{1}{2 \ln^a n} - \frac{1}{2 \ln^a n} + \dots$. Anche qui raggruppiamo in gruppi di tre e ciascun gruppo è pari a $\frac{1 - 2^{1-a}}{(\ln n)^a}$ per cui si ha divergenza ogni volta che $a \neq 1$.

150.8.2 Qualunque sia $x > 0$ esiste un valore intero $k(x)$ tale che $\ln_k(x) > 1$ per $k < k(x)$ e $\ln_k(x) \leq 1$ per $k \geq k(x)$. Ad esempio per $1 \leq x \leq e$ si ha $k(x) = 1$ e quindi $P(x) = \frac{1}{x}$. Se

$e < x \leq e^e \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$, $e^e < x \leq e^{e^e} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$. Essendo $\{P(n)\}$

una successione monotona, essa converge o diverge con l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{P(x)}$. Che l'integrale

diverge lo si vede osservando che: $\int_1^e \frac{dx}{P(x)} = \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$, $\int_e^{e^e} \frac{dx}{P(x)} = \int_e^{e^e} \frac{dx}{x \ln(x)} = 1$,

$\int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{dx}{P(x)} = \int_{e^e}^{e^{e^e}} \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} = 1$. La divergenza della serie è chiara.

151.8.2 $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x}{2(2k+1)}$ il cui limite è zero per ogni x e quindi la serie

converge.

• $\sum_n \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{n!} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{m+n}{n+1} = 1 + \frac{m-1}{n+1} + O(\frac{1}{n^2})$ e quindi la serie converge se e solo se $m < 0$. Notare che il criterio della radice non consente di decidere la convergenza o divergenza.

• $\sum n^{-a-\frac{b}{n}}$. Se $a > 1$ la serie converge perché definitivamente si ha $a + \frac{b}{n} \geq a' > 1$. Se $a < 1$ la serie diverge perché definitivamente si avrebbe $a + \frac{b}{n} \leq a' < 1$. Se $a = 1$ e $b \leq 0$ la serie diverge

perché $n^{-1-\frac{b}{n}} \leq n^{-1}$. Se $a = 1$ e $b > 0$ bisogna studiare il rapporto $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$ e quindi diverge grazie al criterio di Gauss. Un'altra procedura consiste nell'usare il criterio di condensazione dopo avere verificato che $n^{1+\frac{1}{n}}$ decresce a zero per $n \rightarrow +\infty$. Ciò segue da $(x^{1+\frac{1}{x}})' = (e^{-(1+\frac{1}{x}) \ln x})' = (e^{-(1+\frac{1}{x}) \ln x})(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}) < 0$ definitivamente. Quindi il criterio di condensazione ci dice che la serie in questione converge se e solo se converge la serie $\sum 2^k \cdot (k^{1+\frac{1}{k}})_{|k=2^k} = \sum 2^{-\frac{k}{2^k}}$ che chiaramente diverge.

• $\sum \frac{n^q}{(n+1)^{p+q}} = \frac{1}{(n+1)^p} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^q} \leq \frac{C_q}{(n+1)^p}$ dove $C_q = \begin{cases} 2 & q < 0 \\ 1 & q \geq 0 \end{cases}$. Quindi la serie converge se $p > 1$. $\frac{n^q}{(n+1)^{p+q}} = \frac{1}{n^p} (1 - \frac{p+q}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{n^p} + O(\frac{1}{n^{p+1}}) \geq \frac{1}{2n^p}$ definitivamente e quindi la serie diverge se $p \leq 1$.

• $\sum (\ln n)^{-n} \leq \sum 2^{-n}$ definitivamente e quindi converge.

• $\sum (\ln n)^{-\ln n} = \sum e^{-\ln n \cdot \ln(\ln n)} = \sum n^{-\ln(\ln n)} \leq \sum n^{-2}$ definitivamente e quindi converge.

• $\sum (\ln(\ln n))^{-\ln n} = \sum n^{-\ln(\ln(\ln n))} \leq \sum n^{-2}$ definitivamente e quindi converge.

• $\sum \frac{n^n}{e^n n!} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} (1 + \frac{1}{n})^n = 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$ e quindi la serie diverge per il criterio di Raabe.

• $\sum \frac{n^n}{e^n (n+1)!} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} (1 + \frac{1}{n})^n (1 - \frac{1}{n+2}) = (1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})) (1 - \frac{1}{n+2}) = 1 - \frac{3}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$ e quindi converge per il criterio di Raabe.

• $\sum \frac{n^{n-1}}{e^n n!} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} ((1 + \frac{1}{n})^n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}) = (1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})) (1 - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = 1 - \frac{3}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$ e quindi converge per il criterio di Raabe.

• $\sum (\ln n)^{-\ln(\ln n)}$. Detto $a_n = (\ln n)^{-\ln(\ln n)}$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 2 \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n})$ e quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{f(n)}{n^s}$ per, ad esempio, $\alpha = 1$, $s = \frac{3}{2}$, $f(n) = \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Per il criterio di Gauss la serie diverge.

Un metodo più rapido consiste nell'osservare $\sum (\ln n)^{-\ln(\ln n)} = \sum e^{-(\ln \ln n)^2} \geq \sum \frac{1}{n}$ in quanto $\ln(\ln n)^2 \leq \ln n$ per n sufficientemente grande.

• Non è detto che la serie $\sum n^{-1-f(n)}$, diverga. Se $f(n)$ tende a zero non troppo velocemente allora la serie può convergere. Se prendiamo $f(n) = n^{-1}$ allora la serie diverge come mostrato prima. Scriviamo ora $n^{-(1-f(n)) \ln n}$ e prendiamo $f(n) = 1 - n(\ln n)^{r-1}$. Ne segue che $n^{-1-f(n)} = \frac{1}{n(\ln n)^r}$. Se $0 \leq r \leq 1$ la serie diverge e converge se $r > 1$.

152.8.2 $\sum 1/\ln n!$. Essendo $n! < n^n$ abbiamo $\sum 1/\ln n! > \sum 1/(n \ln n)$ che diverge e quindi diverge anche la serie del problema.

• $\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \dots 3^{\frac{1}{k}}}$. **Prima dimostrazione.** Abbiamo $3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \dots 3^{\frac{1}{k}} = 3^{\sum_{j=1}^k \frac{1}{j}} = 3^{\ln k + \gamma + o(1)}$ da cui $\sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n 3^{-\ln k + \gamma + o(1)}$. Sia k_0 così grande che $\gamma + o(1) \geq \gamma/2$ per cui $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{k_0} 3^{-\ln k + \gamma + o(1)} \right) \cdot \left(\prod_{k=k_0+1}^n 3^{-\ln k + \gamma/2} \right) = \left(\prod_{k=1}^{k_0+1} 3^{-\ln k + \gamma + o(1)} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=k_0+1}^n 3^{-\ln k + \gamma/2} \right)$ e per la convergenza possiamo tralasciare il primo prodotto. Sia poi k_0 grande abbastanza per cui $-\ln k + \gamma/2 \leq c \ln k$ con $c > 1/\ln 3$ con $k > k_0$. Spezziamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=k_0+1}^n 3^{-\ln k + \gamma/2} \right) = \sum_{n=1}^{n_0} \left(\prod_{k=k_0+1}^n 3^{-\ln k + \gamma/2} \right) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\prod_{k=k_0+1}^n 3^{-\ln k + \gamma/2} \right)$ ed abbiamo $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\prod_{k=k_0+1}^n 3^{-\ln k + \gamma/2} \right) \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 3^{-c \ln n} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{c \ln 3}} < +\infty$

Seconda dimostrazione. Utilizziamo [\[Rich.6\]](#) scrivendo $a_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \dots 3^{\frac{1}{k}}}$ e quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3^{-1/n} = 1 - \frac{\ln 3}{n} + O(1/n^2) = 1 - \frac{\ln 3}{n} E(n) \text{ dove } E(n) = 1 - O(1/n) \text{ da cui il risultato.}$$

Terza dimostrazione Usando Stirling $n! \sim e^{n \ln n - n}$ si ha il risultato.

153.8.2 $\sum \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$. La serie diverge in quanto, asintoticamente è pari a $e^{n \ln(1 - \frac{\ln n}{n})} = e^{n(-\frac{\ln n}{n} + O(\frac{\ln^2 n}{n^2}))} = \frac{1}{n} e^{O(\frac{\ln^2 n}{n})} \geq \frac{1}{2n}$ per n grande abbastanza da cui la divergenza.

• $\sum (-)^n \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\ln n}{(-)^n n^{3/4}}\right)^{(-)^n n^{3/4}}$. La serie diverge lo stesso a causa del contributo del secondo ordine nello sviluppo asintotico della serie. Infatti $\left(1 - \frac{1}{8} \frac{\ln n}{(-)^n n^{3/4}}\right)^{(-)^n n^{3/4}} = e^{\ln \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\ln n}{(-)^n n^{3/4}}\right)^{(-)^n n^{3/4}}} = e^{(-)^n n^{3/4} \ln \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\ln n}{(-)^n n^{3/4}}\right)} = e^{(-)^n n^{3/4} \left(-\frac{1}{8} \frac{\ln n}{(-)^n n^{3/4}} - \frac{1}{2} \frac{1}{64} \frac{\ln^2 n}{n^{3/2}} + O(\frac{\ln^3 n}{n^{9/4}})\right)} = \frac{1}{n^{1/8}} e^{\left(-\frac{(-)^n}{128} \frac{\ln^2 n}{n^{3/4}} + O(\frac{\ln^3 n}{n^{3/2}})\right)} = \frac{1}{n^{1/8}} - \frac{(-)^n}{128} \frac{\ln^2 n}{n^{7/8}} + O(\frac{\ln^3 n}{n^{13/8}})$. Moltiplicando per $(-)^n$ otteniamo $\frac{(-)^n}{n^{1/8}} - \frac{1}{128} \frac{\ln^2 n}{n^{7/8}} + O(\frac{\ln^3 n}{n^{13/8}})$. La serie $\sum (-)^n n^{1/8}$ converge per Leibnitz, la seconda diverge e la terza converge assolutamente da cui il risultato.

154.8.2 Bisogna usare la formula di Stirling della *funzione* Γ : $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} (1 + O(x^{-1}))$ per $x \rightarrow +\infty$. Sappiamo che $\Gamma(n+1) = n!$ e quindi la convergenza.

155.8.2

$$\bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k} = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik}}{k} \right) = -\text{Im} (\text{Ln}(1 - e^i)) = -\text{Im} \left(\ln |1 - e^i| - i \arctan \frac{\sin 1}{1 - \cos 1} \right)$$

ossia

$$\arctan \frac{\sin 1}{1 - \cos 1} = \arctan \frac{\sin 1}{2 \sin^2(1/2)} = \arctan \frac{\cos(1/2)}{\sin(1/2)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sin(1/2)}{\cos(1/2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k}{k} = -\text{Rm} \left((\ln |1 - e^i|) - i \arctan \frac{\sin 1}{1 - \cos 1} \right) = -\ln |1 - e^i| = -\ln 2 - \ln \sin \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin k)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k)}{2k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2ik}}{4k^2} \right) - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2ik}}{4k^2} \right) \\
 & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2ik}}{k^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{2ik} (tu)^k = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \frac{e^{2i} tu}{1 - (tu)e^{2i}} = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{e^{2i}}{1 - xe^{2i}} dx = \\
 & = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{e^{2i} dx}{1 - xe^{2i}} = - \int_0^1 dy \frac{\text{Ln}(1 - ye^{2i})}{y} = - \int_0^{e^{2i}} \frac{\ln(1 - y)}{y} dy = \text{Li}_2(e^{2i}) \\
 & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2ik}}{k^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2ik} (tu)^k = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-2i} tu}{1 - (tu)e^{-2i}} = \\
 & = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{e^{-2i} dx}{1 - xe^{-2i}} = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{e^{-2i} dx}{1 - xe^{-2i}} = - \int_0^1 dy \frac{\text{Ln}(1 - ye^{-2i})}{y} = \\
 & = - \int_0^{e^{-2i}} \frac{\ln(1 - y)}{y} dy = \text{Li}_2(e^{-2i})
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4}(\text{Li}_2(e^{2i}) + \text{Li}_2(e^{-2i}))$$

Sappiamo che $\text{Li}_2(z^{-1}) + \text{Li}_2(z) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{(\text{Ln}(-z))^2}{2}$ e quindi

$$\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8}(\text{Ln}(-e^{2i}))^2 = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8}(i(\pi - 2))^2 = \frac{\pi - 1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\cos k)^2}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2ik}}{4k^2} \right) + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2ik}}{4k^2} \right) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4}(\text{Li}_2(e^{2i}) + \text{Li}_2(e^{-2i})) = \frac{\pi^2 - 3\pi + 3}{6} \\
 & \bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = -\text{Im}(\text{Ln}(1 - e^{ix})) = -\arctan \frac{-\sin x}{1 - \cos x} = \arctan \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}
 \end{aligned}$$

Se $0 < x \leq \pi$ abbiamo

$$\arctan \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \frac{\pi - x}{2}$$

Se $\pi \leq x < 2\pi$ abbiamo

$$\arctan \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{-\pi}{2} - \arctan \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} = \frac{-\pi}{2} - \arctan \tan \frac{x}{2} = \frac{-\pi}{2} - \arctan \tan(\frac{x}{2} - \pi) = \frac{\pi - x}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\text{Rm}(\text{Ln}(1 - e^{ix})) = -\ln \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos x)$$

Se $x = 0$ chiaramente la serie diverge.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin kx)^2}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8}(\text{Ln}(-e^{2ix}))^2 = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8}(i(\pi - 2x))^2 = \frac{\pi x - x^2}{2} \\
 & \bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\cos kx)^2}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{8}(i(\pi - 2x))^2 = \frac{\pi^2 - 3\pi x + 3x^2}{6}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} \right) = -\text{Im} (\text{Ln}(1 - e^{ix})) = -\text{Im} \left(\ln |1 - e^{ix}| - i \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right)$$

ossia

$$\arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \arctan \frac{\sin x}{2 \sin^2(x/2)} = \arctan \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

Chiaramente se $x = 0$ il risultato è zero.

$$\bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin kp)^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kp)}{2k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2ikp}}{4k^2} \right) - \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2ikp}}{4k^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2ikp}}{k^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{2ikp} (tu)^k = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \frac{e^{2iptu}}{1 - (tu)e^{2ip}} = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y dx \frac{e^{2ip}}{1 - xe^{2ip}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{e^{2ip} dx}{1 - xe^{2ip}} = - \int_0^1 dy \frac{\text{Ln}(1 - ye^{2ip})}{y} = - \int_0^{e^{2ip}} \frac{\ln(1 - y)}{y} = \text{Li}_2(e^{2ip}) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2ikp}}{k^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2ikp} (tu)^k = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-2iptu}}{1 - (tu)e^{-2ip}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{e^{-2ip} dx}{1 - xe^{-2ip}} = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y \frac{e^{-2ip} dx}{1 - xe^{-2ip}} = - \int_0^1 dy \frac{\text{Ln}(1 - ye^{-2ip})}{y} = \\ &= - \int_0^{e^{-2ip}} \frac{\ln(1 - y)}{y} = \text{Li}_2(e^{-2ip}) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4}(\text{Li}_2(e^{2ip}) + \text{Li}_2(e^{-2ip}))$$

Sappiamo che $\text{Li}_2(z^{-1}) + \text{Li}_2(z) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{(\text{Ln}(-z))^2}{2}$ e quindi

$$\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8}(\text{Ln}(-e^{2ip}))^2 = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8}(i(\pi - 2p))^2 = p \frac{\pi - p}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k} &= -\text{Rm} \left((\ln |1 - e^{ix}|) - i \arctan \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right) = -\ln |1 - e^{ix}| = -\ln 2 - \ln \sin \frac{x}{2} \\ \bullet \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\cos kx)^2}{k^2} &= \frac{\pi^2}{12} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2ikx}}{4k^2} \right) + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2ikx}}{4k^2} \right) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4}(\text{Li}_2(e^{2ix}) + \text{Li}_2(e^{-2ix})) = \frac{\pi^2 - 3x\pi + 3x^2}{6} \end{aligned}$$

156.8.2

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^{2n+1})^{2k+1}}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^{2k+1})^{2n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^{2k+1})^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \frac{1}{1 + x^{2(2k+1)}} \end{aligned}$$

Per ogni x la serie è di Leibnitz ed inoltre; detta $S(x)$ la somma della serie e S_N la ridotta N -esima

$$|S(x) - S_N(x)| \leq \frac{|x|^{2N+1}}{2N+1} \frac{1}{1+x^{2(2N+1)}} \leq \frac{1}{2N+1}$$

ossia è uniformemente convergente e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \arctan x^{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \frac{1}{1+x^{2(2k+1)}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{8}$$

157.8.2 1) Il criterio di Hadamard ci dà $\lim_{k \rightarrow +\infty} [|x|^k / c_k^k]^{-1/k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k / |x| = +\infty$ da cui la convergenza per ogni x .

2) Per $k > k_x$ possiamo supporre definitivamente 1) $|x - c_k| > 1$, 2) $|x - c_k| > r$, $r > 0$, per $k = 1, \dots, k_x$, 3) $c_k \geq 2x$ da cui $\sum_{k=k_x+1}^{+\infty} \frac{1}{|x - c_k|} \frac{|x|^{k-1}}{c_k^{k-1}} \leq \sum_{k=k_x+1}^{+\infty} 2^{-k+1}$ e si ha convergenza ovunque tranne chiaramente nei punti $\{c_k\}$.

158.8.2 Sia n_0 tale che $|x| < |c_{n_0}|/2$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - c_n} + \frac{1}{c_n} + \frac{x}{c_n^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{c_n^n} \right) \right| &= \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{c_n^k} \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{|x|^{k-1}}{|c_n|^k} \leq \\ &\leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \sum_{n=n_0}^{k-1} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} < +\infty \end{aligned}$$

159.8.2 Sia n_0 tale che se $n > n_0$ si ha $n^{\frac{1}{a}} > |x|$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - c_n} + \frac{1}{c_n} + \frac{x}{c_n^2} + \dots + \frac{x^{r-1}}{c_n^r} \right) \right| &\leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{a}}} \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{|x|^k}{n^{\frac{k}{a}}} \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{a}}} C \left(\frac{|x|}{n^{\frac{1}{a}}} \right)^r \leq \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{|x|^r}{n^{\frac{r+1}{a}}} < +\infty \quad \text{per } r \geq [a] \end{aligned}$$

160.8.2 Facciamo vedere che $\cos k^2 \not\rightarrow 0$.

Ci serve $\sin(k + \frac{1}{2}) \not\rightarrow 0$. Supponiamo il contrario e quindi $\sin(k + \frac{1}{2}) \rightarrow 0$ e $\sin(k + 1 + \frac{1}{2}) \not\rightarrow 0$ da cui $\sin(k + \frac{1}{2}) \cos 1 + \cos(k + \frac{1}{2}) \sin 1 \rightarrow 0$ il che è impossibile posto che $\cos(k + \frac{1}{2}) \rightarrow 1$ se $\sin(k + \frac{1}{2}) \rightarrow 0$. Analogamente $\cos(k + \frac{1}{2}) \not\rightarrow 0$ e $\sin(2k + 1) \not\rightarrow 0$.

Assumiamo ora che $\cos k^2 \rightarrow 0$

$$\cos k^2 - \cos(k+1)^2 = 2 \sin(k^2 + k + \frac{1}{2}) \sin \frac{2k+1}{2} = \left(\sin k^2 \cos(k + \frac{1}{2}) + \cos k^2 \sin(k + \frac{1}{2}) \right) \sin(k + \frac{1}{2})$$

da cui $\sin k^2 \cos(k + \frac{1}{2}) \sin(k + \frac{1}{2}) = \sin k^2 2 \sin(2k + 1) \rightarrow 0$. Ma $\cos k^2 \rightarrow 0$ implica $\sin k^2 \rightarrow 1$ quindi deve essere $\sin(2k + 1) \rightarrow 0$ ma ciò è falso.

161.8.2 La serie converge se e solo se converge la serie $\sum |\cos(2^{n-1})|/n$. Infatti

$$\sum \frac{|\cos 2^n|}{n+1} = \sum \frac{|\cos 2^n|}{n} \frac{n}{n+1} = \sum \frac{|\cos 2^n|}{n} - \sum \frac{|\cos 2^n|}{n(n+1)}$$

Quindi la serie converge se e solo se converge $\sum \frac{|\cos 2^n|}{n} + \sum \frac{|\cos 2^{n-1}|}{n} = \sum \frac{|\cos 2^n| + |\cos 2^{n-1}|}{n}$. Dimostriamo che esiste $c > 0$ tale che asintoticamente $|\cos 2^n| + |\cos 2^{n-1}| \geq c$. Se non è vero allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\cos 2^n| + |\cos 2^{n-1}| = 0$. Ciò vuol dire che $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\cos 2^n| = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\cos 2^{n-1}| = 0$ e quindi $2^{n-1} = p_n \pi/2 + \varepsilon_n$, e p_n dispari e quindi $2^n = p_n \pi + 2\varepsilon_n$. La contraddizione è evidente.

162.8.2 $\sum |\sin k|^\alpha$ diverge per ogni valore di α . Infatti la lunghezza dell'intervallo $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ è superiore a 2 e quindi ogni sette interi ve ne è almeno uno che cade dentro l'intervallo $[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi]$ $n = 0, 1, \dots$. Per quel valore intero si ha $\sin k > \frac{1}{2}$. Poiché tali interi sono infiniti, la serie diverge per qualsiasi valore di α .

163.8.2 La serie $\sum (\sin k)^k$ diverge e lo dimostriamo facendo vedere che “frequentemente” $(\sin k)^k$ è vicino a 1 oppure -1 . In linguaggio matematico facciamo vedere che $\overline{\lim} |\sin k|^k = 1$. Essendo $\frac{\pi}{2}$ irrazionale, esistono infinite frazioni per cui $|\frac{\pi}{2} - \frac{p}{q}| < q^{-2}$ e quindi $\pi \frac{q}{2} - \frac{1}{q} < p < \frac{1}{q} + \pi \frac{q}{2}$ e possiamo prendere solo quelle per cui q è dispari. Ma allora segue che $|\sin p| > |\sin(\pi \frac{q}{2} + \frac{1}{q})| = \cos \frac{1}{q} > 1 - \frac{1}{2q^2}$. $|\sin p|^p > (1 - \frac{1}{2q^2})^p > (1 - \frac{1}{2q^2})^{2q} > 1 - \frac{1}{q} > 1 - \frac{2}{p}$. Poiché ciò avviene per infiniti p/q la serie diverge. L'ultima e terzultima minorazione sono dovute al fatto che $p/q < 2$ dovendo essere la differenza fra p/q e $\pi/2$ minore di q^{-2} . La penultima minorazione invece è la disuguaglianza di Bernoulli.

164.8.2 Si procede come sopra arrivando a $2\pi q - \frac{1}{q} < p < 2\pi q + \frac{1}{q}$ e quindi $|\cos k| = |\cos(2\pi q + \frac{1}{q})| = |\cos \frac{1}{q}|$ da cui il risultato.

165.8.2 La convergenza puntuale per $x \in \mathbf{R}$ è ovvia. La convergenza assoluta si ha per $x \in \mathbf{R}$. Per la convergenza uniforme si può fare ricorso al criterio di Abel e scrivere la serie

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n} B_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{e^{-(k+1)x^2}}{k+1} - \frac{e^{-kx^2}}{k} \right) B_k \text{ dove } B_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k (-)^i \text{ e ovviamente } |B_k| \leq 1.$$

$$\text{Si ha } \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^m u_k(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n} B_n - \frac{e^{-mx^2}}{m} B_m - \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{e^{-(k+1)x^2}}{k+1} - \frac{e^{-kx^2}}{k} \right) B_k. \text{ Maggiorando}$$

$$\text{si ha } \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^m u_k(x) \right| \leq \frac{2}{n} + \left| \left(\frac{e^{-(n+2)x^2}}{n+2} - \frac{e^{-mx^2}}{m} \right) \right| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} \leq \frac{3}{n} \text{ da cui la uniforme}$$

convergenza per $x \in \mathbf{R}$. La convergenza totale manca in quanto $\sup_{\mathbf{R}} \left| \frac{(-)^k}{k} e^{-kx^2} \right| = \frac{1}{k}$

La dimostrazione della uniforme convergenza può realizzarsi anche facendo uso delle proprietà delle serie di Leibnitz. Detta $a_k = \frac{e^{-kx^2}}{k}$ e detta $S(x)$ la somma della serie si ha $|S(x) - S_{2n}(x)| \leq$

$$a_{2n+1} = \frac{e^{-(2n+1)x^2}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \text{ e } |S(x) - S_{2n+1}(x)| \leq a_{2n}(x) = \frac{e^{-2nx^2}}{2n} \leq \frac{1}{2n} \text{ da cui se ne conclude che la convergenza è uniforme.}$$

• Suddividiamo l'intervallo $[-1, 0]$ in infiniti sottointervalli $[a_k, b_k]$ di lunghezza 2^{-k} , $k \geq 1$.
 $a_1 = -1$, $b_1 = -1 + \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{4}$ e via dicendo. Sia $0 < \alpha < 1$ e definiamo una successione di funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} k^{-\alpha}, & x = (a_k + b_k)/2 \\ 2(x - a_k)/k^\alpha 2^k, & a_k \leq x \leq (a_k + b_k)/2, \\ -2(x - b_k)/k^\alpha 2^k, & (a_k + b_k)/2 \leq x \leq b_k \\ 0 & x \in [-1, 1] \setminus [a_k, b_k] \end{cases}$$

Dato N , se $x \leq a_N$ allora $\sum_{k=N}^{+\infty} f_k(x) = 0$. Se $x > a_N$ allora $\sum_{k=N}^{+\infty} f_k(x) \leq \frac{1}{N^\alpha}$ e

quindi $\sup_{x \in I} \sum_{k=N}^{+\infty} f_k(x) \leq \frac{1}{N^\alpha}$ da cui la convergenza uniformemente della serie. D'altra parte

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \sup_{x \in I} f_k(x) = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ e quindi la serie diverge.}$$

• b).

Prendiamo la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|}$. Data la parità della funzione basta far vedere che converge uniformemente in $[0, +\infty)$.

Svolgimento Dato un qualsiasi valore di x , per il criterio del rapporto studiamo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} e^{-||x|-k-1|+||x|-k|}$$

Per k grande abbastanza si ha $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} e^{-1}$ da cui la convergenza. Ora usiamo Teorema di Abel

rich.11 ed abbiamo

$$\sum_{k=p}^q \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|} = B_q a_q - B_{p-1} a_{q-1} + \sum_{k=p}^q B_{k-1} (a_{k-1} - a_k)$$

dove

$$B_q = \sum_{k=1}^q e^{-|x-k|} = \sum_{k=1}^{[x]} e^{-([x]-k)} + \sum_{[x]+1}^q e^{-(k-[x])}, \quad a_k = 1/\sqrt{k}$$

$$\sum_{k=1}^{[x]} e^{-([x]-k)} = e^{-[x]} e^{\frac{1-e^{[x]}}{1-e}}, \quad \sum_{[x]+1}^q e^{-(k-[x])} = e^{[x]} e^{-[x]-1} \frac{1-e^{-(q-[x])}}{1-e^{-1}}$$

e quindi

$$e^{-[x]} e^{\frac{1-e^{[x]}}{1-e}} \leq \frac{2e^{1-[x]}}{e-1} \leq \frac{2e}{e-1}, \quad e^{[x]} e^{-[x]-1} \frac{1-e^{-(q-[x])}}{1-e^{-1}} \leq \frac{1}{e-1}$$

Inoltre

$$\sum_{k=p}^q B_{k-1} (a_{k-1} - a_k) \leq \frac{2e+1}{e-1} \sum_{k=p}^q (a_{k-1} - a_k) \leq \frac{2e+1}{e-1} (a_{p-1} - a_q)$$

Dunque alla fine abbiamo

$$\sum_{k=p}^q \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|} \leq \frac{2e+1}{e-1} (a_q + a_{p-1} + a_{p-1} - a_q) = \frac{2e+1}{e-1} 2a_{p-1} = \frac{2e+1}{e-1} 2 \frac{1}{\sqrt{p-1}}$$

e prendendo p grande abbastanza, tale quantità è minore di ε .

Notare che se avessimo operato

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \sum_{k=p}^q \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|} \leq \sum_{k=p}^q \sup_{x \in [0, +\infty)} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|} = \sum_{k=p}^q \frac{1}{\sqrt{k}}$$

e non è una quantità piccola non appena q è grande abbastanza dopo avere fissato p .

• c). Essendo $\sum \frac{x^k}{(1+x^k)^k} \leq \sum x^k$, possiamo dire che la serie converge uniformemente in ogni insieme del tipo $[0, \delta]$ con $\delta < 1$. Inoltre essendo $1+x^k \geq 2x^{k/2}$ abbiamo $\sum \frac{x^k}{(1+x^k)^k} \leq \sum \frac{x^k}{2^k x^{k^2/2}}$ e se $x \geq 1$, abbiamo $\sum \frac{x^k}{2^k x^{k^2/2}} \leq \sum 2^{-k}$ da cui la convergenza uniforme in $[1, +\infty)$. Rimane l'intervallo $[\delta, 1)$ con $\delta \in (0, 1)$ (ad esempio $\delta = 1/2$).

Sia $x = 1 - c$, $c < 1/2$. La serie diventa $\sum e^{k[\ln(1-c) - \ln(1+e^{k \ln(1-c)})]}$ e si dimostra facilmente che $\ln(1-c) - \ln(1+e^{k \ln(1-c)}) \leq -\ln 2$ da cui

$$\sum \frac{x^k}{(1+x^k)^k} \leq \sum e^{-k \ln 2}$$

da cui la convergenza uniforme.

166.8.2 La convergenza semplice su $\mathbf{R}$ si ha per ogni x dal momento che $\max\{p, q\} > 1$. Il massimo di $x/(n^p + n^q x^2)$ si ha per $x = n^{\frac{p-q}{2}}$ e si maggiora $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|}{n^p + n^q x^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(p+q)/2}$ da cui la convergenza uniforme su $\mathbf{R}$ per $p+q > 2$.

Si può anche ragionare così : $n^p + n^q x^2 \geq 2(n^{p+q} x^2)^{\frac{1}{2}} = 2n^{\frac{p+q}{2}} |x|$

$$n^p + n^q x^2 = \sum_{k=1}^N \frac{n^p}{N} + \sum_{l=1}^M \frac{n^q x^2}{M} \geq (M+N) \left(\frac{n^{Np} n^{Mq} x^{2M}}{N^N M^M} \right)^{\frac{1}{M+N}}$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|}{n^p + n^q x^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|}{(M+N) \left(\frac{n^{Np} n^{Mq} x^{2M}}{N^N M^M} \right)^{\frac{1}{M+N}}}$$

e vogliamo che $2M \geq M+N$, $Np+Mq > M+N$ da cui $N(p-1) > M(1-q)$.

Se $p > 1$ deve essere $M \geq N > M \frac{1-q}{p-1}$ e quindi $\frac{1-q}{p-1} < 1$, $p+q > 2$.

Se $p = 1$ deve essere $q > 1$ e quindi di nuovo $p+q > 2$.

Se $p < 1$ deve essere $q > 1$ e $N < M \frac{1-q}{p-1}$

$\boxed{p=2, q=0}$ Sia $N \leq x \leq N+1$.

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{x}{n^2 + x^2} \geq \sum_{n=N}^{2N} \frac{N}{n^2 + (N+1)^2} \geq \frac{N^2}{4N^2 + (N+1)^2} \geq \frac{1}{7} \quad \text{no convergenza uniforme su } \mathbf{R}$$

$\boxed{p=0, q=2}$ Prendiamo N tale che $1/N \leq x \leq 2/N$ e $nx \leq 1$ da cui $n \leq N/2$ e

$$\sum_{n=N/4}^{N/2} \frac{x}{1 + n^2 x^2} \geq \sum_{n=N/4}^{N/2} \frac{1}{N} \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \text{no convergenza uniforme su } \mathbf{R}$$

$\boxed{1 < p < 2, q = 2 - p}$ $\frac{x}{n^p + n^{2-p}x^2} \geq \frac{x}{n^2 + x^2}$ per $x \leq n^p$ e quindi la serie non converge uniformemente su $\mathbf{R}$

$\boxed{0 < p < 1, q = 2 - p}$ $\frac{x}{n^p + n^{2-p}x^2} \geq \frac{x}{n^2 + x^2}$ per $x \geq n^{p-2}$ e quindi la serie non converge uniformemente su $\mathbf{R}$

167.8.2 La convergenza uniforme su $\mathbf{R}$ segue da $\frac{1}{n^3 + n^4 x^2} \leq \frac{1}{n^3}$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2 n^4}{(n^3 + n^4 x^2)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2 n^4}{4n^7 x^2} \implies \text{derivazione termine a termine}$$

La convergenza uniforme su $\mathbf{R}$ segue da $\frac{1}{n^2 + n^4 x^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h} \frac{1}{n^2 + n^4 h^2} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h(1 + h^2)} \frac{1}{n^4} = +\infty$$

e $-\infty$ per disparità se $h \rightarrow 0^-$.

A conferma sia $1/N \leq h < 2/N$ e $n \leq 1/h \leq N$ da cui

$$\sum_{n=N/2}^N \frac{1}{h} \frac{1}{n^2 + n^4 h^2} \geq \sum_{n=N/2}^N \frac{1}{h} \frac{1}{n^2 + n^2} \geq \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \frac{1}{2N^2} > \frac{1}{8}$$

e quindi il limite finito non esiste.

168.8.2 La serie converge uniformemente ($p > 1$). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2xn^q}{(n^p + n^q x^2)^2}$

$$\left[\frac{n^p}{3} + \frac{n^p}{3} + \frac{n^p}{3} + n^q x^2 \right]^2 \geq \left(4 \frac{(n^{3p+q} x^2)^{\frac{1}{4}}}{3^{3/4}} \right)^2 = \frac{16}{3\sqrt{3}} |x| n^{-(3p+q)/2}$$

Se $\frac{3p+q}{2} - q > 1$ ($3p > 2 + q$) la serie converge uniformemente. Se $q \geq 3p - 2$ facciamo vedere che $f'(0)$ non esiste (finito)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{n^p + n^q h^2} - \frac{1}{n^p} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^q h}{n^p (n^p + n^q h^2)}$$

Sia $1/n \leq h < 2/N$ e $n^q h^2 \leq n^p$ da cui $n \leq h^{\frac{-2}{q-p}} \leq N^{\frac{2}{q-p}}$. Sia $h \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=\frac{1}{2}N^{\frac{2}{q-p}}}^{N^{\frac{2}{q-p}}} \frac{n^q h}{n^p(n^p + n^q h^2)} &\geq \sum_{n=\frac{1}{2}N^{\frac{2}{q-p}}}^{N^{\frac{2}{q-p}}} \frac{1}{N} \frac{n^q}{2n^{2p}} \geq \frac{1}{2} N^{\frac{2}{q-p}} \frac{1}{N} \max\{N^{\frac{2(q-2p)}{q-p}}, 2^{\frac{-q}{q-2p}} N^{\frac{2(q-2p)}{q-p}}\} \geq \\ &\geq CN^{\frac{q-3p+2}{q-p}} \geq C \end{aligned}$$

per cui non può esistere finito il limite $h \rightarrow 0^+$.

169.8.2 Chiaramente $\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n (1 - x^n) = 0$. Prendiamo $x_k = 1 - 1/k$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (1 - x)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) &\geq \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (1 - x) n x^{\frac{n-1+n-2+\dots+1}{n}} = \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (1 - x) n x^{\frac{n-1}{2}} &\geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \frac{1}{k} k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\frac{k-1}{2}} \geq (1 - 1/2)^3 = 1/8 \end{aligned}$$

e quindi il limite non può essere zero.

170.8.2 $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (1 - x)}{n(1 - x^{2n})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Usiamo $1 - x^{2n} = (1 - x) \sum_{k=0}^{2n-1} x^k \geq (1 - x) 2n x^{\frac{2n-1+2n-2+\dots+1}{2n}} = (1 - x) 2n x^{\frac{2n-1}{2}} \geq (1 - x) 2n x^n$ da cui la convergenza totale $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (1 - x)}{n(1 - x^{2n})} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^n (1 - x)}{2n^2 x^n (1 - x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ e quindi il risultato è evidente passando al limite sotto il segno di serie.

171.8.2 Usiamo il Teorema di Abel

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{a_n}{n^\alpha} \right| &= \left| \frac{A_{n_2}}{n_2^\alpha} - \frac{A_{n_1}}{n_1^\alpha} + \sum_{k=n_1}^{n_2} A_{k-1} \left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{|A_{n_2}|}{n_2^\alpha} + \frac{|A_{n_1}|}{n_1^\alpha} + \sup_{k \geq 1} |A_k| \left(\frac{1}{(n_1-1)^\alpha} - \frac{1}{n_2^\alpha} \right) \end{aligned}$$

da cui la convergenza uniforme per $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

172.8.2

$$\begin{aligned} \sum \int_0^{+\infty} f_n(x) dx - \int_0^{+\infty} \sum f_n(x) dx &= \\ = \sum \int_0^X f_n(x) dx + \sum \int_X^{+\infty} f_n(x) dx - \int_0^X \sum f_n(x) dx - \int_X^{+\infty} \sum f_n(x) dx \\ \sum \int_0^X f_n(x) dx &= \int_0^X \sum f_n(x) dx \text{ per convergenza uniforme.} \end{aligned}$$

$$\sum \int_X^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_X^{+\infty} f_n(x) dx + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_X^{+\infty} f_n(x) dx$$

Chiaramente $\sum_{n=1}^N \int_X^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ e $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_X^{+\infty} f_n(x) dx \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \rightarrow 0$

essendo il resto di una serie convergente (si sa la nonnegatività delle funzioni. Inoltre $0 \leq \int_X^{+\infty} \sum f_n(x) dx \leq \varepsilon$ se X è grande abbastanza in quanto $\int_0^{+\infty} \sum f_n(x) dx$ esiste per ipotesi

173.8.2 Suddividiamo l'intervallo (a, b) in N sottointervalli tutti uguali di lunghezza $(b - a)/N$ e siano $a = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b$ i punti estremi degli intervalli. Chiaramente

$\sup_{\substack{x=x_i \\ i=1, \dots, N}} \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} f_k(x) \right| < \varepsilon$ per ogni $k_1 > k_N$. Sia ora $x \in (x_i, x_{i+1})$ e

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} f_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} (f_k(x) - f(x_i)) \right| + \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} f_k(x_i) \right| \leq |x - x_i| M + \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} f_k(x_i) \right| < \frac{(b-a)M}{N} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

per $N > (b-a)M/\varepsilon$. Dalla dimostrazione si capisce pure che (a, b) deve essere limitato

174.8.2 Scriviamo $B_n(x) = (B_n(x) - A_n(x)) + A_n(x)$ e osserviamo che $0 \leq B_n(x) - A_n(x) \leq C_n(x) - A_n(x)$. Ne segue che $B_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B(x)$ per ogni $x \in (a, b)$ e inoltre è chiaro che $A(x) \leq B(x) \leq C(x)$. Poi scriviamo

$$\int_a^b (A_n(x) - C(x)) dx \leq \int_a^b (B_n(x) - B(x)) dx \leq \int_a^b (C_n(x) - A(x)) dx$$

da cui la tesi. In particolare se $|B_k(x)| \leq K$ con K indipendente da k e da x , vale il teorema.

175.8.2 Dimostriamo per assurdo. Dire che $f_n \rightarrow f$ non uniformemente significa che $\exists \varepsilon > 0: \forall n \exists n_\varepsilon > n, x_{n_\varepsilon}: f(x_{n_\varepsilon}) - f_n(x_{n_\varepsilon}) > \varepsilon$. Consideriamo una successione illimitata di interi. A ciascun intero corrisponde una coppia $\{n_\varepsilon\}$ e $\{x_{n_\varepsilon}\}$. Essendo K compatto, da tali insiemi estraiamo una successione $\{n\}$ e $\{x_n\}$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x} \in K$. Dunque abbiamo che $f(x_n) - f_n(x_n) \geq \varepsilon \forall n$. Poiché $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ (data la continuità della funzione $f(x)$) si ottiene $f(\bar{x}) - f_n(x_n) \geq \varepsilon \forall n$ ossia $f(\bar{x}) \geq f_n(x_n) + \varepsilon \forall n$. Scriviamo $f_n(x_n) = f_n(x_n) - f_n(\bar{x}) + f_n(\bar{x})$ e dimostriamo che $f_n(x_n) = f_n(x_n) - f_n(\bar{x}) \rightarrow 0$. Da tale fatto e dal fatto che $f_n(\bar{x}) \rightarrow f(\bar{x})$ (per la continuità della f) segue che $f(\bar{x}) \geq \varepsilon + f(\bar{x})$ il che è impossibile. Che $f_n(x_n) - f_n(\bar{x}) \rightarrow 0$ deriva dalla uniforme continuità delle funzioni $\{f_n\}$ e dalla uniforme continuità della f . La sola uniforme continuità di ciascuna f_n non basta in quanto "il δ " dipende da n e potrebbe andare a zero con esso. Ciò è impedito dal fatto che pure f è uniformemente continua. In dettaglio si scrive: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, n}: |x - y| < \delta_{\varepsilon, n} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\delta}_\varepsilon: |x - y| < \bar{\delta}_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Se si avesse $\inf_n \delta_{\varepsilon, n} = 0$ allora anche $\bar{\delta}_\varepsilon = 0$ in quanto $f(x) - f(y) = f_n(x) - f_n(y) + (f(x) - f_n(x)) + (f(y) - f_n(y))$ per n sufficientemente grande si ha $(f(x) - f_n(x)) + (f(y) - f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi per $|x - y| < \bar{\delta}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ si avrebbe $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ per ogni n sufficientemente grande e questo è in contrasto con $\inf_n \delta_{\varepsilon, n} = 0$

- 1) $K = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ se $x \in [0, 1)$ e $f_n(1) = 0$ (f_n non continua)
- 2) $K = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ (f non continua)
- 3) $K = [-1, 1]$, $f_n(x) = nxe^{-n^2(x-\frac{1}{n})^2}$ ($f_n \not\rightarrow f$, $f_n \nearrow f$)
- 4) $K = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n$, (K non compatto)

Una dimostrazione leggermente diversa è la seguente. Partiamo sempre dalla definizione di non uniforme continuità ossia $\exists \varepsilon > 0: \forall n \exists n_\varepsilon > n, x_{n_\varepsilon}: f(x_{n_\varepsilon}) - f_n(x_{n_\varepsilon}) > \varepsilon$. Ne segue che esiste una successione di interi $\{k\}$ tale che $f(x_k) - f_k(x_k) > \varepsilon$. Sia $A_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K: f(x) - f_k(x) \geq \varepsilon\}$.

$A_k \neq \emptyset$ è chiuso e limitato ed inoltre $A_k \supset A_{k+1}$. Ne segue che $B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \neq \emptyset$. Dunque esiste

$\xi \in B \subset K$ e quindi $\xi \in A_k$ per ogni k . Ma allora $f(\xi) - f_k(\xi) \geq \varepsilon$ per ogni k e questo vorrebbe dire che $f_k(\xi) \not\rightarrow f(\xi)$

176.8.2 Dobbiamo far vedere che $\sup_E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_\varepsilon$ sapendo che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_{\varepsilon,x}$. Essendo E compatto abbiamo che $\forall r \exists E_1, \dots, E_{m_r} : (\text{diam} E_i) < r \wedge E = \bigcup_{i=1}^{m_r} E_i$. Sia $a_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{E_i} x_i$, $b_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{E_i} x_i$. Ora $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ vuol dire $f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ e quindi, se $x \in E_i$, $f_n(a_i) - \varepsilon < f(x) < f_n(b_i) + \varepsilon$. La funzione f_n è uniformemente continua ossia $\forall \varepsilon \exists \delta_n : |x - y| < \delta_n \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ e se $r \stackrel{\text{def}}{=} r_n < \delta_n$ allora $f_n(b_i) - f_n(a_i) < \varepsilon$. Inoltre segue che, per ogni $n' > n$ si ha $f_{n'}(b_i) - f_{n'}(a_i) \leq \varepsilon$ dalla convergenza della successione $f_n \rightarrow f$. Ne segue che $\sup_{E_i} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Essendo gli insiemi E_i in numero finito, si ottiene il risultato.

177.8.2 Dobbiamo far vedere che $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ sapendo che $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in D$, $n, m > N_\varepsilon$ e che $\{f_n\}$ è equicontinua. Sia $x \in E \setminus D$, $f_n(x) - f_m(x) = (f_n(x) - f_n(\xi)) + (f_n(\xi) - f_m(\xi)) + (f_m(\xi) - f_m(x))$ dove $\xi \in D$ è scelto in modo che: $|f_n(x) - f_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni n data la equicontinuità della famiglia di funzioni. Per ogni n, m sufficientemente grandi si ha $|f_n(\xi) - f_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$ e quindi per n, m sufficientemente grandi si ha $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

- si enumerino i razionali $\{r_k\}$ e si prenda la successione di funzioni $f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-k^2(x-r_k)^2}$. La successione non converge per ogni x razionale e converge al valore 0 per ogni irrazionale Diodorantino. Infatti $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$ se esistono ε, C costanti tali che $|x - r_k| \geq \frac{C}{|k|^{1+\varepsilon}}$ per ogni $k \neq 0$.

D'altra parte, dato r_q consideriamo due successioni $\hat{r}_k \stackrel{\text{def}}{=} r_q + \frac{1}{k^2}$ e $r'_k \stackrel{\text{def}}{=} r_q + \frac{1}{k^4}$. $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\hat{r}_k) = 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(r'_k) = 1$. Ne segue che la successione $\{f_k(x)\}$ non può essere equicontinua. Si prendano i punti $x_k = r_k$ e $y_k = r_k + \frac{1}{k}$ da cui $f_k(x_k) - f(y_k) = 1 - e^{-k^{-2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ anziché zero come dovrebbe se la successione di funzioni fosse equicontinua.

• Dimostriamo ora che se $\{f_n\}$ equicontinua, E compatto e f_n convergente per ogni $x \in E$, allora la convergenza è uniforme. Dobbiamo mostrare che $\sup_E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_\varepsilon$ sapendo che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_{\varepsilon,x}$. Essendo E compatto abbiamo che $\forall r \exists E_1, \dots, E_{m_r} : (\text{diam} E_i) < r \wedge E = \bigcup_{i=1}^{m_r} E_i$. Sia $a_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{E_i} x_i$, $b_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{E_i} x_i$. Abbiamo

$f_n(x) - \varepsilon < f_m(x) < f_n(x) + \varepsilon$. Dalla equicontinuità e dalla compattezza di E , si ha che $n > N_{\varepsilon,i} \Rightarrow \sup_{E_i} f_n(x) - \inf_{E_i} f_n(x) < \varepsilon$. Ne segue che $n > N_{\varepsilon,i} \Rightarrow \sup_{E_i} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Dalla finitezza della famiglia E_i segue il risultato.

- R.: $E = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n$. Che la famiglia non è equicontinua lo si vede prendendo le due successioni $y_k = 1$, e $x_k = 1 - \frac{1}{n}$. $y^n - x^n = (y - x) \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \frac{1}{n})^{n-1-i} = \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n})^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \frac{1}{n})^{-i} \geq \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n})^{n-1} n (1 - \frac{1}{n})^{-n} \rightarrow 1$ e quindi la famiglia non è equicontinua.

178.8.2 Per dimostrare la uniforme convergenza in un intervallo $0 \leq t \leq t_0 < t_1$ basta osservare che il raggio di convergenza della serie è $\overline{\lim} |a_k|^{-1/k} \stackrel{\text{def}}{=} r \geq t_1$. Duque per $0 \leq t \leq t_0 < t_1$ si magiora la serie con una serie di potenze uniformemente convergente. Se però abbiamo $r = t_1$

il ragionamento precedente non vale più. Scriviamo (usare la trasformazione di Abel Rich.11)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=p+1}^q a_k t_1^k \left(\frac{t}{t_1}\right)^k &= \left(\frac{t}{t_1}\right)^q \sum_{k=1}^q a_k t_1^k - \left(\frac{t}{t_1}\right)^p \sum_{k=1}^p a_k t_1^k - \sum_{k=p}^{q-1} \left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^{k+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \right) \sum_{j=1}^k a_j t_1^j = \\
 &= \left(\frac{t}{t_1}\right)^q \sum_{k=p+1}^q a_k t_1^k + \left(\frac{t}{t_1}\right)^q \sum_{k=1}^{p-1} a_k t_1^k - \left(\frac{t}{t_1}\right)^p \sum_{k=1}^{p-1} a_k t_1^k - \sum_{k=p}^{q-1} \left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^{k+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \right) \sum_{j=p}^k a_j t_1^j + \\
 &\quad - \sum_{k=p}^{q-1} \left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^{k+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \right) \sum_{j=1}^{p-1} a_j t_1^j = \\
 &= \underbrace{\left(\frac{t}{t_1}\right)^q \sum_{k=p+1}^q a_k t_1^k}_{\substack{\text{in modulo } < \varepsilon \\ \text{per } p \text{ grande} \\ < \varepsilon}} - \sum_{k=p}^{q-1} \left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^{k+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \right) \underbrace{\sum_{j=p}^k a_j t_1^j}_{\substack{\text{in modulo } < \varepsilon \\ \text{per } p \text{ grande}}}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=p}^{q-1} \left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^{k+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \right) \sum_{j=p}^k a_j t_1^j \right| &< \varepsilon \sum_{k=p}^{q-1} \left| \left(\frac{t}{t_1}\right)^{k+1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \right| = \\
 &= \varepsilon \sum_{k=p}^{q-1} \left[- \left(\frac{t}{t_1}\right)^{k+1} + \left(\frac{t}{t_1}\right)^k \right] = \varepsilon \left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^p - \left(\frac{t}{t_1}\right)^q \right) < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Importante è notare che se si trattasse di serie di potenze complesse il teorema ci darebbe *la convergenza uniforme su ogni raggio all'estremo del quale la serie converge*. Non è detto che la convergenza sia uniforme sull'insieme dei raggi. Ad esempio la serie di potenze $\sum \frac{z^k}{k^2}$ converge uniformemente su ogni raggio e uniformemente su tutti i raggi ossia uniformemente su tutto il cerchio di raggio 1 in virtù del fatto che la serie di n^{-2} converge. Viceversa la serie $\sum \frac{z^k}{k}$ converge per ogni $|z| \leq 1$ $z \neq 1$ (è maggiorata da una serie di potenze per $|z| < 1$ e si usa il criterio di Abel per $|z| = 1$) ma non converge uniformemente su $D = \{|z| \leq 1, z \neq 1\}$. Basta far vedere che

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists p, q > N : \sup_D \sum_{k=p}^q \frac{t^k}{k} \geq \varepsilon.$$

Prendiamo $t = 1 - \delta_q$ tale che $q\delta_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$.

$$\sum_{k=p}^q \frac{t^k}{k} \geq \frac{1}{q} \sum_{k=p}^q t^k = \frac{1}{\delta_q} t^p \frac{1 - t^{q-p+1}}{1 - t} \underset{q \rightarrow +\infty}{=} 1 - \delta_q + \dots$$

e quindi la convergenza non uniforme

Peraltro dal risultato segue il corollario

Sia $f(x)$ continua per $0 \leq x \leq x_0$ e per $0 \leq x < x_0$ si ha $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Allora se la serie

numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ converge, si ha $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

Infatti dalla convergenza di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ segue la uniforme convergenza in $[0, x_0]$ della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

Allora

$$f(x_0) \underbrace{=}_{f \text{ continua}} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \underbrace{=}_{\text{unif. conv.}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$$

2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k &= \sum_{k=1}^n a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = I_1 + I_2 \\ I_1 &= x^n \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - x^{k+1}) \sum_{j=1}^k a_j + \sum_{k=m}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) \sum_{j=1}^k a_j \\ I_2 &= -x^{n+1} \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k a_j (x^k - x^{k+1}) \geq -x^{n+1} \sum_{j=1}^n a_j \end{aligned}$$

Mettendo assieme si ha

$$I_1 + I_2 \geq (x^n - x^{n+1}) \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - x^{k+1}) \sum_{j=1}^k a_j + \sum_{k=m}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) \sum_{j=1}^k a_j$$

Dal momento che $\sum_{k=1}^n a_k \rightarrow +\infty$, si ha $\sum_{k=1}^n a_k > M$ per ogni $n \geq m$ e quindi

$$\sum_{k=m}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) \sum_{j=1}^k a_j \geq M(x^m - x^n) \geq Mx^m/2$$

per n grande abbastanza. La quantità $(x^n - x^{n+1}) \sum_{j=1}^n a_j$ è positive e inoltre

$$\left| \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - x^{k+1}) \sum_{j=1}^k a_j \right| \leq \sup_{1 \leq k \leq m} \left| \sum_{j=1}^k a_j \right| (1 - x^m)$$

e possiamo maggiorarla con $\leq Mx^m/4$. Ne segue

$$I_1 + I_2 \geq Mx^m/4 \quad \forall x \in [x_0, 1) \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} I_1 = +\infty$$

3) Sappiamo che da $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = L$ segue che definitivamente $\sum_{k=1}^n a_k \leq L + \varepsilon$. Ripartiamo da

$$I_1 = x^n \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k}_{\leq L+\varepsilon} + \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - x^{k+1}) \sum_{j=1}^k a_j + \sum_{k=m}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^k a_j}_{\leq L+\varepsilon} \leq L + \varepsilon + (1 - x^n)(L + \varepsilon)$$

$$I_2 = -x^{n+1} \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k a_j (x^k - x^{k+1})$$

Li sommiamo e otteniamo

$$I = \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - x^{k+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^k a_j}_{\leq C} + \sum_{k=m}^{+\infty} (x^k - x^{k+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^k a_j}_{\leq L+\varepsilon} \leq C(1-x^m) + (L+\varepsilon)x^m$$

Poi prendiamo $x \geq 1 - \frac{\varepsilon}{mC}$ da cui $1 - x^m = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{m-1}) \leq \varepsilon$ e quindi

$$I \leq \varepsilon + L + \varepsilon = L + 2\varepsilon \implies \overline{\lim}_{t \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k \leq L$$

Sappiamo che da $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = l$ segue che definitivamente $\sum_{k=1}^n a_k \geq l - \varepsilon$.

$$I = \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - x^{k+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^k a_j}_{\geq -C} + \sum_{k=m}^{+\infty} (x^k - x^{k+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^k a_j}_{\geq l-\varepsilon} \geq -C(1-x^m) + (l-\varepsilon)x^m \geq l - 2\varepsilon - \varepsilon \frac{3l}{C}$$

da cui il risultato.

179.8.2 Sia $\sum a_k$ convergente per cui definitivamente $A - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^n a_k \doteq A_n \leq A + \varepsilon$ e $\sup_{0 \leq x \leq 1} |v_n(x) - 1| < \varepsilon$. Inoltre $|A_n - A_{m-1}| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \sum_{k=m}^n a_k v_k(x) \right| = \\ &= \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \left[A_n(v_n - 1) - A_{m-1}(v_{m-1} - 1) + A_n - A_{m-1} + \sum_{k=m}^n A_{k-1}(v_{k-1} - v_k) \right] \right| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \left(2(|A| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon + \sum_{k=m}^n |A_{k-1}|(v_{k-1} - v_k) \right) \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} [2(|A| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon + (|A| + \varepsilon)((v_{m-1} - 1) - (v_n - 1))] \leq B\varepsilon \end{aligned}$$

da cui la convergenza.

Sia $\sum a_k = +\infty$.

$$\sum_{k=2}^n a_k v_k(x) = A_n v_n - A_1 v_1 + \sum_{k=2}^n A_{k-1}(v_{k-1} - v_k) \geq A_n v_n(x) - A_1 v_1(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

180.8.2 $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k \frac{1 - x^k}{k(1 - x)}$ e $\frac{1 - x^k}{k} \geq \frac{1 - x^{k+1}}{k+1}$ in quanto $1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} \geq kx^k$. Applichiamo il corollario del Teorema di Abel e quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} k a_k = f'(1)$.

$x^n/(1+x^n) \geq x^{n+1}/(1+x^{n+1})$ e quindi possiamo applicare il risultato alla serie

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{1+x^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \frac{\ln 2}{2}$$

Inoltre $x^n/(1-x^{2n}) \geq x^{n+1}/(1+x^{2n+2})$ e quindi possiamo applicare il risultato alla serie

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k(1-x)}{1-x^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \frac{\ln 2}{2}$$

181.8.2

$$\sum_{k=p+1}^q a_k z^k = z^q \underbrace{\sum_{k=p+1}^q a_k}_{\substack{\text{in modulo } < \varepsilon \\ \text{per } p \text{ grande}}} - \sum_{k=p}^{q-1} (z^{k+1} - z^k) \underbrace{\sum_{j=p}^k a_j}_{\substack{\text{in modulo } < \varepsilon \\ \text{per } p \text{ grande}}}$$

e quindi

$$\left| \sum_{k=p}^{q-1} (z^{k+1} - z^k) \sum_{j=p}^k a_j \right| \leq \varepsilon |1-z| \sum_{k=p}^{q-1} |z|^k = \varepsilon |1-z| \frac{|z|^p(1-|z|^{q-p})}{1-|z|} \leq \varepsilon K$$

da cui la uniforme convergenza che a sua volta consente di passare al limite sotto il segno di serie ottenendo

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{z \rightarrow 1} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Sia $1-z = \rho e^{i\varphi}$. $|z|^2 = (1-\rho \cos \varphi)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi$ per cui $|1-z| \leq K(1-|z|)$ diventa $K|z| \leq K - |1-z|$ ossia

$$K^2(1-\rho \cos \varphi)^2 + K^2 \rho^2 \sin^2 \varphi \leq K^2 - 2K\rho + \rho^2 \iff (K^2-1)\rho \leq 2K(K \cos \varphi - 1)$$

da cui $\cos \varphi \geq 1/K$ e questo implica che la curva $|1-z| \leq K(1-|z|)$, quando $z \rightarrow 1$ chiaramente dall'interno del cerchio di raggio 1, rimane confinata nello spazio individuato dalle due rette $y = \pm(x-1)\sqrt{K^2-1}$. I cammini di questo tipo sono detti *cammini di Stolz* e la definizione è presa dall'articolo di Hardy-Littlewood "Abel's Theorema and its converse", Proceedings of the London Mathematical Society, vols-2, num.18, Issue 1, p.206.

182.8.2 La dimostrazione consta di tre passi. Primo passo. Sia $a_k/b_k \rightarrow 0$ e quindi $|a_k| < b_k \varepsilon$

per $k > k_\varepsilon$. Sia $f_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} a_k x^k$ e quindi

$$-\varepsilon g(x) \underbrace{\leq}_{x \text{ vicina a } 1} -\varepsilon \sum_{k=m}^{+\infty} b_k x^k < f(x) - f_m(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k x^k < \varepsilon \sum_{k=m}^{+\infty} b_k x^k \underbrace{\leq}_{x \text{ vicina a } 1} \varepsilon g(x)$$

e quindi

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \varepsilon + \frac{|f_m(x)|}{|g(x)|}$$

Da [\[rich.37\]](#), se $x \rightarrow 1^-$ allora $g(x) \rightarrow +\infty$ in quanto $\sum b_k = +\infty$ e quindi $|f(x)|/|g(x)| < 2\varepsilon$. per $0 < 1-x < \delta_\varepsilon$. Ne segue $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)/g(x) = 0$.

Secondo passo Sia $a_k/b_k \rightarrow l$. Segue $(a_k - lb_k)/b_k \rightarrow 0$ ossia $-\varepsilon b_k < a_k - lb_k < \varepsilon b_k$ definitivamente in k e quindi

$$\frac{\sum_{k=1}^{k_\varepsilon-1} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} - \varepsilon \frac{\sum_{k=k_\varepsilon}^{+\infty} b_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \frac{\sum_{k=1}^{k_\varepsilon-1} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} + \varepsilon \frac{\sum_{k=k_\varepsilon}^{+\infty} b_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k}$$

Ora

$$\frac{\sum_{k=1}^{k_\varepsilon-1} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 1^- \implies -2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < 2\varepsilon$$

in quanto il denominatore tende a $+\infty$.

Terzo caso: $a_k/b_k \rightarrow +\infty$. In tal caso $a_k > Mb_k$ definitivamente.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} = \frac{\sum_{k=1}^{k_\varepsilon} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} + \frac{\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} > \frac{\sum_{k=1}^{k_\varepsilon} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} + \frac{\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty} Mb_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{k_\varepsilon} a_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} - \frac{\sum_{k=1}^{k_\varepsilon+1} Mb_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k} + M \implies \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Supponiamo ora che a_k/b_k non tenda a nessun limite ma $A_n/B_n \rightarrow l$. Siccome

$$\frac{f(x)(1+x+x^2+\dots)}{g(x)(1+x+x^2+\dots)} = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k x^k}{\sum_{k=1}^{+\infty} B_k x^k}$$

possiamo dedurre le stesse conclusioni di prima.

183.8.2

$$\begin{aligned} \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k(n-k+1) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k(n-k+1) + \frac{a_n}{n} = \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k(n-k) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k + \frac{a_n}{n} = \frac{n-1}{n} \frac{S_1 + \dots + S_{n-1}}{n-1} + \frac{S_n}{n} \end{aligned}$$

Se quindi esiste il limite $(S_1 + \dots + S_n)/n \rightarrow l \in \mathbf{R}$, allora $S_n/n \rightarrow 0$. Inoltre

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n} + \frac{a_n}{n}$$

e quindi $a_n/n \rightarrow 0$.

184.8.2 1) Usiamo rich.40. $A_n = a_1 + \dots + a_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{B_n (=n)} = l \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots}{(1+x+x^2+x^3+\dots)} = l \quad (1)$$

$$\frac{(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)(1+x+x^2+x^3+\dots)}{(1+x+x^2+x^3+\dots)} = \frac{A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots}{(1+x+x^2+x^3+\dots)}$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow 1^-} a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = l$. Lo stesso vale per gli altri casi relativi al limite di A_k/B_k .

2) Ripartiamo da (1) al punto precedente. Per Cesàro–Stolz, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n - B_{n-1}} =$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(A_1 + \dots + A_n) - (A_1 + \dots + A_{n-1})}{n - (n-1)} = l \quad \text{allora il limite in (1) vale } l \text{ e quindi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k = l.$$

3) Si usa l'argomento in 1) con le serie $A_1x + (2A_1 + A_2)x^2 + (3A_1 + 2A_2 + A_3)x^3 + \dots$ e $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \dots n(n-1)x^n/2 + \dots$

4) Sia data $f(x) = e^{1/(1+x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Il raggio di convergenza è uno e chiaramente $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{e}$. Se la successione converge C1 allora $a_n = o(n)$ e quindi $a_n = O(n)$. Per $x < 0$ scriviamo $x = -y$ con $y \rightarrow 1^-$ da cui

$$O\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} O(a_k)(-1)^k y^k = \sum_{k=0}^{+\infty} O(a_k) y^k = O\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k y^k\right) = O(1/(1-y)^2)$$

ma $f(x) = O(e^{1/(1-y)})$ e quindi la successione $\{a_k\}$ non è sommabile C1.

Se la successione $\{a_k\}$ fosse sommabile Ck allora $a_k = O(n^k)$ e verrebbe fuori che $O\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) = O(1/(1-y)^{k+1})$ per $x \rightarrow -1$, $y = -x$. La contraddizione con $f(x) = O(e^{1/(1-y)})$ è identica.

185.8.2 1) Eseguiamo il limite lungo la semiretta $[0, +\infty)$. In tal caso $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ è crescente e limitata dunque converge. Per il corollario di [\[rich.3\]](#), $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = A$.

2) Sappiamo che se $n > n_1$ allora $n|a_n| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k (1 - z^k) \right| \leq |1 - z| \sum_{k=0}^{n-1} k |a_k| \leq K(1 - |z|) \left(\sum_{k=0}^{n_1} k |a_k| + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} k |a_k| \right)$$

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} (k |a_k|) \frac{1}{k} \cdot |z|^k < H_n \frac{|z|^n}{n(1 - |z|)} \quad (H_n = \sup_{k \geq n} k |a_k|)$$

Sia $|z| = 1 - 1/n$ da cui $|1 - z| < K/n$. Ora

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_1} a_k (1 - z^k) + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} a_k (1 - z^k) - \sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k \right| \leq$$

$$\leq K(1 - |z|) \sum_{k=0}^{n_1} k |a_k| + K(1 - |z|) \sum_{k=n_1+1}^{n-1} k |a_k| + \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k| |z|^k$$

$$\leq \frac{K n_1}{n} \max_{0 \leq k \leq n_1} |a_k| + \frac{K(n - n_1 - 1)\varepsilon}{n} + H_n < 3\varepsilon$$

non appena n è grande abbastanza e per ogni $|z|$ abbastanza vicino a 1 e tale che z appartenga al limaçon. Ne segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = A$$

È facile dare un controesempio: $a_k = (-1)^k$.

3) se na_n non ammette limite ma $(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n)/n \rightarrow 0$. Per la dimostrazione scriviamo

$$\sum_{k=p+1}^q a_k z^k = \sum_{k=p+1}^q (k a_k) \frac{z^k}{k} = \frac{z^q}{q} \sum_{k=1}^q k a_k - \frac{z^p}{p} \sum_{k=1}^p k a_k + \sum_{k=p+1}^q \left[\frac{z^k}{k} - \frac{z^{k+1}}{k+1} \right] \sum_{j=1}^k j a_j$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{z^p}{p} \sum_{k=1}^p k a_k \right| \rightarrow 0, \quad p \rightarrow +\infty \\
 & \left| \sum_{k=p+1}^q \left[\frac{z^k}{k} - \frac{z^{k+1}}{k+1} \right] \sum_{j=1}^k j a_j \right| \leq \sum_{k=p+1}^q \frac{1}{k} \left| \sum_{j=1}^k j a_j \right| (|z|^k + \frac{k}{k+1} |z|^{k+1}) \leq \\
 & \underbrace{\leq}_{p \text{ grande}} \varepsilon \sum_{k=p+1}^q |z|^k \left[1 - |z| + \frac{|z|}{k+1} \right] \leq \varepsilon \left[1 - |z| + \frac{|z|}{k+1} \right] |z|^{p+1} \frac{1 - |z|^{q-p}}{1 - |z|} \leq \\
 & \leq \varepsilon |z|^{p+1} + \frac{\varepsilon}{p+2} \frac{|z|^{q+2}}{1 - |z|}
 \end{aligned}$$

e si procede come prima prendendo $|z| = 1 - 1/p$.

Da notare che le due condizioni $(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n)/n \rightarrow 0$ e l'esistenza del limite $\lim_{z \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ sono necessarie alla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e prese assieme sono sufficienti.

186.8.2 1). $(1-x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ e ne consegue $B_n = \sum_{k=0}^n b_k = \frac{(2n+1)!!}{2^n n!}$. Inoltre $\sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2}$ e quindi $A_n = \sum_{k:k^2 \leq n} 1 \sim \sqrt{n}$. Ora dobbiamo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} n! 2^n}{(2n+1)!!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} (n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Usando la formula di Wallis (oppure di Stirling)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4 (2n+1)}{((2n+1)!)^2} = \frac{\pi}{2}$$

187.8.2 Prima dimostrazione

$$\begin{aligned}
 \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} &= \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n+1}{n} S_n - \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} \\
 \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} &\rightarrow 0 \text{ usando } ka_k \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Seconda dimostrazione Da [\[rich.41\]](#), prima domanda, se la serie converge $C1$ allora è vera la conclusione di [\[rich.39\]](#). Ma l'esistenza del limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ unitamente a $ka_k \rightarrow 0$, implica la conclusione di [\[rich.42\]](#).

188.8.2 Prima dimostrazione Abbiamo

$$\frac{S_1 + \dots + S_n}{n} = \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n+1}{n} S_n - \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n}$$

Dire quindi che la serie $\sum a_k$ converge equivale a dire che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = 0$ in quanto S_n deve convergere allo stesso limite. Detta $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \doteq t_n$ (notazione di Hardy), se $t_n/n \not\rightarrow 0$, vuol dire che la serie $\sum a_k$ non converge.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{(ka_k)}{k} \underbrace{=}_{rich.11} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (ka_k) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \cdot \sum_{j=1}^k (ja_j)$$

quindi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k (ja_j) = \frac{nS_n - t_n}{n} = S_n - \frac{n+1}{n} S_n + \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} = \frac{S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} \doteq \frac{S_{n-1}^{(1)}}{n}$$

(è sempre notazione di Hardy) che poi è uguale a $\frac{S_{n-1}^{(1)}}{n-1} \frac{n-1}{n}$. Ciò vuol dire che la quantità

$$\sum_{k=1}^n \frac{t_k}{k(k+1)}$$

deve convergere allo stesso limite cui converge la quantità $S_n^{(1)}/n$ che è la definizione

di convergenza $C1$. Facciamo vedere che se $t_n/n \not\rightarrow 0$, allora $\sum_{k=1}^n \frac{t_k}{k(k+1)}$ non converge e questo contraddice le ipotesi.

Sia $t_N > K_1 N$ ($K_1 > 0$ e possiamo supporre $K_1 < K$) oppure $t_n < -K_1 N$.

Possiamo supporre a_k reale. Sia a_k complesso. Se $t_N > K_1 N$ allora $\text{Re}(t_N)$ oppure $\text{Im}(t_N)$ soddisfa una relazione analoga e quindi possiamo procedere. Sia N_2 il più piccolo intero tale che $N_1 \geq \left(1 - \frac{K_1}{2K}\right) N \doteq K_2 N$. Inoltre $N_1 \leq K_3 N$ e K_3 è una costante minore di 1 e vicina a K_2 tanto quanto vogliamo. Se $N_1 \leq n \leq N$ abbiamo

$$|t_N - t_n| = |(n+1)a_{n+1} + (n+2)a_{n+2} + \dots + Na_N| < (N - N_1)K \leq \frac{K_1}{2K} NK = \frac{K_1 N}{2}$$

da cui

$$t_n \geq t_N - |t_n - t_N| > K_1 N - \frac{K_1 N}{2} = \frac{K_2 N}{2}$$

Quindi

$$\sum_{k=N_1}^N \frac{t_k}{k(k+1)} > \frac{K_1 N}{2} \sum_{k=N_1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \frac{K_1 N}{2} \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N+1} \right) > \frac{K_1}{2} \left(\frac{1}{K_3} - 1 \right) = K_4$$

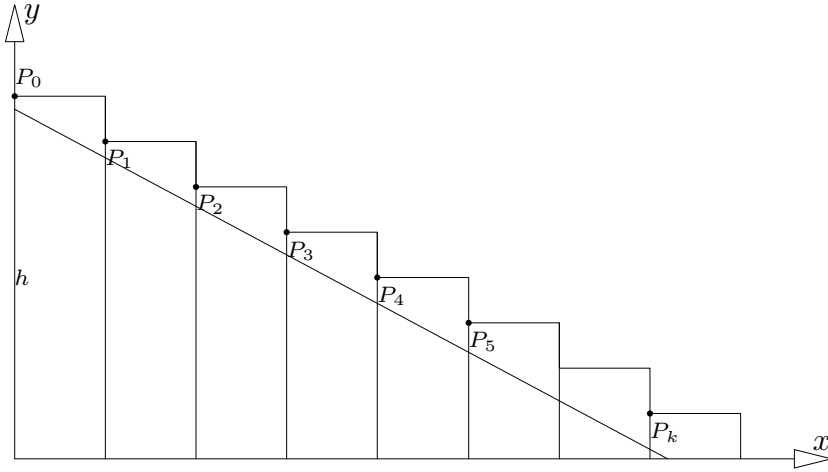
da cui la non convergenza

Seconda dimostrazione dovuta a J.E.Littlewood

Sia $s_n \doteq \sum_{k=1}^n a_k$. Sappiamo per ipotesi che $\sum_{k=1}^n s_k = ns + o(1)$. Definiamo $t_k \doteq s_k - s$ e

$\sum_{k=1}^n t_k \doteq \sigma_n$ ossia $\sigma_n = \sum_{k=1}^n s_k - ns$. Ciò che dobbiamo dimostrare è che se $|a_k| \leq A/k$ con A fissato e se $\sigma_n = o(1)$, allora $t_n \rightarrow 0$.

Supponiamo quindi che $t_n \not\rightarrow 0$. Ciò vuol dire che frequentemente $|t_n| \geq h$ con h fissato. Supponiamo che frequentemente $t_n > h$. Sia n_0 un valore per cui $t_{n_0} > h$. Per $r = 0, 1, 2, \dots$ consideriamo i punti $P_r \doteq (r, t_{n_0+r})$ ed osserviamo che $|a_{n_0+r}| \leq K/(n_0+r) \leq K/n_0$. Nella figura sottostante i punti $P_0, P_1, \dots$, hanno coordinate (r, t_{n_0+r+1})



la pendenza del segmento che congiunge i punti P_{r+1} e P_r è minore di $\vartheta = \arctan \frac{K}{n_0}$ in quanto $t_{n_0+r+1} - t_{n_0+r} = a_{n_0+r+1}$ e quindi i punti $P_0, P_1, \dots$, giacciono sopra la retta $y = h - x \tan \vartheta$. Sia P_k l'ultimo dei punti la cui ascissa è minore di $x = h \cot \vartheta$ e quindi $k \leq h \cot \vartheta$. L'area dei rettangoli fino al k -esimo è maggiore dell'area del triangolo individuato della altezza h e base

$h \cot \vartheta$. Quindi $\sigma_{n_0+k} - \sigma_{n_0-1} = \sum_{j=0}^k t_{n_0+j} > \frac{1}{2} h^2 \cot \vartheta = \frac{1}{2} h^2 \frac{n_0}{A}$. D'altra parte $|\sigma_{n_0+k} - \sigma_{n_0-1}| \leq |\sigma_{n_0+k}| + |\sigma_{n_0-1}| = (n_0 + k)o(1) + (n_0 - 1)o(1) = no(1)$ in quanto $K \leq hn_0/A$. Quindi, tenendo conto che l'insieme contenente n_0 è illimitato, si avrebbe $\frac{1}{2} h^2 \frac{n_0}{A} < n_0 o(1)$ il che è assurdo.

Il caso in cui frequentemente $t_n < -h$ si dimostra allo stesso modo.

189.8.2 Hardy dimostra che se la serie è Cr sommabile, è $C(r-1)$ sommabile.

$$S_n^{(1)} = S_1 + \dots + S_n = na_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n^{(2)} = S_1^{(1)} + \dots + S_n^{(1)} = nS_1 + (n-1)S_2 + (n-2)S_3 + \dots + S_n$$

$$S_n^{(r)} = \binom{r+n-1}{r} a_1 + \binom{r+n-2}{r} a_2 + \dots + \binom{r}{r} a_n = \sum_{k=1}^n a_k \binom{r+n-k}{r}$$

$$\begin{aligned} t_n^{(r)} &= t_1^{(r-1)} + \dots + t_n^{(r-1)} = \\ &= \binom{r+n-1}{r} a_1 + \binom{r+n-2}{r} 2a_2 + \dots + \binom{r}{r} na_n = \sum_{k=1}^n a_k k \binom{r+n-k}{r} \end{aligned}$$

da queste segue

$$1) \quad rS_n^{(r)} + t_n^{(r-1)} = (n+r)S_n^{(r-1)}, \quad 2) \quad rS_n^{(r)} + t_{n+1}^{(r-1)} = (n+1)S_{n+1}^{(r-1)}$$

Infatti per 1)

$$r \binom{r+n-k}{r} + k \binom{r+n-k-1}{r-1} = (n+r) \binom{r+n-k-1}{r-1}$$

che equivale a

$$r \frac{(r+n-k)!}{r!(n-k)!} = (n+r-k) \frac{(r+n-k-1)!}{(r-1)!(n-k)!}$$

Per la 2) abbiamo

$$r \binom{r+n-k}{r} + k \binom{r+n-k}{r-1} = (n+1) \binom{r+n-k}{r-1}$$

e si risolve analogamente. La (1) si riscrive

$$r \frac{S_n^{(r)}}{n^r} = \frac{(n+r)}{n} \frac{S_n^{(r-1)}}{n^{r-1}} - \frac{t_n^{(r-1)}}{n^r}$$

Quindi se sappiamo che la serie è C^r sommabile, condizione necessaria e sufficiente affinché sia $C^{(r-1)}$ sommabile è che $t_n^{(r-1)}/n^r \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (ka_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k (ja_j) \frac{1}{k(k+1)} \doteq \frac{t_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} t_k q(k) = \\ &= \frac{t_n}{n} + t_{n-1}^{(1)} q(n-1) + \sum_{k=1}^{n-2} t_k^{(1)} (q \circ q)(k) = \\ &= \frac{t_n}{n} + t_{n-1}^{(1)} q(n-1) + t_{n-2}^{(2)} (q \circ q)(n-2) + \sum_{k=1}^{n-3} t_k^{(2)} \underbrace{(q \circ q \circ q)(k)}_{q^{(3)}(k)} \dots \implies \\ \implies S_n &= \sum_{k=0}^{r-1} t_{n-k}^{(k)} q^{(k)}(n-k) + \sum_{k=1}^{n-r} t_k^{(r-1)} q^{(r)}(k) \end{aligned}$$

Sappiamo che $S_n - \frac{t_n}{n} = \frac{S_{n-1}^{(1)}}{n}$ e $S_n - \frac{t_n}{n} - t_{n-1}^{(1)} q(n-1) = \frac{2S_{n-2}^{(2)}}{n(n-1)}$ e si dimostra (per induzione)

$$S_n - \sum_{k=0}^{r-1} t_{n-k}^{(k)} q^{(k)}(n-k) = \frac{r!(n-r)!}{n!} S_{n-r}^{(r)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S_n - \frac{t_n}{n} &= \frac{S_{n-1}^{(1)}}{n} \iff \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} + \frac{S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} = \\ &= \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} + \frac{(n-1)a_1 + (n-2)a_2 + (n-3)a_3 + \dots + a_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

che è evidente.

$$S_n - \frac{t_n}{n} - t_{n-1}^{(1)} q(n-1) = \frac{2S_{n-2}^{(2)}}{n(n-1)} \iff \frac{S_{n-1}^{(1)}}{n} - t_{n-1}^{(1)} q(n-1) = \frac{2S_{n-2}^{(2)}}{n(n-1)}$$

ossia

$$S_{n-1}^{(1)} - \frac{t_{n-1}^{(1)}}{n-1} = \frac{2S_{n-2}^{(2)}}{n-1} \underbrace{\iff}_{da (1)} S_{n-1}^{(1)} - \frac{(n+1)S_{n-1}^{(1)} - 2S_{n-1}^{(2)}}{n-1} = \frac{2S_{n-2}^{(2)}}{n-1}$$

che è evidentemente vera. Per la formula generale usiamo come detto l'induzione e dobbiamo far vedere che

$$\frac{r!(n-r)!}{n!} S_{n-r}^{(r)} + t_{n-r}^{(r)} \underbrace{q^{(r)}(n-r)}_{r!(n-r-1)!/n!} = \frac{(r+1)!(n-r-1)!}{n!} S_{n-r-1}^{(r+1)}$$

per cui si ha $(n-r)S_{n-r}^{(r)} - (r+1)S_{n-r-1}^{(r+1)} = t_{n-r}^{(r)}$ che è la (2). Alla fine abbiamo ottenuto la (3) la quale implica

$$\frac{r!(n-r)!}{n!} S_{n-r}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n-r} t_k^{(r-1)} q^{(r)}(k)$$

e questo implica che la serie è Cr sommabile se e solo se converge in senso ordinario la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k^{(r-1)} q^{(r)}(k)$. Come nell'esercizio precedente facciamo vedere che la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} t_k^{(r-1)} q^{(r)}(k)$ equivale a $t_n^{(r-1)}/n^r \rightarrow 0$ e questo sappiamo essere equivalente alla convergenza $C(r-1)$. Come prima facciamo vedere che $t_n^{(r-1)}/n^r \not\rightarrow 0$ implica la non convergenza della serie.

Sia $t_N^{(r-1)} > K_1 N^r$ (oppure $t_N^{(r-1)} < K_1 N^r$) con $K_1 < K$ e scegliamo N_1 come nel precedente esercizio. Sia $N_1 \leq n \leq N$. Abbiamo

$$\begin{aligned} t_N^{(r-1)} - t_n^{(r-1)} &= \sum_{k=1}^N \binom{r-1+N-k}{r-1} k a_k - \sum_{k=1}^n \binom{r-1+n-k}{r-1} k a_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{r-1+N-k}{r-1} - \binom{r-1+n-k}{r-1} \right) k a_k + \sum_{k=n+1}^N \binom{r-1+N-k}{r-1} k a_k \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} |t_N^{(r-1)} - t_n^{(r-1)}| &< K \sum_{k=1}^n \left(\binom{r-1+N-k}{r-1} - \binom{r-1+n-k}{r-1} \right) + \sum_{k=n+1}^N \binom{r-1+N-k}{r-1} = \\ &= K \sum_{k=n+1}^{N-n} \binom{r-1+N-k}{r-1} < N(N-n) \binom{r+N-2}{r-1} < K(N-n)N(N+1) \cdots (N+r-2) < \\ &< \bar{K}_1(N-N_1)N^{r-1} < \frac{1}{2} K_1 \bar{K} \frac{N^r}{K} = \frac{1}{2} \bar{K}_1 N^r \end{aligned}$$

$\bar{K} > K$, e $\bar{K}_1 > K_1$ ma vicine tanto quanto vogliamo. Scrivendo $t_n^{(r-1)} = t_n^{(r-1)} + (t_N^{(r-1)} - t_n^{(r-1)})$ si ottiene $t_n^{(r-1)} > K'_1 N^r / 2$ con $K'_1 < K_1$ tanto poco quanto vogliamo. Ora abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=N_1}^N t_k^{(r-1)} q^{(r)}(k) &> \frac{1}{2} K'_1 N^r \sum_{k=N_1}^N q^{(r)}(k) = \\ &= \frac{1}{2} K'_1 N^r (r-1)! \left(\frac{1}{N_1(N_1+1) \cdots (N_1+r-1)} - \frac{1}{(N+1)(N+2) \cdots (N+r)} \right) \\ \frac{1}{N_1(N_1+1) \cdots (N_1+r-1)} &> \frac{K_5}{N^r} > \frac{K_5}{K_3^r N^r}, \quad \frac{1}{(N+1)(N+2) \cdots (N+r)} < \frac{1}{N^r} \end{aligned}$$

e K_5 è una costante più piccola di 1 tanto quanto voglio. Finalmente otteniamo

$$\sum_{k=N_1}^N t_k^{(r-1)} q^{(r)}(k) > \frac{1}{2} K_1^r (r-1)! \left(\frac{K_5}{K_3^r} - 1 \right) > K_6$$

da cui la non convergenza della serie e la contraddizione con le ipotesi.

La serie $\sum k^{-1-\alpha i}$ sappiamo essere divergente e chiaramente $kk^{-1-\alpha i}$ è limitato per cui se fosse sommabile Cr sarebbe convergente. La divergenza della serie è standard. Sia $m_p = [e^{\frac{1}{\alpha}(\frac{\pi}{4}+2\pi p)}] + 1$, $n_p = [e^{\frac{1}{\alpha}(\frac{3\pi}{4}+2\pi p)}]$. Abbiamo

$$\sum_{m_p}^{n_p} \frac{\sin(\alpha \ln k)}{k} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{m_p}^{n_p} \frac{1}{k} \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{n_p}{m_p} \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\pi}{2}$$

da cui la non convergenza. Ciò basta per la non convergenza della serie $\sum k^{-1-i\alpha}$

190.8.2 $\sum a_k$ è sommabile Cr se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^r} \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k \binom{r+n-k}{r}}_{\doteq A_n^{(r)}}$ e $\sum b_k$ è sommabile Cs

se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^s} \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k \binom{s+n-k}{s-1}}_{A_n^{(s)}}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N A_n^{(r)} \sum_{p=1}^Q A_p^{(s)} &= \sum_{j=2}^{N+Q} \sum_{n=\max\{1, j-Q\}}^{\min\{N, j-1\}} A_n^{(r)} A_{j-n}^{(s)} = \\
 &= \sum_{j=2}^{N+Q} \sum_{n=\max\{1, j-Q\}}^{\min\{N, j-1\}} \sum_{k=1}^n a_k \binom{r+n-k}{r} \sum_{q=1}^{j-n} b_q \binom{s+j-n-q}{s} = (N=Q=+\infty) \quad (*) \\
 &= \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{j-1} \sum_{k=1}^n a_k \binom{r+n-k}{r} \sum_{q=1}^{j-n} b_q \binom{s+j-n-q}{s} = \\
 &= \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{n=k}^{j-1} \sum_{q=1}^{j-n} a_k b_q \binom{r+n-k}{r} \binom{s-1+j-n-q}{s} = \\
 &= \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{q=1}^{j-k} a_k b_q \sum_{n=k}^{j-k} \binom{r+n-k}{r} \binom{s+j-n-q}{s} = \\
 &= \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{q=1}^{j-k} a_k b_q \binom{r+s+1+j-k-q}{r+s+1}
 \end{aligned}$$

Sia ora data la successione $\{c_{n+1}\}$ con $c_{n+1} = a_1 b_n + \dots + a_n b_1$. La serie $\sum c_k$ è $C(r+s+1)$ sommabile se esiste il limite

$$\begin{aligned}
 \frac{C_n^{(r+s+1)}}{n^{r+s+1}} &= \\
 \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_{k=2}^n c_k \binom{r+s+1+n-k}{r+s+1} &= \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} a_j b_{k-j} \binom{r+s+1+n-k}{r+s+1} = \\
 &= \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-j} a_j b_q \binom{r+s+1+n-q-j}{r+s+1} = \\
 &= \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=j}^{n-q} \binom{r+l-j}{r} \sum_{q=1}^{n-j} \binom{s+n-l-q}{s} a_j b_q = \\
 &= \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=1}^l \binom{r+l-j}{r} \sum_{q=1}^{n-l} \binom{s+n-l-q}{s} a_j b_q \text{ (come la (*))} = \\
 &= \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_{l=1}^{n-1} A_l^{(r)} B_{n-l}^{(s)} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{A_l^{(r)}}{n^r} \frac{B_{n-l}^{(s)}}{n^s} \rightarrow AB
 \end{aligned}$$

- Sia $\rho = r - \delta$, $\sigma = s - \delta$ con δ positivo e piccolo. $a_m = (-1)^m (m+1)^\rho$ $b_n = (-1)^n (n+1)^\sigma$

191.8.2 La dimostrazione è presa da [T] pag.233 e si riferisce al caso di una serie reale con $0 \leq x < 1$. Si utilizza il Lemma per cui se per $x \rightarrow 1^-$ si ha $f(x) = o(1)$ e $f''(x) = O(1/(1-x)^2)$, allora $f'(x) = o(1/(1-x))$ (vedi esercizio **83.8** sugli integrali).

Dimostrazione del teorema di Littlewood Possiamo supporre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \underbrace{=}_{a_n = O(1/n)} O\left(\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)x^{n-2}\right) = O(1/(1-x)^2))$$

e quindi $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = o(1/(1-x))$. Ora supponiamo che $|a_n n| \leq c$ Ne segue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{n a_n}{c}\right) x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{f'(x)}{x} \sim \frac{1}{1-x}$$

I coefficienti $1 - \frac{n a_n}{c}$ sono positivi e quindi $\sum_{n=1}^k \left(1 - \frac{n a_n}{c}\right) \sim k$ e quindi $w_k \doteq \sum_{n=1}^k n a_n \sim o(k)$.

Poniamo ora $w_0 = 0$ e scriviamo

$$\begin{aligned} f(x) - a_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)} \right) = \\ &= (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{w_n}{n+1}}_{o(1)} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w_n x^n}{n(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w_n x^n}{n(n+1)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -a_0 \end{aligned}$$

e siccome $w_n/(n(n+1)) = o(1/n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} = -a_0$ (dal teorema di Tauber dimostrato da Tauber).

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{w_n}{n} - \frac{w_n}{n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{w_n - w_{n-1}}{n} \right) - \frac{w_N}{N+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n$$

e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -a_0$ da cui $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$ e ciò conclude la dimostrazione.

192.8.2 • rich.44 ci dice che se $b_k > 0$ e $c_k > 0$, $\sum b_k = \sum c_k = +\infty$, allora

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_0 s_0 + \dots + b_n s_n}{b_0 + \dots + b_n} = s$ implica $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_0 s_0 + \dots + c_n s_n}{c_0 + \dots + c_n} = s$ se è verificata $\frac{c_n}{b_n} > \frac{c_{n+1}}{b_{n+1}}$.

Nel nostro caso $\{c_k\}$ è $\{m_k\}$ e $\{b_k\}$ è $\{\mu_k\}$. Ad esempio se $\{m_k\} = \{1/k\}$ e $\{\mu_k\}$ è $\{1\}$ allora se è $C1$ sommabile, è $R(1, 1/n)$ sommabile.

••• Facciamo vedere che $(1, -1, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots)$ è $R(1, 1/n)$ sommabile. Prendiamo $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1/2$, $\mu_4 = 1/3$, etc. Abbiamo

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = \dots = S_7 = 1, S_8 = \dots = S_{15} = 0, S_{16} = \dots = S_{17} = 1, S_{32} = \dots = S_{63} = 0 \dots$$

$$\frac{1}{\lambda_{2^{N+1}+1}} \sum_{k=1}^{2^{N+1}} \mu_{k+1} S_k = \frac{1}{\lambda_{2^{N+1}+1}} \sum_{p=0}^{N+1} \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{\lambda_{2^{N+1}+1}} \sum_{p=0}^{N+1} \ln 2 \sim \frac{N}{N+1}$$

e quindi il limite esiste.

Applicazione Sia $f(n)$ monotona crescente, $f'(n) \searrow 0$ (Hardy le chiama *à croissance régulière*) e $\sum (f')^2(n)$ convergente Allora $\sum_{k=1}^n f'(k) e^{i\alpha f(k)} = \frac{e^{i\alpha f(n)}}{\alpha i} + K + o(1)$ (ad esempio G.H.Hardy, “Theorems connected with MacLaurin’s test for the convergence of series”, Proceeding of London Math.Soc. vol.s2–9, Issue 1, 1911, pp.126–144) La condizione che sia $R(1, \mu_n)$ sommabile è che esista il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \mu_{k+1} e^{i\alpha f(k)} \right) / \lambda_{n+1}$. Come caso particolare possiamo prendere $\mu_k = f'(k)$ ed in tal caso il limite vale zero.

193.8.2 • La condizione $S_n e^{-\lambda_n x} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ non c’è nel teorema di Frobenius in quanto è gratis. Infatti se $\sum a_k$ converge $C1$ allora $S_n/n \rightarrow 0$. Se invece converge $R(1, \mu_n)$ allora $S_n = (\varepsilon_{n+1} \lambda_{n+1} - \varepsilon_n \lambda_n) / \mu_{n+1}$ con $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} \rightarrow 0$. La condizione $S_n e^{-\lambda_n x} \rightarrow 0$ è certamente soddisfatta se λ_n / μ_n cresce più lentamente di ogni potenza di $e^{\lambda_n x}$. Se $\mu_n = 1$, e $\lambda_n = n$, è certamente vera ma non è vera se $\mu_n = 1/n$, $\lambda_n = \ln n$. La relazione $S_n = (\varepsilon_{n+1} \lambda_{n+1} - \varepsilon_n \lambda_n) / \mu_{n+1}$ segue da $\frac{\mu_2 S_1 + \mu_3 S_2 + \dots + \mu_{n+1} S_n}{\lambda_{n+1}}$ da cui

$$s + o_n(1) = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{\mu_2 S_1 + \mu_3 S_2 + \dots + \mu_{n+1} S_{n-1}}{\lambda_n} + \frac{S_n \mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (s + o_{n-1}(1)) + \frac{S_n \mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}}$$

da cui la tesi.

Torniamo ora all’inizio. Da rich.11 abbiamo

$$\sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (e^{-\lambda_k x} - e^{-\lambda_{k+1} x}) + S_n e^{-\lambda_n x}$$

dove

$$Q(e^{-\lambda_k x}) \doteq e^{-\lambda_k x} - e^{-\lambda_{k+1} x} \underbrace{=}_{\lambda_k < \xi < \lambda_{k+1}} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) x e^{-\xi} \leq \mu_{k+1} x e^{-\lambda_k x}$$

Ora

$$\underbrace{\frac{\mu_2 S_1 + \dots + \mu_n S_{n-1}}{\lambda_n}}_{\rightarrow s} \underbrace{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}}_{\rightarrow 1} + S_n \frac{\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \rightarrow s$$

per cui $S_n \mu_{n+1} / \lambda_{n+1} \rightarrow 0$.

$$S_n e^{-\lambda_n x} \leq \frac{S_n \mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \iff e^{-\lambda_n x} \leq \frac{\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \underbrace{\leq}_{\mu_n \geq 0 \text{ e } \{\mu_n\} \text{ decrescente}} \frac{\mu_n}{\lambda_n}$$

Il massimo di te^{-tx} capita per $t = 1/x$ e vale $1/(xe)$. D'altra parte $t = \lambda_n \rightarrow +\infty$ per cui λ_n appartiene alla regione dove te^{-tx} decresce e quindi $\lambda_n e^{-\lambda_n x} \leq \mu_n e^{-\mu_n x} \leq \mu_n$. Ne segue $S_n e^{-\lambda_n x} \rightarrow 0$. Ne consegue

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} &= \sum_{k=1}^{+\infty} S_k Q(e^{-\lambda_k x}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{k+1} S_k \frac{Q(e^{-\lambda_k x})}{\mu_{k+1}} \underbrace{=}_{\text{rich.11}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mu_{k+1} S_k \frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \mu_{j+1} S_j Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \mu_{k+1} S_k \frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}} \sim \lambda_{n+1} s \frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}} \leq \lambda_{n+1} s \frac{x \mu_{n+1} e^{-\lambda_n x}}{\mu_{n+1}} = x(\lambda_n + \mu_{n+1}) e^{-\lambda_n x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

cosicché

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k+1} \sum_{j=1}^k \mu_{j+1} S_j Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k+1} (s + \varepsilon_k) Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) \\ Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) &= Q\left(\frac{e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}}{\mu_{n+1}}\right) = \frac{e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}}{\mu_{n+1}} - \frac{e^{-\lambda_{n+1} x} - e^{-\lambda_{n+2} x}}{\mu_{n+2}} = \\ &= e^{-\lambda_{n+1} x} \left[\frac{e^{-\mu_{n+1} x} - 1}{\mu_{n+1}} - \frac{1 - e^{-\mu_{n+2} x}}{\mu_{n+2}} \right] \geq 0 \iff \left\{ \alpha \geq \beta \geq 0 \implies \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} \geq \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \right\} (!) \end{aligned}$$

che è vera essendo il lato sinistro maggiore o uguale a 1 e il lato destro minore o uguale a 1.

Prendiamo ora $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = 0 \dots = 0, S_n = 1$. Abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k+1} Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) = e^{-\lambda_1 x} + \frac{\mu_1}{\mu_2} e^{-\lambda_1 x}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k+1} \sum_{j=1}^k \mu_{j+1} S_j Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) \iff \\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} - s e^{-\lambda_1 x} - \frac{\mu_1 s}{\mu_2} Q(e^{-\lambda_1 x}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k+1} \varepsilon_k Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} - s \right| &\leq |s| (1 - e^{-\lambda_1 x}) + \frac{\mu_1}{\mu_2} |s| Q(e^{-\lambda_1 x}) + \sum_{k=1}^N \lambda_{k+1} \varepsilon_k Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) + \\ &+ \delta_N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \lambda_{k+1} Q\left(\frac{Q(e^{-\lambda_n x})}{\mu_{n+1}}\right) \quad (\delta_N = \sup_{k \geq N+1} \varepsilon_k) \end{aligned}$$

L'ultima serie converge essendo essenzialmente (vedi (!)) $\sum_k \lambda_k e^{-\lambda_k x}$. Basta usare il criterio del rapporto per $x \neq 0$ e per $x = 0$ il termine generale della serie è zero. Gli altri termini vanno a zero se $x \rightarrow 0$ da cui il risultato.

Dimostrazione di $\bullet\bullet\bullet$. Sappiamo

$$\frac{\mu_2 S_1 + \mu_3 S_2 + \dots + \mu_{n+1} S_n}{\lambda_{n+1}} = S_n - \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_{n+1}}$$

per cui dobbiamo mostrare che $\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 0$. (!!)

Sia $t_k \doteq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ da cui

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k a_k}{\lambda_k} = \frac{t_n}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} t_k Q\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) \implies \sum_{k=1}^{n-1} t_k Q\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) = \underbrace{\frac{\mu_2 S_1 + \dots + \mu_{n+1} S_n}{\lambda_{n+1}}}_{\rightarrow s} - \frac{\mu_{n+1} t_n}{\lambda_n \lambda_{n+1}}$$

Per ipotesi $|ka_k| \leq K\nu_k$ da cui $|t_n| \leq K\lambda_n$ da cui $\frac{\mu_{n+1}t_n}{\lambda_n\lambda_{n+1}} \rightarrow 0$ e quindi $\sum_{k=1}^{n-1} t_k Q(\frac{1}{\lambda_k})$ converge.

Dobbiamo far vedere che questo implica (!!). Se è falsa, possiamo trovare N grande quanto vogliamo tale che $t_N > K\lambda_{N+1}$ (o $t_N < -K\lambda_{N+1}$) e possiamo supporre $K_1 < K$. Sia N_1 il più piccolo intero N_1 tale che

$$\lambda_{N_1+1} \geq \left(1 - \frac{K_1}{2K}\right) \lambda_{N+1} = K_2 \lambda_{N+1}$$

Inoltre abbiamo $\lambda_{N_1+1} < K_3 \lambda_{N+1}$ con K_3 una costante vicina a K_2 tanto quanto vogliamo. Se $N_1 \leq n \leq N$ si ha

$$|t_N - t_n| = |(n+1)a_{n+1} + (n+2)a_{n+2} + \dots + Na_N| \leq K(\mu_{n+1} + \dots + \mu_N) \leq K(\lambda_N - \lambda_{N_1}) < \\ < \overline{K}(\lambda_{N+1} - \lambda_{N_1+1}) < \overline{K}_1 \lambda_{N+1}/2$$

$\overline{K}$ e $\overline{K}_1$ vicine quanto vogliamo a K e K_1 . Quindi $t_n \geq T_N - |t_N - t_n| > K'_1 \lambda_{N+1}/2$ (anche K'_1 vicina quanto voglio a K_1). Dunque

$$\sum_{k=N_1}^N t_k Q(\frac{1}{\lambda_k}) > \frac{1}{2} K'_1 \lambda_{N+1} \left(\frac{1}{\lambda_{N_1}} - \frac{1}{\lambda_{N+1}} \right) > \frac{1}{2} K'_1 \left(\frac{1}{K_3} - 1 \right) \doteq K_4$$

un risultato incompatibile con la convergenza.

Caso particolare. $\mu_1 = 0$, $\mu_n = 1/(n-1)$, $n > 1$. Allora se $|\lambda_k a_k / \mu_k| < K$ ossia $|ka_k \ln n| < K$ e se $(S_1/1 + S_2/2 + \dots + S_n/n) / \ln n \rightarrow s$, $(R(1, 1/(n-1)))$ sommabile) la serie $\sum a_k$ è sommabile in senso classico.

Il Teorema di Frobenius in tal caso assume la forma

Se la serie $\sum a_k$ converge al valore s e $S_k k^{-x} \rightarrow 0$ per tutti valori positivi di x , allora $\sum a_k k^{-x}$ è convergente e tende a s per $x \rightarrow 0$.

194.8.2 Usiamo un risultato di Hardy: Se $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-kt}$ e $\text{Re } x > 0$ allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k n^{-x} =$

$\frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \varphi(t) t^{x-1} dt$ a patto che la serie a sinistra sia convergente. Poiché: 1) $x\Gamma(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$, 2) per ipotesi $\varphi(t)$ tende ad un limite (che chiamiamo $\rightarrow \varphi(0)$) per $t \rightarrow 0$,

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k n^{-x} = \frac{x}{x\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \varphi(t) t^{x-1} dt \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} x \varphi(t) t^{x-1} dt$$

basta far vedere che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} x \varphi(t) t^{x-1} dt \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \doteq \varphi(0)$$

La funzione $\varphi(t)$ è continua a $t = 0$ ed inoltre $\varphi(t) = O(e^{-t})$ per t grande. Sia $\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$ per cui $\psi(t) \rightarrow 0$. Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} x t^{x-1} \varphi(t) dt = \varphi(0) + \int_0^1 x t^{x-1} \psi(t) dt + \int_1^{+\infty} x t^{x-1} \varphi(t) dt$$

$$\left| \int_1^{+\infty} xt^{x-1} \varphi(t) dt \right| \leq Kx \int_1^{+\infty} e^{-t} dt \leq Kx \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Ora scegliamo δ così piccolo che $|\psi(t)| \leq \varepsilon$ per $0 \leq t \leq \delta$. Abbiamo

$$\left| \int_0^1 xt^{x-1} \psi(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_0^\delta xt^{x-1} dt + x \int_\delta^1 t^{x-1} |\psi(t)| dt = x\delta^x + x \int_\delta^1 t^{x-1} |\psi(t)| dt$$

ed il secondo integrale è minore di ε se x è abbastanza piccolo.

195.8.2

196.8.2 Ci servono alcuni risultati preliminari. Sia $\Delta b_n \doteq b_n - b_{n+1}$

(1)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) = e^{O(1/n)}, \quad \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \frac{b_{n+1}}{b_n} = e^{O(1/n)} e^{O(1/(n+1))}$$

$$\frac{b_{n+N}}{b_n} = e^{O(1/n) + O(1/(n+1)) + \dots + O(1/(n+N-1))} \implies \frac{b_{n+1}}{b_1} = e^{O(1/1) + O(1/2) + \dots + O(1/n)}$$

e quindi $\frac{b_{n+1}}{b_1} \leq e^{O(1/1) + O(1/2) + \dots + O(1/n)} \leq e^{C(1+1/2+\dots+1/n)} \leq C_1 n^C$ da cui $b_n = O(n^K)$

(2) Per numeri h, k tali che $0 < h < 1 < k < 2$ si ha $|b_n - b_m| \leq K|n - m||b_m|/m$ per $hm \leq n \leq km$.

Sia $m+1 \leq n \leq km$ Se $m = n$ è certamente vera.

$$\frac{b_n - b_m}{b_m} = \frac{b_n}{b_m} - 1 = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_{n-2}}{b_{n-3}} \dots \frac{b_{m+1}}{b_m} - 1 = e^{\overbrace{O\left(\frac{1}{n-1}\right) + O\left(\frac{1}{n-2}\right) + \dots + O\left(\frac{1}{m}\right)}^{P_{n,m}}} - 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(P_{n,m})^k}{k!} = P_{n,m} \left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(P_{n,m})^{k-1}}{k!} \right)$$

$$|P_{n,m}| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \ln \frac{n-1}{m-1} + o_n(1) + o_m(1)$$

$$0 \leq \ln \frac{n-1}{m-1} = \ln\left(1 + \frac{n-m}{m-1}\right) \leq \frac{n-m}{m-1} = \frac{n-m}{m} \frac{m}{m-1} \leq 2 \frac{n-m}{m} \implies \ln \frac{n-1}{m-1} = O\left(\frac{n-m}{m}\right)$$

e $O\left(\frac{n-m}{m}\right) = O(1)$ da $\frac{n-1}{m-1} \leq \frac{km-1}{m-1} \leq 2k$ se $m \geq 3$. Inoltre $o_n(1) = O\left(\frac{n-m}{m}\right)$, $o_m(1) =$

$O\left(\frac{n-m}{m}\right)$. Ne segue $O\left(\frac{n-m}{m}\right) = O(1)$ e quindi $\left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(P_{n,m})^{k-1}}{k!}\right) = O(1)$ e quindi $P_{n,m} =$

$O\left(\frac{n-m}{m}\right)$. Finalmente segue che $\frac{b_n - b_m}{b_m} = O\left(\frac{n-m}{m}\right)$ da cui il risultato.

Sia $hm \leq n \leq m$. Si ha lo stesso risultato.

(3) Esiste una costante c tale che $b_{m+r} = b_m(1 + \eta_r)$, $|\eta_r| < 1/2$, $|r| \leq cm$

Da 2) abbiamo $1 - \frac{Kr}{m} \leq \frac{b_{r+m}}{b_m} \leq 1 + \frac{Kr}{m}$ con $hm \leq m+r \leq km$ ossia e imponiamo $h \leq 1 + r/m \leq k$ e imponiamo $h \leq 1 - cm/m \leq 1 + cm/m \leq k$ ossia $h \leq 1 - c < 1 + c \leq k$.

Otteniamo $1 - Kc \leq \frac{b_{r+m}}{b_m} \leq 1 + Kc$ e quindi $Kc \leq 1/2$.

$$(4) \quad |b_n/b_m| \leq K(n/m)^K, \quad n \geq m, \quad |b_m/b_n| \leq K(m/n)^K, \quad m \geq n. \text{ È ormai facile ottenerla.}$$

$$(5) \quad \text{Se } t < 1 \text{ si ha } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|e^{-tk^2} \leq K/t$$

Il massimo di xe^{-tx^2} si trova a $x = 1/\sqrt{2t}$ e vale $1/\sqrt{e2t} \in [N, N+1]$. Scriviamo quindi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|e^{-tk^2} \leq \int_{-\infty}^N xe^{-tx^2} dx + \int_N^{N+1} xe^{-tx^2} dx + \int_{N+1}^{+\infty} xe^{-tx^2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2et}} + \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-tx^2} dx \leq K/t$$

Ora utilizziamo i 5 risultati preliminari per procedere alla dimostrazione che $na_n \rightarrow 0$.

Sia η una quantità minore di $1/2$ non sempre la stessa. Da 3) abbiamo $a_{n+r} = a_n(1+\eta)$, $r \leq cn$. Quindi

$$s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+r} = a_n(1+\eta) + \dots + a_n(1+\eta) = ra_n(1+\eta)$$

$$\sigma_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{p=1}^r s_{n+p} = \sum_{p=1}^r (s_n + ra_n(1+\eta)) = rs_n + \frac{1}{2}r(r+1)a_n(1+\eta)$$

Prendendo $r = \alpha n$ con $c/8 < \alpha \leq c$ otteniamo

$$\frac{\sigma_{n+r} - \sigma_n}{n} = \alpha s_n + \frac{1}{2}\alpha(\alpha n + 1)a_n(1+\eta)$$

La $C1$ sommabilità di $\sum a_k$ implica

$$\sigma_{n+r} = (n+r)(s + o(1)) = (1+\alpha)n(1+o(1)), \quad \sigma_{n+r} - \sigma_n = n\alpha s + no(1)$$

da cui

$$\alpha s + o(1) = \alpha s_n + \frac{1}{2}\alpha(\alpha n + 1)a_n(1+\eta) \iff s - s_n = una_n + o(1), \quad u = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{n})(1+\eta)$$

Sia ora α_1 tale che $\alpha_1 n = [cn]$ e quindi $w_1 = |u_1| \geq \frac{1}{2} \frac{1 + [cn]}{n} \frac{1}{2} > c/4$.

Sia poi α_2 tale che $1 + \alpha_2 n = [cn/4]$. Abbiamo $w_2 = |u_2| \leq \frac{1}{2} \frac{1 + [cn/4]}{n} \frac{1}{2} < \frac{3c}{16}$. Ora $s - s_n = u_1 na_n$ e $s - s_n = u_2 na_n$ ci danno $na_n(u_1 - u_2) = o(1)$ e $|u_1 - u_2| \geq w_1 - w_2 > \frac{c}{4} - \frac{3c}{16} = \frac{c}{16}$. Ma allora $na_n \rightarrow 0$. La $C1$ sommabilità e $na_n \rightarrow 0$ implicano che $\sum a_k$ converge grazie al noto teorema.

197.8.2

198.8.2 Nel seguito le costanti K sono indipendenti da r e m . O e o si riferiscono a $m \rightarrow +\infty$ ma non sono necessariamente indipendenti da r . La K coinvolta in O può dipendere da r . $\varepsilon_r \rightarrow 0$ per $r \rightarrow +\infty$ ed è indipendente da m . Sia $x = (r - \vartheta)/m$ con $0 \leq \vartheta \leq 1$. Le prime formule stabilite sono

$$(1) \quad ma_m = O(x^r f^{(r)}(x)), \quad (2) \quad O(ma_m) = x^r f^{(r)}(x)$$

per ogni r grande e uniformemente in ϑ . Scriviamo

$$\begin{aligned} (-x)^r f^{(r)}(x) &= x^r \sum n^r a_n e^{-nx} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \\ &= x^r \sum n^{r-1} ma_m e^{-nx} + x^r \sum_{n=1}^{hm} n^{r-1} (na_n - ma_m) e^{-nx} + x^r \sum_{n=hm}^{km} n^{r-1} (na_n - ma_m) e^{-nx} + \\ &+ x^r \sum_{n=km}^{+\infty} n^{r-1} (na_n - ma_m) e^{-nx} \quad 0 < h < 1 < k < 2, \quad h, k \text{ irrational} \end{aligned}$$

$S_1 = ma_m r!(1 + o(1))$ e dimostriamo che $|S_{2,4}| \leq \varepsilon_r r! |ma_m|$. Se definiamo $b_n = na_n$ abbiamo $\Delta b_n = O(b_n/n)$ e sono soddisfatti i Lemmi 1)–4) precedenti e quindi se α è un numero indipendente da m e r , basta far vedere che (usiamo il Lemma 2)

$$S'_2 = x^r \sum_{n=1}^{hm} n^{r-1} (m/n)^\alpha e^{-nx} < \varepsilon_r r!, \quad S'_4 = x^r \sum_{n=km}^{+\infty} n^{r-1} (n/m)^\alpha e^{-nx} < \varepsilon_r r!$$

dimodoché $|S_{2,4}| \leq \varepsilon_r r! |ma_m|$

Il massimo di $n^{r-1-\alpha} e^{-nx}$ capita a $n = (r-1-\alpha)/n = m(r-\alpha-1)/(r-\vartheta) = m(1+\varepsilon_r)$ con la scelta fatta prima di x . Tale valore, per r grande abbastanza è maggiore di hm e quindi la somma in S'_2 consta di un termine crescente. Ne segue

$$S'_2 < x^r hm (hm)^{r-1} (m/hm)^\alpha e^{-hmx} \Big|_{x=\frac{r-\vartheta}{m}} = (r-\vartheta)^r h^{r-\alpha} e^{-h(r-\vartheta)}$$

Poi scriviamo $(r-\vartheta)^r = (r-\vartheta)^{r-\vartheta} (r-\vartheta)^\vartheta$,

$$(r-\vartheta)^{r-\vartheta} \leq r^r \leq K_1 e^r r! r^{-1/2} \leq K_2 e^{r-\vartheta} r! r^{-1/2}$$

e quindi

$$S'_2 \leq 2e^{r-\vartheta} r! r^{-1/2} K_3 h^r e^{-h(r-\vartheta)} \leq K_4 r! e^{r \ln h + r(1-h)} < \varepsilon_r r!, \quad \ln h + 1 - h < 0$$

$$\begin{aligned} S'_4 &< x^r m^{-\alpha} \int_0^{+\infty} t^{r-1} t^\alpha e^{-tx} dt \leq \frac{(r-\vartheta)^r}{m^r} m^{-\alpha} \int_0^{+\infty} t^{r-1} t^\alpha e^{-t \frac{r-\vartheta}{m}} dt \leq \\ &\leq r^r \int_0^{+\infty} t^{r+\alpha-1} e^{-t(r-1)} dt = \frac{r^r \Gamma(r+\alpha)}{(r-1)^{r+\alpha}} \leq \frac{\Gamma(r+\alpha)}{r^\alpha} \leq \frac{\Gamma(r)}{r} \leq \varepsilon_r r! \end{aligned}$$

È rimansto da stimare $x^r \sum_{n=hm}^{km} n^{r-1} (na_n - ma_m) e^{-nx}$. Usiamo il Lemma 2 di nuovo $|na_n - ma_m| \leq K|n-m||a_m|$ e quindi

$$\begin{aligned} Kx^r |a_m| \sum_{n=hm}^{km} n^{r-1} |n-m| e^{-nx} &\leq Kx^r |a_m| \sum_{\nu=(h-1)m}^{(k-1)m} (\nu+m)^{r-1} |\nu| e^{-(m+\nu)(r-\vartheta)/m} = \\ &= Kx^r |a_m| m^{r-1} e^{-r+\vartheta} \sum_{\nu=0}^{(k-1)m} |\nu| \frac{(\nu+m)^{r-1}}{m^{r-1}} e^{-(r-1)\left(\frac{\nu}{m} - \ln(1+\frac{\nu}{m}) - \frac{(1-\vartheta)\nu}{m}\right)} \leq \\ &\leq Kx^r |a_m| m^{r-1} e^{-r} \sum_{\nu=0}^{(k-1)m} |\nu| e^{-(r-1)\left(\frac{\nu}{m} - \ln(1+\frac{\nu}{m}) - \frac{(1-\vartheta)\nu}{m}\right)} \leq \\ &\leq Kx^r |a_m| m^{r-1} e^{-r} \sum_{\nu=0}^{(k-1)m} |\nu| K e^{-(r-1)\left(\frac{\nu}{m} - \ln(1+\frac{\nu}{m}) - \frac{(1-\vartheta)\nu}{m}\right)} \leq \\ &\leq Kx^r |a_m| m^{r-1} e^{-r} \sum_{\nu=0}^{(k-1)m} K |\nu| e^{-(r-1)\left(\frac{\nu}{m} - \ln(1+\frac{\nu}{m})\right)} \leq \\ &\leq Kx^r |a_m| m^{r-1} e^{-r} \sum_{\nu=0}^{(k-1)m} |\nu| K e^{-K(r-1)\nu^2/m^2} \leq Kx^r |a_m| m^{r-1} e^{-r} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |\nu| K e^{-K(r-1)\nu^2/m^2} \leq \\ &\leq K \frac{(r-\vartheta)^r}{m^r} m^{r-1} |a_m| K \frac{m^2}{r-1} = m |a_m| \varepsilon_r r! \end{aligned}$$

Il risultato è che

$$|(-x)^r f^{(r)}(x) - r!(1 + o(1))ma_m| < \varepsilon_r r! |ma_m| \quad \text{per ogni } r \text{ grande abbastanza}$$

Sia $g(y) = \max_{n \leq y} |na_n|$. $g(\alpha y) = O(g(y))$ per ogni α dal risultato (4) precedente. Infatti se $\alpha \geq 1$,

detto $n_0 a_{n_0} = g(y)$ e $n_1 a_{n_1} = g(\alpha y)$, $n_1 \geq n_0$, si ha $\left| \frac{n_0 a_{n_0}}{n_1 a_{n_1}} \right| \leq \frac{n_{n_0}}{n_{n_1}} K \left| \frac{n_{n_0}}{n_{n_1}} \right|^K \leq K$ e lo stesso se $\alpha < 1$.

$$g(m) = m_0 a_{m_0} = O(ma_m), \iff \frac{m_0 a_{m_0}}{ma_m} \leq K$$

Ne segue

$$x^r f^{(r)}(x) = O(ma_m) = O(g(m)) = O(g((r-\vartheta)/x)) = O(g(1/x)) \text{ } x \text{ piccola a piacere per } m \text{ grande}$$

Supponiamo $g(y) \rightarrow +\infty$ per $y \rightarrow +\infty$. Dal Teorema.....abbiamo

$$x^r f^{(r)}(x) = O((g(1/x))^\varepsilon) = o(g(1/x))$$

da cui

$$x^r f^{(r)}(x) = |ma_m| = o(g(1/x)) = o(g(m/(r-\vartheta))) = o(g(m)) < \varepsilon g(m), \quad m > m_0$$

Quindi

$$g(m) = \max_{n \leq m} |na_n| \leq \max\{\max_{n \leq m_0} |na_n|, \varepsilon g(m)\} = \max\{O(1), \varepsilon g(m)\}$$

da cui

$$g(m) = o(g(m)) + O(1) \text{ impossibile se } g(y) \rightarrow +\infty \implies g(y) = O(1) \implies x^r f^{(r)}(x) = O(1)$$

e questo per $x \rightarrow 0$ e per ogni r grande abbastanza. Dal teorema..... si ha $x^r f^{(r)}(x) = o(1)$ per $r \geq 1$ e quindi finalmente $ma_m = O(x^r f^{(r)}(x)) = o(1)$. La convergenza della serie segue dal Teorema di Tauber.

199.8.2 • 1) Usiamo il criterio di Raabe Rich.6 per cui, se scriviamo la serie come $\sum a_n$, abbiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a+n}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{n} E(n)$ dove $E(n) \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi la serie converge se $b > a + 1$ e diverge se $b < a + 1$.

2) • Dal risultato precedente, se $b > a + 1$ la serie converge assolutamente. Facciamo vedere ora che la serie converge ma non assolutamente per $b > a$. Abbiamo $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{b-a}{n} E'(n)$ e

$$E'(n) \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty \text{ e quindi } a_{n+1} \leq a_n. \text{ Poi } \ln \frac{a_{n+1}}{a_1} = \sum_{k=1}^n \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = -(b-a) \sum_{k=1}^n \frac{E'(k)}{k}$$

da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_1} = -\infty$ e quindi $a_n \rightarrow 0$. Quanto trovato ci consente di applicare il criterio di Leibnitz e dire che per $b > a$ la serie converge.

200.8.2 1) • Per il criterio di Hadamard dovremmo calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{-1/n}$ per avere il raggio di convergenza. In base a Rich.10 possiamo calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ed osservare che esso fa 1 per cui il raggio di convergenza è 1. In base al risultato precedente possiamo dire che se $b > a + 1$ allora la serie converge pure per $z = 1$ e che se $b > a$ converge per $z = -1$.

201.8.2 Usare il Teorema di Abel Rich.10 più formule trigonometriche

202.8.2 La funzione $f(t)$ è crescente limitata e quindi ammette come limite l'estremo superiore nell'insieme $0 \leq t < 1$. Poiché $a_k \geq 0$ tale estremo superiore è $\sum a_k$.

• Se manca l'ipotesi $\sum a_k t_k \leq C$ per ogni $0 \leq t < 1$ ma $a_n \geq 0$ un controesempio è $a_k \equiv 1$. In tal caso l'estremo superiore di $\sum a_k t^k = +\infty$ che coincide con il limite per $t \rightarrow 1$.

• Se manca l'ipotesi $a_k \geq 0$ per ogni k ma $|\sum a_k t_k| \leq C$ per ogni $0 \leq t < 1$ un controesempio è $a_k \equiv (-1)^k$. Si ha $\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 + t}$ e chiaramente in modulo è maggiorata da 2 per ogni $0 \leq t < 1$ ma il limite $t \rightarrow 1^-$ non esiste

203.8.2 Sviluppiamo la funzione in serie con centro in un punto $z_0 = 1/2$ ossia $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z -$

$z_0)^k$. Per l'unicità delle serie di potenze si ha $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$ e quindi $c_k =$

$\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+k}{k} a_{j+k} z_0^j$. Supponiamo che la serie sia regolare in $z = 1$ ossia che esista la serie

$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - 1)^k$ e che il suo raggio di convergenza sia maggiore di zero. Ne segue che la serie

$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$ converge per $z = 2z_0 + \delta$ con $\delta > 0$ e quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z_0 + \delta)^k$ converge. Abbiamo

$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z_0 + \delta)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+k}{k} a_{j+k} z_0^j (z_0 + \delta)^k = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a_m z_0^{m-k} (z_0 + \delta)^k$ e quindi si

ottiene $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m (2z_0 + \delta)^m$ ma questo è impossibile in quanto vorrebbe dire che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$

converge per $x = 1 + \delta$. Il fatto che tutti gli a_k siano positivi si usa nel fatto che le serie sono a termini positivi e quindi assolutamente convergenti consentendo di riarrangiare i termini a piacimento.

204.8.2 Se $b = 0$ converge per ogni a positivo. Se $b \neq 0$ converge per $a > \frac{1}{2}$ e diverge

altrimenti. Se $b = 0$ e $a > 0$ si usa il teorema di Abel. Se $b \neq 0$ si scrive $\frac{\sin k}{k^a + b \sin k} -$

$\frac{\sin k}{k^a} = \frac{-\sin^2 k}{k^a(k^a + b \sin k)}$. Ora $\sum \frac{\sin k}{k^a}$ converge per il Teorema di Abel. $\sum \frac{-\sin^2 k}{k^a(k^a + b \sin k)}$

converge assolutamente se $a > \frac{1}{2}$ mentre per $a \leq \frac{1}{2}$ diverge e questo lo si vede scrivendo

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ e usando ancora una volta Abel.

205.8.2 Prendiamo l'insieme dei numeri irrazionali in $[0, 1]$ tali che esiste $C > 0$ tale che $|\vartheta - p/q| \geq C/q^2$ per ogni q e $p \leq q$. Si dimostra che il complementare ha misura nulla.

$|\sin(k\pi\vartheta)| = |\sin(k\pi\vartheta - m\pi + m\pi)| = |\sin \pi(k\vartheta - m)|$ e scegliamo m in modo che $-\pi/2 \leq \pi(k\vartheta - m) \leq \pi/2$. Otteniamo $|\sin \pi(k\vartheta - m)| \geq \frac{2}{\pi} k\pi \frac{C}{k^2} = \frac{2C}{k}$. Ne segue $\ln(2C) - \ln k \leq \ln |\sin(k\pi\vartheta)| \leq 0$ da cui la convergenza della serie $\sum x^k \ln |\sin(k\pi\vartheta)|$. Si è usato che se $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergono allora converge pure $\sum b_n$.

206.8.2 $\boxed{a \leq 0}$ abbiamo $k^{-a-\sin k} \geq k^{-\sin k} \not\rightarrow 0$ e quindi la serie non può convergere.

$\boxed{a = 1}$ Suddividiamo gli interi in gruppi di 4 ($\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7, 8\}$, etc.), in ogni gruppo

vi è un intero, diciamo k_j per cui $\sin k_j < 0$ e quindi $k_j^{-1-\sin k_j} \geq k_j^{-1}$ da cui la divergenza in quanto $\sum k^{-1-\sin k} \geq \sum_j (k_j)^{-1-\sin k_j} \geq \sum_{j=1}^{+\infty} (4j)^{-1}$. Se

$1 < a < 2$ Facciamo ricorso a una parte dell'esercizio 1.5*** e in particolare al fatto che la successione $\{k\omega\}$ è densa sul cerchio se $\frac{\omega}{\pi}$ è irrazionale (nel nostro caso $\omega = 1$). In tal caso, dato $\varepsilon > 0$, esistono due interi k_1 e k_2 tale che $\|k_1\omega - k_2\omega\| < \varepsilon$ ($\|\cdot\|$ è la distanza sul cerchio ossia $\|\alpha - \beta\| = \min_{k \in \mathbf{Z}} |\alpha - \beta - k\pi|$). Consideriamo allora la successione $\{j(k_1 - k_2)\}_{j=1}^{+\infty}$. Ad ogni passo essa si sposta di una quantità minore di ε sulla circonferenza e quindi, dopo un numero di passi pari a $N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{2\pi}{\|k_1 - k_2\|} \right\rceil + 1$, essa ha percorso una lunghezza pari almeno a 2π . Ciò vuol dire che se suddividiamo gli interi in gruppi di N_0 elementi, avremo infiniti interi j per cui $|\sin j(k_1 - k_2) + 1| < \varepsilon$ ossia $-1 - \varepsilon < \sin j(k_1 - k_2) < -1 + \varepsilon$. Sia A l'insieme degli interi j per cui è vera la precedente disuguaglianza. Otteniamo $\sum k^{-a-\sin k} \geq \sum_{j \in A} (j(k_1 - k_2))^{-a-\sin j(k_1 - k_2)} \geq$

$\sum_{j \in A} (j(k_1 - k_2))^{-a+1-\varepsilon} = +\infty$ in quanto ogni N_0 elementi almeno uno appartiene ad A .

$a > 2$ La serie converge in quanto $k^{-a-\sin k} \leq k^{-a+1}$ e $1 - a < -1$ da cui la convergenza.

Per quanto riguarda la seconda parte riporto la soluzione pubblicata dalla rivista ad opera del *Microsoft Research Problem Group* ⁽¹⁾. Sia

$$A_n = [0, 2^n) \cap \{k \in \mathbf{N} : |\sin k| < \frac{1}{n}\}, \quad B_n = [2^{n-1}, 2^n) \cap A_n$$

Chiaramente se $k \in A_n \setminus B_n$, allora $k \in A_{n-1}$. Infatti se $k \in A_n \setminus B_n$ allora $k \in [0, 2^{n-1})$ ed inoltre da $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$ ne segue che quel valore di k appartiene ad A_{n-1} . Ne segue che $|B_n| \geq |A_n| - |A_{n-1}|$. Inoltre se $k \in B_n$ allora $k^{-1-|\sin k|} > (2^n)^{-1-1/n} = 2^{-n-1}$. Ora stimiamo il numero di termini presenti in A_n . Dividiamo la circonferenza di raggio 1 in $7n$ archi di lunghezza uguale a $2\pi/(7n)$. Dei 2^n numeri e^{ik} , $0 \leq k < 2^n$, almeno $2^n/(7n)$ stanno nello stesso arco. Prendiamo due interi k_1 e k_2 nello stesso arco. Abbiamo

$$|\sin(k_1 - k_2)| \leq |e^{ik_1 - ik_2} - 1| = |e^{ik_1} - e^{ik_2}| < \frac{2\pi}{7n} < \frac{1}{n}$$

e quindi $k_1 - k_2 \in A_n$. Siccome $k = 0 \in A_n$, ne segue che tutti gli elementi k che stanno nell'arco prescelto, stanno pure in A_n e quindi $|A_n| > \frac{2^n}{7n}$. Sia ora N un intero. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2^N-1} k^{-1-|\sin k|} &= \sum_{n=2}^N \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} k^{-1-|\sin k|} \geq \sum_{n=2}^N \sum_{k \in B_n} k^{-1-|\sin k|} \geq \sum_{n=2}^N \frac{|B_n|}{2^{n+1}} \geq \\ &\geq \sum_{n=2}^N \frac{|A_n| - |A_{n-1}|}{2^{n+1}} = \sum_{n=2}^N \left(\left(\frac{|A_n|}{2^{n+2}} - \frac{|A_{n-1}|}{2^{n+1}} \right) + \frac{|A_n|}{2^{n+2}} \right) = \\ &= \frac{|A_N|}{2^{N+2}} - \frac{|A_1|}{8} + \sum_{n=2}^N \frac{|A_n|}{2^{n+2}} \geq -\frac{|A_1|}{8} + \sum_{n=2}^N \frac{2^n}{7n2^{n+2}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

207.8.2 Riporto la soluzione pubblicata dalla rivista nel numero 115-4 pagina 468 ad opera di Richard Stong.

⁽¹⁾ Ma perché non si legge mai *Fiat Research Problem Group* o *Pirelli Research Problem Group*?

Se $\alpha \geq \beta$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + (k+1) \ln(k+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha + k \ln k}$$

che chiaramente diverge. Sia allora $\beta > \alpha \geq 0$. Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + (k+1) \ln(k+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{\beta - \alpha} \left[\prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + k \ln k} - \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + k \ln k} \right]$$

e quindi (somme telescopiche)

$$\sum_{n=1}^{N-1} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + (k+1) \ln(k+1)} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\beta}{\beta - \alpha} \prod_{k=1}^N \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + k \ln k}$$

Ora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + k \ln k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta + k \ln k} \right) = 0$$

in quanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta + k \ln k} = +\infty$. Ne segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \ln k}{\beta + (k+1) \ln(k+1)} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha}$$

208.8.2 Riporto la soluzione pubblicata dalla rivista nel numero 117–9 pagina 834 ad opera di Hongwei Chen. Si veda anche <http://www.cip.ifi.lmu.de/grinberg/11409.pdf>.

Sia $\omega_k = k \ln k$. La serie è $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ dove

$$a_n = \omega_n \prod_{k=2}^n \frac{\alpha + \omega_k}{\beta + \omega_{k+1}} = b_n \prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \omega_k} \right), \quad b_k = \frac{\omega_k(\alpha + \omega_2)}{\beta + \omega_{k+1}}$$

Si dimostra che la serie è Leibnitz. Primo passo $a_{n+1} \leq a_n$ almeno asintoticamente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\omega_{n+1}(\alpha + \omega_{n+1})}{\omega_n(\beta + \omega_{n+2})} < 1 \iff \omega_{n+1}\alpha + (\omega_{n+1}^2 - \omega_n\omega_{n+2}) < \beta\omega_n$$

Risulta che $\omega_{n+1}^2 - \omega_n\omega_{n+2} = \ln^2 n + \ln n + 1 + o(1)$ ed essendo $\omega_n \sim \omega_{n+1} = n \ln n$ oltre a $\beta > \alpha$, si ha $a_{n+1} < a_n$.

Il secondo passo è $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e bisogna far vedere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \omega_k} \right) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[b_n \prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \omega_k} \right) \right] = -\infty$$

Poiché $b_n \rightarrow 1$, basta dimostrare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[\prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \omega_k} \right) \right] = -\infty \iff \sum_{k=3}^n \frac{\beta - \alpha}{\beta + \omega_k} = +\infty$$

Chiaramente è vero.

209.8.2 Riporto la soluzione pubblicata e dovuta a O. P. Lossers, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands.

a) I termini

$$P_n \doteq \prod_{k=2}^n \frac{\alpha + (-1)^k \cdot k \cdot \ln k}{\beta + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot \ln(k+1)}$$

$$Q_n \doteq (n+1) \ln(n+1) \prod_{k=2}^n \frac{\alpha + (-1)^k \cdot k \cdot \ln k}{\beta + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} \cdot (k+1) \cdot \ln(k+1)}$$

sono asintoticamente alternanti per cui basta far vedere che tendono a zero in modo monotono (almeno asintoticamente). Detta $x_n = n \ln n$, si ha

$$-\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = 1 - \frac{1 - (-1)^n(\alpha + \beta)}{x_n} + \left[\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right] (-1)^n(\alpha + \beta) + O(x_n^{-2})$$

asintoticamente possiamo scrivere $-\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = 1 - c_n$ con $c_n > (1 - |\alpha + \beta|)/(2x_n)$ e chiaramente $c_n \neq 0$ in quanto $|\alpha + \beta| < 1$. Il risultato è che $|Q_{n+1}| < |Q_n|$. Inoltre poiché $\sum x_n^{-1} = +\infty$, segue che $\prod_{k=1}^n (1 - c_k) \rightarrow 0$ ossia $Q_n \rightarrow 0$. Ne segue che la serie U , converge. La stessa cosa accade per la serie T .

b). Detto $p_k = (-1)^k \alpha + x_k$, $q_k = (-1)^{k+1} \beta + 1 + x_{k+1}$, se $\alpha + \beta = 0$, le somme $T + 2U$ sono scrivibili come

$$\sum_{n=2}^N (-1)^{n+1} (q_n + q_{n+1}) \prod_{k=2}^n \frac{p_k}{q_k} = \sum_{n=2}^N (-1)^{n+1} \left[\frac{\prod_{k=2}^n p_k}{\prod_{k=2}^{n-1} q_k} + \frac{\prod_{k=2}^{n+1} p_k}{\prod_{k=2}^n q_k} \right]$$

che è una somma telescopica che diventa

$$-p_2 + (-1)^{N+1} p_{N+1} \prod_{k=2}^N \frac{p_k}{q_k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -p_2 = -\alpha - 2 \ln 2$$

210.8.2 Sia a_m il termine generale della serie e

$$c_n = \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2} \quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} - \frac{2}{n \ln n (\ln \ln n)^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$d_n = \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)} \quad \frac{d_n}{d_{n-1}} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Per il criterio di condensazione di Cauchy, grazie alla monotonia la serie $\sum c_n$ converge o diverge con la serie

$$\sum 2^k c_{2^k} = \sum \frac{2^k}{2^k (k \ln 2) (\ln 2 + \ln k)^2} \leq \sum \frac{1}{(k \ln 2) (\ln 2 + \ln k)^2}$$

Applichiamo ancora lo stesso criterio all'ultima serie il cui termine generale è ancora monotono e otteniamo

$$\sum \frac{2^k}{2^k \ln 2 (\ln 2^k + \ln 2)^2} = \sum \frac{2^k}{2^k \ln 2 (k + 2 \ln 2)^2} < \sum \frac{1}{k^2 \ln 2} < +\infty$$

La stessa procedura applicata due volte a $\sum d_n$ determina la divergenza poiché

$$\sum 2^k d_{2^k} = \sum \frac{2^k}{2^k (k \ln 2) (\ln 2 + \ln k)}$$

e la serie diverge con $\sum \frac{2^k}{(2^k \ln 2)(k + 2 \ln 2)} = \sum \frac{1}{\ln 2(k + 2 \ln 2)}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(\ln n)^\gamma}{(\ln(n-1))^\gamma} \frac{\alpha + n \ln n}{\beta + (n+1) \ln(n+1)} \sim 1 - \frac{1}{n} + \frac{\alpha - \beta + \gamma - 1}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Se $\alpha - \beta + \gamma - 1 < -1$ ossia $\beta > \alpha + \gamma$, asintoticamente abbiamo $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{c_n}{c_{n-1}}$ e quindi la serie $\sum a_k$ converge per confronto

Se $\alpha - \beta + \gamma - 1 \geq -1$ ossia $\beta \leq \alpha + \gamma$, asintoticamente abbiamo $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{d_n}{d_{n-1}}$ e dal teorema del confronto la serie $\sum a_k$ diverge

211.8.2 Se non converge allora la successione delle somme parziali $\sum_{k=3}^n \frac{\sin \ln \ln k}{k \ln k}$ non è di

Cauchy e quindi $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \geq 0 \exists M > N, J > N : \sum_{k=M}^J \frac{\sin \ln \ln k}{k \ln k} > \varepsilon$. Prendiamo

$$x_q = e^{e\left(\frac{\pi}{6} + 2q\pi\right)} \text{ e } y_q = e^{e\left(\frac{5\pi}{6} + 2q\pi\right)}$$

$$\sum_{k=[x_q]+1}^{[y_q]} \frac{\sin \ln \ln k}{k \ln k} > \frac{1}{2} \sum_{k=[x_q]}^{[y_q]} \frac{1}{k \ln k} \sim \frac{1}{2} \ln \frac{\ln[y_q]}{\ln[x_q]} \sim \frac{1}{2} \frac{5}{6} \pi - \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3}$$

definitivamente in q e quest'ultima non è una quantità piccola. Un indizio della non convergenza lo si ha osservando che $\int_3^A \frac{\sin \ln \ln x}{x \ln x} = -\cos \ln \ln A + \cos \ln \ln 3$, non converge per $A \rightarrow +\infty$.

Si dimostri viceversa che $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\sin \ln k}{\ln k}$ converge

212.8.2

213.8.2 Sia $N_k = \{k: 2^{-k} \leq d_{n_k} < 2^{-k+1}\}$ e sia M_k il più grande dei $k \in N_k$. Dal fatto che $d_k \rightarrow +\infty$ segue che se $j \notin N_k$ allora $d_j < 2^{-k}$ oppure $d_j \geq 2^{-k+1}$. Si definisce $c_j = \frac{1}{M_k} \frac{1}{\sqrt{d_{M_k}}}$ per ogni $k \in N_k$. La successione $\{c_k\}$ è monotona decrescente in quanto $M_{k+1} \geq M_k$ e inoltre $d_{M_k} \leq d_{M_{k+1}}$. La serie $\sum c_k$ converge in quanto $\sum c_k = \sum_k \sum_{j \in N_k} c_j \leq \sum_k \frac{1}{\sqrt{d_{M_k}}} \leq \sum_k 2^{-k/2}$.

Inoltre $M_k c_{M_k} d_{M_k} = \sqrt{d_{M_k}}$ che tende all'infinito per $k \rightarrow +\infty$

214.8.2 $c_k = \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2} \ln 2}$ per $2^{n^2} < k \leq 2^{(n+1)^2}$ al variare di n .

$\sum_k c_k = \sum_n \sum_{k: 2^{n^2} < k \leq 2^{(n+1)^2}} \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2} \ln 2} < K \sum_n \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$. Per $k_n = 2^{(n+1)^2}$ si ha $k_n a_{k_n} \ln k_n = 1$

215.8.2 $n - m \geq 1$ implica che $a_k \leq k^{-2}$ e quindi la serie converge. Per la somma si scriva $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ e si utilizzino le serie telescopiche. Il risultato è $\frac{m!}{(n-m)n!}$

216.8.2 Si scriva $\frac{a_k}{(1+a_1)\dots(1+a_k)} = \frac{1+a_k}{(1+a_1)\dots(1+a_k)} - \frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_k)}$ per cui $\sum_{k=1}^N a_k = \sum_{k=1}^N (b_{k-1} - b_k)$ dove $b_k = \frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_k)}$ e $b_0 = 1$. Ne segue che $\sum_{k=1}^N a_k = 1 - b_N = 1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^N (1+a_k)}$ e quindi se $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1+a_k) = S$ allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1 - e^{-S}$ (si intende 1 se $S = +\infty$)

217.8.2 Sia $\lambda = p/q$. Ogni volta che $n = Nq$ il denominatore vale a e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{a + n^\beta \sin^2(n\pi\lambda)} \geq \frac{1}{a} \sum_{N=1}^{+\infty} (Nq)^{\alpha-1} = +\infty. \text{ Sia ora } \lambda \text{ algebrico di ordine } m > 1 \text{ ossia}$$

esiste un numero intero positivo M tale che $|\lambda - \frac{p}{q}| > \frac{1}{Mq^m}$ per ogni coppia $p, q > 0$ di numeri interi. Abbiamo $|\sin n\pi\lambda| = |\sin(n\pi(\lambda - \frac{p}{n}) + n\pi\frac{p}{n})| = |\sin n\pi(\lambda - \frac{p}{n})|$. Possiamo prendere p in modo tale che $-\frac{\pi}{2} \leq n\pi(\lambda - \frac{p}{n}) \leq \frac{\pi}{2}$ ossia $\lambda n - \frac{1}{2} \leq p \leq \lambda n + \frac{1}{2}$ ed usare $|\sin x| \geq \frac{\pi}{2}|x|$ per $0 \leq |x| \leq \pi/2$ per avere $|\sin n\pi\lambda| \geq n\pi \frac{\pi}{2} \frac{1}{Mn^m} = \frac{\pi^2}{2M} n^{1-m}$. Ne segue che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{a + n^\beta \sin^2(n\pi\lambda)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1} \frac{4M^2}{\pi^4} n^{-\beta+2m-2} \text{ che converge per } \beta > \alpha + 2m - 2$$

È noto che esistono numeri irrazionali per i quali, per ogni $n > 0$ esiste un numero razionale p_n/q_n tale che $|\lambda - p_n/q_n| \leq q_n^{-n}$ da cui $|\sin q_n\pi(\lambda - p_n/q_n)| \leq \frac{\pi}{q_n^{n-1}}$. Possiamo allora scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{a + n^\beta \sin^2(n\pi\lambda)} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q_n^{\alpha-1}}{a + q_n^\beta \sin^2(q_n\pi\lambda)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q_n^{\alpha-1}}{a + q_n^\beta \sin^2(q_n\pi(\lambda - \frac{p_n}{q_n}))} \geq C \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^{\alpha-1} = +\infty$$

218.8.2 2) Sia $S_n(x) \doteq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)m+1} + \dots + \frac{1}{km-1} - \frac{x}{km}$. $S_n(x) - S_n(y) = \frac{x-y}{m} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{m}$ e la serie diverge a meno che $x = y$. Per calcolare il valore di x che dà convergenza e poi la somma della serie osserviamo che $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma_n$ dove $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$ e γ è la costante di Eulero.

$$\begin{aligned} S_n(x) &\doteq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)m+1} + \dots + \frac{1}{km-1} + \frac{1}{km} - \frac{x}{km} - \frac{1}{km} = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)m+1} + \dots + \frac{1}{km-1} + \frac{1}{km} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{x}{km} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{km} = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \left\{ \sum_{j=1}^{km} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{(k-1)m} \frac{1}{j} \right\} - \sum_{k=1}^n \frac{x}{km} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{km} = \\ &= \ln m + \gamma_m + \sum_{k=2}^n ((\ln(km) - \ln((k-1)m) + \gamma_{km} - \gamma_{(k-1)m})) - \frac{x+1}{m} (\ln n + \gamma_n) \\ &= \ln m + \gamma_m + ((\ln(nm) - \ln m + \gamma_{nm} - \gamma_m)) - \frac{x+1}{m} (\ln n + \gamma_n) = \end{aligned}$$

$= \ln m + \gamma_m + \ln m - \ln m + \gamma_{nm} - \gamma_m - \frac{x+1}{m} \gamma_n + (1 - \frac{x+1}{m}) \ln n$
e nel limite $n \rightarrow +\infty$, prendendo $x = m - 1$, si ha il risultato $\ln m$

219.8.2 $2 \sum_{k=1}^r \frac{\sin(k^2 x) \sin kx}{k} = \sum_{k=1}^r \frac{\cos k(k-1)x - \cos k(k+1)x}{k} =$
 $= \sum_{k=1}^r \frac{\cos k(k-1)x}{k} - \frac{\cos k(k+1)x}{k+1} + \sum_{k=1}^r \frac{\cos k(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos k(k+1)x}{k} = 1 - \frac{\cos r(r+1)x}{r+1} +$
 $\sum_{k=1}^r \frac{\cos k(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos k(k+1)x}{k} = 1 - \frac{\cos r(r+1)x}{r+1} - \sum_{k=1}^r \frac{\cos k(k+1)x}{k(k+1)}$ e quindi la serie converge uniformemente.

• $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k^2 x) \sin kx}{k}$ si risolve come prima.

• $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2 x) \cos kx}{k}$ converge per alcuni punti e diverge per altri. Sia $x = \pi \frac{p}{q}$ con p e q primi fra

di loro. Riscriviamo la serie nel seguente modo $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{q-1} \frac{1}{qk-r} \sin((qk-r)^2 \pi \frac{p}{q}) \cos(qk-r) \pi \frac{p}{q} =$

$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{q-1} \frac{1}{qk-r} \sin(r^2 \pi \frac{p}{q}) \cos(\pi r \frac{p}{q} - \pi kp)$. Se p è dispari, quindi q pari, ciascuna delle $q-1$ serie è una serie di Leibnitz. Se p è pari la questione è più complicata. Ad esempio prendiamo $p = 2$ e

$q = 3$. Abbiamo $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{q-1} \frac{1}{3k-r} \sin r^2 \pi \frac{2}{3} \cos \pi r \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k-2})$ e quindi diverge.

• $\sum \cos(k^2 x)$. Sia $x = \pi \frac{p}{q}$ con p, q interi qualsiasi (tali punti sono densi sulla retta). Se $k = 2qN$ con N intero allora $\cos(k^2 x) = \cos(4qN^2 p \pi) = 1$ e quindi il termine generico della serie non tende a zero.

220.8.2 Studiamo il caso di $p = 2$. La serie converge. La possiamo scrivere come $\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{4k-3} +$

$\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{4}{k^2} + O(k^{-3})$ da cui la convergenza. Va detto che l'avere

raggruppato i vari termini della serie ed avere ottenuto una serie convergente non sempre è lecito. In altre parole la convergenza della serie raggruppata non sempre dà luogo alla convergenza della serie originaria. Si consideri infatti la serie $\sum (-)^k$ che chiaramente diverge. Viceversa la serie in cui raggruppo due termini vicini è la serie nulla e converge. La procedura giusta per sapere se un raggruppamento è efficace o no passa attraverso la proprietà di Cauchy $\forall \varepsilon \exists k_\varepsilon : p, q >$

$k_\varepsilon \Rightarrow |\sum_{k=p}^q a_k| < \varepsilon$ ed il punto essenziale è notare che ora si tratta di una somma finita in

cui si possono effettuare tutti i raggruppamenti che si vogliono. È superfluo sottolineare che $|\sum_{k=p}^q (-)^k| = 1$ e quindi la serie diverge.

221.8.2 La serie converge. Usiamo il criterio di Cauchy. Nella somma $\sum_{k=p}^q a_k$ scegliamo p e

q in modo tale che $\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=\frac{1}{2}n(n-1)+1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \left[\ln \frac{n(n+1)}{2} - \ln \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) + \gamma_{\frac{1}{2}n(n+1)} - \gamma_{\frac{1}{2}n(n-1)+1} \right]$.

$\ln \frac{n(n+1)}{2} - \ln \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) = \frac{2}{n} + O(n^{-2})$. $\gamma_k = \gamma + 1/(2k) + O(k^{-2})$ da cui si ha $\left| \sum_{n=n_0}^{n_1} \left((-)^n \frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right) \right| < \varepsilon$ per qualsiasi n_0 sufficientemente grande.

L'estensione al caso in cui p e q non consentono di scrivere $\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=\frac{1}{2}n(n-1)+1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \frac{1}{k}$ si ottiene facilmente. Ad esempio supponiamo che $\frac{1}{2}(n_0-1)n_0 < p < \frac{1}{2}n_0(n_0+1)$ e $\frac{1}{2}n_1(n_1+1) < q < \frac{1}{2}(n_1+1)(n_1+2)$

$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^{\frac{1}{2}n_0(n_0+1)-1} \frac{(-1)^{c_{n_0}}}{k} + \sum_{k=\frac{1}{2}n_1(n_1+1)+1}^q \frac{(-1)^{c_{n_1}}}{k} + \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=\frac{1}{2}n(n-1)+1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \frac{1}{k}$ dove c_{n_0} vale 1 se n_0 è dispari e -1 se pari (per c_{n_1} è l'opposto). È semplice verificare che ciascun termine tende a zero

222.8.2 Chiaramente la serie è data $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \sum_{j=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{1}{j}$ ed inoltre

$$\ln \frac{a_{k+1}+1}{a_k+1} = \int_{a_k+1}^{a_{k+1}+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{j=a_k+1}^{a_{k+1}} \frac{1}{j} \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dx}{x} = \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Il risultato segue facilmente.

223.8.2 Scegliamo p e q in modo che $\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n (\ln(2^{n+1}) - \ln(2^n + 1) + \gamma_{2^{n+1}} - \gamma_{2^n+1}) \sim \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \ln 2$ che chiaramente non può essere reso piccolo a piacere.

224.8.2 Sia $b_n \doteq \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$. Usando $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^2)$ dimostriamo che

asintoticamente $b_{n+1} \leq b_n$.

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2} \ln^2(n+1) + \frac{1}{2} \ln^2 n = \\
 &= \frac{\ln n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} (\ln n - \ln(n+1)) (\ln n + \ln(n+1)) = \\
 &= \frac{\ln n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \ln \frac{n}{n+1} (\ln n + \ln(n+1)) = \\
 &= \frac{\ln n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) (\ln n + \ln(n+1)) = \\
 &= \frac{\ln n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(\ln n + \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \\
 &= \frac{\ln n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(2 \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \\
 &= -\frac{\ln n}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < 0
 \end{aligned}$$

Poi facciamo vedere che b_n è limitata inferiormente. Sappiamo che

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln^2 2}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} \ln^2 n &\geq \frac{\ln^2 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx - \frac{1}{2} \ln^2 n = \frac{\ln^2 2}{2} + \frac{1}{2} \ln^2(n+1) - \frac{1}{2} \ln^2 3 - \\
 \frac{1}{2} \ln^2 n &\geq B \text{ per una opportuna costante } B. \text{ Quest'ultimo passo è evidenziato dal far vedere che} \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln^2(n+1) - \ln^2 n &= 0.
 \end{aligned}$$

225.8.2 Cambiamo variabile $u = xy$, $v = x$ e il dominio di integrazione diventa il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Bisogna inoltre notare che sul segmento di estremi $(0, 0)$ e $(0, 1)$ il cambio di variabili perde significato ma tale insieme ha misura nulla. Dunque l'integrale diventa $\int_0^1 du \int_u^1 dv \frac{1}{v} \left\{ \frac{1}{u} \right\} = - \int_0^1 du \ln u \left\{ \frac{1}{u} \right\}$. Ci servono i seguenti fatti $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \doteq$

$$\gamma_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} \ln^2 n \doteq B_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B \text{ (vedi \texttt{rich.16})}.$$

Per definizione di parte frazionaria si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{x} \right\} \ln x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\} \ln x dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{x} - k \right) \ln x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln x dx; \\
 \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{x} - k \right) \ln x dx &= \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} - k \left(x \ln x - x \right) \Big|_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) - \left(\ln \frac{1}{k} - 1 \right) + \\
 \frac{k}{k+1} \left(\ln \frac{1}{k+1} - 1 \right) &= \frac{1}{2} (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) + (\ln k) + 1 - \ln(k+1) - 1 + \frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{k+1}; \\
 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln x dx &= -\frac{1}{2} \ln^2 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2;
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{x} - k \right) \ln x dx &= \frac{1}{2} (\ln^2 2 - \ln^2 n) + \ln 2 - \ln n + \sum_{k=2}^n \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \\
 \sum_{k=2}^n \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) &= \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{\ln k}{k} + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{\ln k}{k} + \frac{1}{k} \right) - \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} \ln^2(n+1) + B_{n+1} + \\
 \ln(n+1) + \gamma_{n+1} - \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}
 \end{aligned}$$

Abbiamo che l'integrale è uguale al limite

$$\frac{1}{2}(\ln^2 2 - \ln^2 n) + \ln 2 - \ln n + \frac{1}{2} \ln^2(n+1) + B_{n+1} + \ln(n+1) + \gamma_{n+1} - \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2 2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

e il risultato segue facilmente dopo avere osservato che $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(n^{-3})$

226.8.2 Cambiando variabile $t = x/(a+x)$ ed integrando per parti si ha che l'integrale è Ia dove

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{(1-t)^2} dt \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} \int_{\varepsilon}^A \frac{\ln^2 t}{(1-t)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} \left(\frac{\ln^2 t}{1-t} - \ln^2 t \right) \Big|_{\varepsilon}^A - 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} \left(\frac{\ln^2 A}{1-A} - \frac{\ln^2 \varepsilon}{1-\varepsilon} - \ln^2 A + \ln^2 \varepsilon \right) = \\ &= \lim_{A \rightarrow 1} \frac{(A-1)^2 + o((A-1)^2)}{1-A} - \ln^2 A + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln^2 \varepsilon - \varepsilon \ln^2 \varepsilon + \ln^2 \varepsilon}{1-\varepsilon} = 0. \\ \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt &= \int_0^1 \ln t \sum_{k=0}^{\infty} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 t^k \ln t dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \Big|_0^1 - \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^k}{k+1} dt = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

da cui il risultato.

• Si trovi un passaggio non giustificato (baco) nella precedente dimostrazione.

Il baco è nel passaggio $\int_0^1 \ln t \sum_{k=0}^{\infty} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 t^k \ln t dt$ dal momento che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ non è uniformemente convergente per $0 \leq x < 1$ e quindi non si è autorizzati a scambiare serie con integrale grazie al teorema generale sulla uniforme convergenza delle serie di funzioni. Possiamo viceversa scrivere $\lim_{\delta \rightarrow 1} \int_0^{\delta} \ln t \sum_{k=0}^{\infty} t^k dt = \lim_{\delta \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\delta} t^k \ln t dt$ (qui lo scambio

è lecito in quanto l'integrale arriva fino a δ). Poi $\int_0^{\delta} t^k \ln t dt = \frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} \frac{t^k}{k+1} dt = \ln \delta \frac{\delta^{k+1}}{k+1} - \frac{\delta^{k+1}}{(k+1)^2}$. Poi osserviamo che $\frac{\delta^{k+1}}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$ e che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < +\infty$ e

quindi la funzione di $\delta \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^{k+1}}{(k+1)^2}$ è una funzione continua per ogni valore di δ . Si può quindi

passare al limite sotto il segno di serie ed avere $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$. Il secondo pezzo da trattare

è $\lim_{\delta \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \delta \frac{\delta^{k+1}}{(k+1)}$ e facciamo vedere che tende a zero. Abbiamo $0 < \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \delta \frac{\delta^{k+1}}{(k+1)} =$

$\delta^2 \ln \delta + \delta \ln \delta \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \delta \frac{\delta^{k+1}}{(k+1)} \leq \delta^2 \ln \delta + \delta \ln \delta \int_0^{+\infty} \frac{\delta^x}{x+1} dx$. Integrando per parti otteniamo

$\int_0^{+\infty} \frac{\delta^x}{x+1} dx = \frac{e^{x \ln \delta}}{\ln \delta (x+1)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\ln \delta} \int_0^{+\infty} \frac{e^{x \ln \delta}}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{\ln \delta} + \frac{1}{\ln \delta} \int_0^{+\infty} \frac{e^{x \ln \delta}}{(x+1)^2} dx$. Stimiamo $\int_0^{+\infty} \frac{e^{x \ln \delta}}{(x+1)^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = 1$ per cui $\delta^2 \ln \delta + \delta \ln \delta \int_0^{+\infty} \frac{\delta^x}{x+1} dx$ tende a zero quando $\delta \rightarrow 1^-$.

• $\int_0^\infty \left(\ln \frac{x}{x+1} + \ln \frac{x}{x+2} \right)^2 dx = \frac{11}{6} \pi^2 + 2(\ln 2)^2$. L'integrale è

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\ln \frac{x}{x+1} + \ln \frac{x}{x+2} \right)^2 dx = \\ &= \int_0^\infty \ln^2 \frac{x}{x+1} dx + \int_0^\infty \ln^2 \frac{x}{x+2} dx + 2 \int_0^\infty \ln \frac{x}{x+1} \ln \frac{x}{x+2} dx = \\ &= \int_0^\infty \ln^2 \frac{x}{x+1} dx + \int_0^\infty \ln^2 \frac{x}{x+2} dx + \\ &+ 2 \int_0^\infty \left(\ln^2 x - \ln(x+1) \ln x - \ln(x+2) \ln x + \ln(x+1) \ln(x+2) \right) dx \doteq I_1 + I_2 + 2I_3 \end{aligned}$$

Mostriamo che $I_1 \doteq \int_0^\infty \left(\ln \frac{x}{x+1} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$. Sostituendo $t = x/(1+x)$ ed integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{(1-t)^2} dt \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} \int_\varepsilon^A \frac{\ln^2 t}{(1-t)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} \left(\frac{\ln^2 t}{1-t} - \ln^2 t \right) \Big|_\varepsilon^A - 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} \left(\frac{\ln^2 t}{1-t} - \ln^2 t \right) \Big|_\varepsilon^A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow 1} \frac{\ln^2 A}{1-A} - \frac{\ln^2 \varepsilon}{1-\varepsilon} - \ln^2 A + \ln^2 \varepsilon = \\ &= \lim_{A \rightarrow 1} \frac{(A-1)^2 + o((A-1)^2)}{1-A} - \ln^2 A + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln^2 \varepsilon - \varepsilon \ln^2 \varepsilon + \ln^2 \varepsilon}{1-\varepsilon} = 0. \\ &\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = \int_0^1 \ln t \sum_{k=0}^\infty t^k dt = \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 t^k \ln t dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \Big|_0^1 - \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 \frac{t^k}{k+1} dt = \\ &= - \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

da cui I_1 .

Con la sostituzione $t = x/(x+2)$ abbiamo

$$I_2 = \int_0^\infty \left(\ln \frac{x}{x+2} \right)^2 dx = 2 \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{(1-t)^2} dt = 2 \frac{\pi^2}{3}$$

$$I_3 \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^A \left(\ln^2 x - \ln(x+1) \ln x - \ln(x+2) \ln x + \ln(x+1) \ln(x+2) \right) dx \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow \infty} J_3$$

e spezziamo J_3 come $J_3 = J_{3,1} + J_{3,2} + J_{3,3} + J_{3,4}$. Integrando due volte per parti si ha

$$\begin{aligned} J_{3,1} &= (x \ln x - x) \ln x \Big|_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{x \ln x - x}{x} dx = (x \ln x - x)(\ln x - 1) \Big|_\varepsilon^A + A - \varepsilon = \\ &= (A \ln A - A)(\ln A - 1) - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon)(\ln \varepsilon - 1) + A - \varepsilon \end{aligned}$$

Il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si può eseguire immediatamente avendone

$$J_{3,1} = A \ln^2 A - 2A \ln A + 2A.$$

$$\begin{aligned} (-1) \cdot J_{3,2} &= \int_{\varepsilon}^A \ln(x+1) \ln(x) dx = (x \ln x - x) \ln(x+1) \Big|_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A \frac{x \ln x - x}{x+1} dx = \\ &= \left((x \ln x - x) \ln(x+1) + x - \ln(x+1) - (x \ln x - x) \right) \Big|_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{\ln x}{x+1} dx \end{aligned}$$

Come prima il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si può eseguire ed ottenere (il seguente integrale converge per $x = 0$)

$$(-1) \cdot J_{3,2} = (A \ln A - A) \ln(A+1) + 2A - \ln(A+1) - A \ln A + \int_0^A \frac{\ln x}{x+1} dx$$

Con la sostituzione $x = 1/t$ otteniamo

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x+1} dx = \int_{1/A}^1 \frac{\ln t}{t+1} dt - \int_{1/A}^1 \frac{\ln t}{t} dt = \int_{1/A}^1 \frac{\ln t}{t+1} dt + \frac{1}{2} \ln^2 A$$

quindi (usare $\ln(1+x) = x + O(x^2)$)

$$(-1) \cdot J_{3,2} = A \ln^2 A - 2A \ln A + 2A - 1 + o(1) + \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx + \int_{1/A}^1 \frac{\ln t}{t+1} dt + \frac{1}{2} \ln^2 A$$

Sempre integrando per parti due volte arriviamo a

$$(-1) \cdot J_{3,3} = \int_{\varepsilon}^A \ln(x+2) \ln x dx = \left((x \ln x - x)(\ln(x+2) - 1) + x - 2 \ln(x+2) \right) \Big|_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{2 \ln x}{x+2} dx$$

Il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ e la sostituzione $x = 2t$ nell'integrale dà

$$\begin{aligned} (-1) \cdot J_{3,3} &= \int_{\varepsilon}^A \ln(x+2) \ln x dx = (A \ln A - A)(\ln(A+2) - 1) + A - 2 \ln(A+2) + \\ &+ 2 \ln 2 + 2 \int_0^{A/2} \frac{\ln 2}{x+1} dx + 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx + 2 \int_1^{A/2} \frac{\ln x}{x+1} dx \\ &\int_1^{A/2} \frac{\ln x}{x+1} dx = \int_{2/A}^1 \frac{\ln t}{t+1} dt + \frac{1}{2} \ln^2(A/2). \end{aligned}$$

Ne segue che, a meno di termini che vanno a zero quando $A \rightarrow +\infty$,

$$(-1) \cdot J_{3,3} = (A+1) \ln^2 A - 2A \ln A + 2A + 2 \ln 2 - 2 - (\ln 2)^2 + 4 \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx$$

L'ultimo termine da calcolare è

$$J_{3,4} = \int_{\varepsilon}^A \ln(x+1) \ln(x+2) dx = x \ln(x+1) \ln(x+2) \Big|_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A \left(x \frac{\ln(x+2)}{x+1} + x \frac{\ln(x+1)}{x+2} \right) dx$$

ed è uguale a

$$\begin{aligned}
 J_{3,4} &= x \ln(x+1) \ln(x+2) \Big|_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A \ln(x+2) dx - \int_{\varepsilon}^A \ln(x+1) dx + \\
 &+ \int_{\varepsilon}^A \left(\frac{\ln(x+2)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+2} \right) dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\ln(x+1)}{x+2} dx = \\
 &= (x+1) \ln(x+1) \ln(x+2) \Big|_{\varepsilon}^A - ((x+2) \ln(x+2) - (x+2)) \Big|_{\varepsilon}^A + \\
 &- ((x+1) \ln(x+1) - (x+1)) \Big|_{\varepsilon}^A + \int_{1+\varepsilon}^{1+A} \frac{\ln x}{1+x} dx
 \end{aligned}$$

ed eseguendo il limite $\varepsilon \rightarrow 0$, prendendo i termini dominanti per $A \rightarrow +\infty$, otteniamo

$$\begin{aligned}
 J_{3,4} &= (A+1) \ln(A+1) \ln(A+2) - (A+2) \ln(A+2) - (A+1) \ln(A+1) + 2A + \\
 &+ 2 \ln 2 + \int_{\frac{1}{1+A}}^1 \frac{\ln x}{1+x} dx - \int_{\frac{1}{1+A}}^1 \frac{\ln x}{x} dx = \\
 &= (A+1) \ln^2 A - 2A \ln A + 2A - 3 + 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln^2 A + \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx + o(1)
 \end{aligned}$$

Sommiamo ora i contributi $I_1 + I_2 + 2(J_{3,1} + J_{3,2} + J_{3,3} + J_{3,4})$ assumendo $Q \doteq \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (verrà provato alla fine).

$$I_1 + I_2 = \pi^2, \quad J_{3,1} + J_{3,2} = 1 - \frac{1}{2} \ln^2 A - 2Q, \quad J_{3,3} + J_{3,4} = (\ln 2)^2 - 3Q - 1 + \frac{1}{2} \ln^2 A$$

quindi

$$I_1 + I_2 + 2(J_{3,1} + J_{3,2} + J_{3,3} + J_{3,4}) = \pi^2 + \frac{5}{6} \pi^2 + 2(\ln 2)^2 = \frac{11}{6} \pi^2 + 2(\ln 2)^2$$

L'ultimo passo è valutare

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2k} \ln x dx + \frac{\pi^2}{6} = \\
 &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{\pi^2}{6} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 2 \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} (-2 + 1 + \frac{1}{2}) = -\frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

227.8.2 Scriviamo $\sum a_k^{\frac{k}{k+1}} = \sum a_k a_k^{-\frac{1}{k+1}}$. Per i valori di k (chiamiamo tale insieme A) per cui $a_k^{-\frac{1}{k+1}} < M$ e $M > 1$ allora possiamo maggiorare $\sum_{k \in A} a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq \sum_{k \in A} a_k M$. Se invece $a_k^{-\frac{1}{k+1}} > M$ allora $a_k \leq M^{-1-k}$ e quindi $\sum_{k \notin A} a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq \sum_{k \notin A} M^{-k}$ e quindi si ha convergenza.

Notare che è essenziale assumere $a_k > 0$.

• La convergenza di $\sum a_k^{\frac{\ln k}{\ln k+1}}$ è analoga. Scriviamo $\sum a_k a_k^{-\frac{1}{\ln k+1}}$ e dividiamo i k in due gruppi. Nel primo gruppo, detto A , ci sono quelli per cui $0 < a_k^{-\frac{1}{\ln k}} \leq M$ ed in questo caso abbiamo

$\sum_{k \in A} a_k^{\frac{\ln k}{\ln k+1}} \leq \sum_{k \in A} a_k M < +\infty$. Nel secondo gruppo ci sono quelli per cui $a_k^{-\frac{1}{\ln k}} > M$ ossia

$a_k < M^{-1-\ln k}$ ed in questo caso otteniamo $\sum_{k \notin A} a_k^{\frac{\ln k}{\ln k+1}} \leq \sum_{k \notin A} a_k \leq \sum_{k \notin A} M^{-1-\ln k} < +\infty$. Per

la convergenza di $\sum_{k \notin A} M^{-1-\ln k}$ scriviamo $\sum_{k \notin A} M^{-1-\ln k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} M^{-1-\ln k}$ e tale serie, avendo il

termine generale monotono, converge se e solo se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k M^{-1-\ln 2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{M^{k \ln 2}}$.

Ora se $M > e$ allora $M^{\ln 2} > 2$ e la serie converge. Quindi il valore di M , che nel caso precedente bastava fosse maggiore di 1, in questo caso deve essere maggiore di e .

• Se vogliamo un controesempio ossia $b_k \nearrow 1$ ma $\sum a_k^{b_k}$ divergente allora basta prendere

$a_k = \frac{1}{k \ln^2 k}$ e $b_k = \frac{\ln \ln k}{1 + \ln \ln k}$. Di nuovo la serie converge se e solo se converge $\sum 2^k (a_{2^k})^{b_{2^k}}$

ossia $\sum 2^{\frac{k}{1+\ln(2 \ln k)}} k^{-2 \frac{\ln(2 \ln k)}{1+\ln(2 \ln k)}} (\ln 2)^{-2 \frac{\ln(2 \ln k)}{1+\ln(2 \ln k)}}$ ed è facile vedere che il termine generale della

serie non tende a zero. Per applicare il criterio di Cauchy [\[rich.3\]](#), bisogna dimostrare che

$e^{-\frac{\ln(\ln(k))}{1+\ln(\ln(k))} k \ln^2 k}$ è decrescente ossia $e^{-\frac{\ln(\ln(k+1))}{1+\ln(\ln(k+1))} (k+1) \ln^2 (k+1)} \leq e^{-\frac{\ln(\ln(k))}{1+\ln(\ln(k))} k \ln^2 k}$. Per questo

sviluppiamo asintoticamente $\ln \ln(k+1) = \ln \ln(k) + O(\frac{1}{k \ln k})$, $\ln((k+1) \ln^2(k+1)) =$

$\ln(k \ln^2 k) + \frac{1}{k} + O(\frac{1}{k \ln k})$, $\frac{\ln(\ln(k+1))}{1+\ln(\ln(k+1))} = \frac{\ln(\ln k)}{1+\ln(\ln k)} \left(1 + O(\frac{1}{k \ln k \ln \ln k})\right)$. Mettendo

tutto assieme si ha $\frac{e^{-\frac{\ln(\ln(k+1))}{1+\ln(\ln(k+1))} (k+1) \ln^2 (k+1)}}{e^{-\frac{\ln(\ln(k))}{1+\ln(\ln(k))} k \ln^2 k}} = e^{-\frac{\ln(\ln(k))}{k(1+\ln(\ln(k)))} + O\left(\frac{\ln(\ln(k))}{(1+\ln(\ln(k))) k \ln k}\right)} < 1$

228.8.2 Basta ripetere il ragionamento del secondo punto dell'esercizio precedente.

229.8.2 Essendo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 \leq (\sum_{k=0}^{+\infty} a_k)^2 = A^2$ il range non può superare A^2 . Se si prende $a_0 = A$

e $a_k = 0$ per $k \geq 1$ si ottiene A^2 per cui l'estremo è raggiunto. Se poi prendiamo $a_k = \frac{A}{a^n} \frac{a-1}{a}$

otteniamo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = A$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 = A^2 \frac{a-1}{a+1}$ per cui la somma della serie può essere resa piccola

a piacere prendendo a prossimo a 1 ma ovviamente più grande di 1. Dunque il range dei valori di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2$ è $(0, A^2]$.

230.8.2 Applichiamo il Teorema di Abel [\[rich.11\]](#) e scriviamo $\sum_{k=m}^n a_k b_k = b_n \sqrt{n} \frac{A_n}{\sqrt{n}} -$

$b_m \sqrt{m} \frac{B_m}{\sqrt{m}} + \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ dove $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Per ipotesi $|\frac{A_k}{\sqrt{k}}| \leq A$ ed inoltre $\sqrt{k} b_k \rightarrow 0$ per

cui i primi due contributi tendono a zero. Maggioriamo il terzo come $\left| \sum_{k=m}^{n-1} \frac{A_k}{\sqrt{k}} \sqrt{k} (b_k - b_{k+1}) \right| \leq$

$\sup_{m \leq k \leq n-1} \left| \frac{A_k}{\sqrt{k}} \right| \cdot \left| \sum_{k=m}^{n-1} \sqrt{k} (b_k - b_{k+1}) \right| \leq A \varepsilon$ in quanto la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{k} (b_k - b_{k+1})$ converge. Il risultato è la convergenza della serie $\sum a_k b_k$

231.8.2 Sia $z = 1$ e quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k} = \sum_{r=1}^{+\infty} (-1)^r \left(\frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{(r+1)^2 - 1} \right)$. Infatti se $r^2 \leq k < (r+1)^2$ allora $[\sqrt{k}]$ è costante. Per la convergenza è necessario e sufficiente far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r_\varepsilon : q > p > r_\varepsilon \implies \left| \sum_{r=p}^q (-1)^r \left(\frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{(r+1)^2 - 1} \right) \right| < \varepsilon. \text{ Allora maggioria-}$$

mo e minoriamo $a_r \leq \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{(r+1)^2 - 1} \leq b_r$ dove $\sum (-1)^r a_r$ e $\sum (-1)^r b_r$ convergono per cui si ha il risultato. Le due successioni a_r e b_r possono essere trovate tramite il

confronto con gli integrali. $\int_{r^2}^{(r+1)^2} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{(r+1)^2 - 1} \leq \int_{r^2-1}^{(r+1)^2-1} \frac{dx}{x}$ e quindi

esistono due costanti positive C e C' per cui $\frac{C}{r} \leq \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{(r+1)^2 - 1} \leq \frac{C'}{r}$. Dalla convergenza della serie $\sum (-1)^r/r$, segue la convergenza di $\sum (-1)^{[\sqrt{k}]} / k$. Sia ora $z = e^{i\lambda}$, $\lambda \neq 2k\pi$.

Dobbiamo mostrare la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k} e^{i\lambda k}$. Applichiamo [\[rich.12\]](#) ponendo

$a_k = (-1)^{[\sqrt{k}]} e^{i\lambda k}$ e $b_k = 1/k$. Ovviamente $\sqrt{k} b_k = 1/\sqrt{k}$ tende a zero. Inoltre $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{k} |b_k - b_{k+1}|$

è una serie il cui termine generale va a zero come $k^{-3/2}$ e quindi converge assolutamente.

L'ultima condizione da verificare è $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k$ limitata. Supponiamo che $n = \frac{p(p+1)}{2}$. Abbiamo

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{[\sqrt{k}]} e^{i\lambda k} = \sum_{j=1}^p (-1)^j \sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} e^{i\lambda k}. \text{ Ora } \left| \sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} e^{i\lambda k} \right| = \left| \frac{e^{i\lambda(j+1)^2} - e^{i\lambda j^2}}{e^{i\lambda} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\lambda} - 1|}$$

per cui $\left| \sum_{j=1}^p (-1)^j \sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} e^{i\lambda k} \right| \leq \sum_{j=1}^p \frac{2}{|e^{i\lambda} - 1|} \leq \frac{2C\sqrt{n}}{|e^{i\lambda} - 1|}$ dove C è una costante positiva

e calcolabile. Supponiamo ora che $n \neq \frac{p(p+1)}{2}$. Ne segue che esiste un intero p_n tale che

$$\frac{p_n(p_n+1)}{2} + 1 \leq n \leq \frac{(p_n+1)(p_n+2)}{2} - 1. \text{ Scriviamo } \sum_{k=1}^n (-1)^{[\sqrt{k}]} e^{i\lambda k} = \sum_{j=1}^{p_n} (-1)^j \sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} e^{i\lambda k} +$$

$\sum_{k=p_n+1}^n (-1)^{[\sqrt{k}]} e^{i\lambda k}$. Il primo pezzo lo maggioriamo esattamente nello stesso modo di prima. La

stima del temine della seconda somma è esattamente come la prima ossia $\frac{2}{|e^{i\lambda} - 1|}$ ed il numero

di termine presenti è $n - p_n < \frac{(p_n+1)(p_n+2)}{2} - 1 - \frac{p_n(p_n+1)}{2} - 1 = p_n - 1$ per cui possiamo

stimare la seconda somma come $\left| \sum_{k=p_n+1}^n (-1)^{[\sqrt{k}]} e^{i\lambda k} \right| \leq \frac{2C'\sqrt{n}}{|e^{i\lambda} - 1|}$. In ogni caso abbiamo ot-

tenuto il risultato. È opportuno notare che la possibilità di avere $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k$ limitata è preclusa

se $z = 1$.

232.8.2 Se $z = 1$ è l'esercizio [\[rich.15\]](#). Sia $z = e^{i\lambda}$ e quindi scriviamo la somma parziale della

serie $\sum_{k=1}^{n_1} \bar{a}_k z^k = \sum_{n=1}^{n_1} (-1)^n \sum_{k=\frac{1}{2}n(n-1)+1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \frac{e^{i\lambda k}}{k} = \sum_{k=1}^{n_1} (-1)^{c_k} \frac{e^{i\lambda k}}{k}$ dove c_k tiene conto del fatto che i segni più e meno sono disposti nella modalità indicata nell'esercizio. Applichiamo il contenuto dell'esercizio [\[rich.12\]](#) come nell'esercizio [\[rich.13\]](#) quindi $a_k = (-1)^{c_k} e^{i\lambda k}$ e $b_k = 1/k$. Le due condizioni su b_k sono ovvie. L'unica veramente da verificare è il fatto che $\frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{k=1}^{n_1} a_k$ è limitata.

Supponiamo $n_1 = \frac{p(p+1)}{2}$ per cui $\sum_{k=1}^{n_1} a_k = \sum_{n=1}^p (-1)^n \sum_{k=\frac{1}{2}n(n-1)+1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} e^{i\lambda k}$. Come prima abbiamo

$$\left| \sum_{k=\frac{1}{2}n(n-1)+1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} e^{i\lambda k} \right| \leq \left| \frac{e^{\frac{1}{2}n(n+1)+1} - e^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}}{e^{i\lambda} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\lambda} - 1|} \text{ da cui } \left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k \right| \leq \frac{C\sqrt{n}}{|e^{i\lambda} - 1|} \text{ e quindi}$$

possiamo applicare [\[rich.12\]](#) e dire che $\sum_{k=1}^{+\infty} \bar{a}_k z^k$ converge sul cerchio di raggio 1.

233.8.2 è l'esempio di Pringsheim. Sia data $\{a_k\} = \{1/(k \ln k)\}$ $a_1 = 1$, e $\{b_k\}$ è definita da

$$(a_1, -a_2, -a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, -a_8, \dots, -a_{15}, a_{16}, \dots, a_{31}, \dots)$$

La convergenza assoluta è chiaramente esclusa.

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k \ln k} \sim \int_{2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \frac{\ln(2^n-1)}{(n-1) \ln 2} = \ln \frac{(n-1) \ln 2 + \ln 2 + \ln(1-2^{-n})}{(n-1) \ln 2} = \frac{1}{n-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k \ln k} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ciò vuol dire che la serie $\sum b_k z^k$ converge per $z = 1$. Sia ora $z = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$ abbiamo il caso precedente. Usiamo [\[rich.11\]](#) da cui

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k} \underbrace{=}_{Abel} \\ & = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \left[\frac{1}{(2^n-1) \ln(2^n-1)} \sum_{k=1}^{2^n-1} e^{i\alpha k} - \frac{1}{(2^{n-1}-1) \ln(2^{n-1}-1)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} e^{i\alpha k} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k} - \sum_{k=1}^{2^{n-1}-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k} \right\} = \\ & = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \left[\frac{1}{(2^n-1) \ln(2^n-1)} \sum_{k=1}^{2^n-1} e^{i\alpha k} - \frac{1}{(2^{n-1}-1) \ln(2^{n-1}-1)} \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} e^{i\alpha k} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] \sum_{p=1}^k e^{i\alpha p} \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

Sappiamo che $\left| \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k} \right| \leq \frac{|\sin(k\alpha/2)|}{|\sin \alpha/2|} \leq \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$ per cui ciascuno dei tre precedenti contributi costituisce una serie assolutamente convergente. I primi due sono evidenti. Per il terzo abbiamo

$$\left| \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] \sum_{p=1}^k e^{i\alpha p} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \underbrace{\sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right]}_{O(2^{-n})}$$

• Convergenza uniforme della serie di Pringsheim. Dovremmo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon: q \geq p > n_\varepsilon \implies \sup_{0 \leq \alpha < 2\pi} \left| \sum_{n=p+1}^q a_n e^{i\alpha n} \right| < \varepsilon$$

solo che stavolta $\frac{|\sin(k\alpha/2)|}{|\sin \alpha/2|} \leq k$ e non c'è modo di fare di meglio in quanto $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|\sin(k\alpha/2)|}{|\sin \alpha/2|} = k$. Per quanto riguarda il terzo contributo della (1) ci ritroveremmo con qualcosa del tipo

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] \right| \left| \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k} \right| \leq \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] k = \\ & = \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \left[\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} + \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] = \frac{1}{\ln(2^{n-1}-1)} - \frac{1}{\ln(2^n-2)} + \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k \ln k} \\ & \sum_{n=p}^q \frac{1}{\ln(2^{n-1}-1)} - \frac{1}{\ln(2^n-2)} = \frac{1}{\ln(2^{p-1}-1)} - \frac{1}{\ln(2^q-2)} \rightarrow 0 \text{ se } p \rightarrow +\infty \\ & \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k \ln k} \sim \frac{1}{n} \end{aligned}$$

per cui (maggioriamo $(-1)^{n-1}$ con 1)

$$\left| \sum_{n=p}^q (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k} \right| \leq \varepsilon + \sum_{n=p}^q \frac{1}{n} \sim \ln q - \ln p$$

che non è definitivamente piccola e di meglio non si può fare. Naturalmente è uniformemente convergente in $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ per ogni $\delta > 0$ in quanto $\frac{1}{|\sin(\alpha/2)|} \leq \frac{\pi}{\alpha} \leq \frac{\pi}{\delta}$

Proviamo a dimostrare che non è uniformemente convergente in $[-\pi, \pi]$ ossia

$$\exists \varepsilon > 0: \forall N \exists q \geq p > N: \sup_{0 \leq \alpha < 2\pi} \left| \sum_{n=p+1}^q a_n e^{i\alpha n} \right| \geq \varepsilon$$

$$\sum_{j=1}^k e^{i\alpha j} = \sum_{j=1}^k (\cos \alpha j + i \sin \alpha j) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{(2k+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + i \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{(2k+1)\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos(\frac{k\alpha+\alpha}{2}) \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad B_k \doteq \left| \sum_{j=1}^k e^{i\alpha j} \right| = \frac{|\sin \frac{k\alpha}{2}|}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}$$

Stimiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k} &= \\ &= \underbrace{\frac{1}{(2^p-1) \ln(2^p-1)} \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-1} e^{ik\alpha}}_{T_1} + \underbrace{\sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{ik\alpha}}_{T_2} + \end{aligned}$$

$|T_1| \leq C/p$. Prendiamo $\alpha = 2^{-p}\pi/2$.

$$\begin{aligned} |T_2| &\geq \left| \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^k e^{ik\alpha} \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\cos(\frac{k\alpha+\alpha}{2}) \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| \geq \\ &\geq \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \underbrace{\frac{2}{\alpha}}_{\sin \frac{\alpha}{2}} \underbrace{\frac{k\alpha}{2}}_{\sin \frac{k\alpha}{2}} \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{\cos(\frac{k\alpha+\alpha}{2})} = \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left[\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right]}_{O(1/p^2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \end{aligned}$$

Dobbiamo stimare

$$\sum_{p=p_0}^{p_1} \sum_{n=p}^{p+1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k} \quad (1.1)$$

Sia $n = p$ pari

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{p+1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k} &= \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{-e^{i\alpha k}}{k \ln k} + \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k} = \\ &= \left(\sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{-e^{ik\alpha}}{k \ln k} + \sum_{k=2^p}^{2^p+2^{p-1}-1} \frac{e^{ik\alpha}}{k \ln k} \right) + \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{2^{p+1}-1} \frac{e^{ik\alpha}}{k \ln k} = \\ &= \left(\sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{-e^{ik\alpha}}{k \ln k} + \frac{e^{i(k+2^{p-1})\alpha}}{(k+2^{p-1}) \ln(k+2^{p-1})} \right) + \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{2^{p+1}-1} \frac{e^{ik\alpha}}{k \ln k} \underbrace{=}_{\alpha=\pi 2^{2-p}} \\ &= \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} e^{ik\alpha} \left(\frac{-1}{k \ln k} + \frac{1}{(k+2^{p-1}) \ln(k+2^{p-1})} \right) + \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{2^{p+1}-1} \frac{e^{ik\alpha}}{k \ln k} \end{aligned}$$

L'ultima riga è la formula che verrà stimata. In particolare la prima parte verrà maggiorata da C/p e la seconda parte verrà minorata con C'/p con $C' > C$.

Applichiamo Abel ed otteniamo

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{-\frac{1}{(2^p-1)\ln(2^p-1)} \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-1} e^{ik\alpha}}_{T_1} - \underbrace{\sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{ik\alpha}}_{T_2} + \\
 & + \underbrace{\frac{1}{(2^p+2^{p-1}-1)\ln(2^p+2^{p-1}-1)} \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-1} e^{ik\alpha}}_{T_3} + \\
 & + \underbrace{\sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left[\frac{1}{(k+2^{p-1}) \ln(k+2^{p-1})} - \frac{1}{(k+2^{p-1}+1) \ln(k+2^{p-1}+1)} \right] \sum_{j=1}^k e^{ik\alpha}}_{T_4} + \\
 & + \underbrace{\sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{2^{p+1}-1} \frac{e^{ik\alpha}}{k \ln k}}_{T_5}; \quad (*)
 \end{aligned}$$

T_1, T_3

$$\sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-1} e^{ik\alpha} = \sum_{k=1}^{2^p-1} e^{ik\alpha} - \sum_{k=1}^{2^{p-1}-2} e^{ik\alpha}$$

Usiamo (2).

$$\sin \frac{2^p-1+1}{2} \alpha = \sin(2^{p-1} 4\pi 2^{-p}) = 0, \quad \sin(2^p-1+\frac{1}{2})\alpha = \sin\left((2^p-\frac{1}{2})4\pi 2^{-p}\right) = -\sin(\pi 2^{1-p})$$

Ciò vuol dire che

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2^p-1} e^{ik\alpha} &= \frac{-1}{2} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin(\pi 2^{1-p}) = \frac{-1}{2} - \frac{\sin(\pi 2^{1-p})}{\sin(2\pi 2^{-p})} = \frac{-3}{2} \\
 \left| \sin \frac{2^{p-1}-2}{2} \alpha \right| &= \left| \sin \left(\frac{2^{p-1}-2}{2} 4\pi 2^{-p} \right) \right| = \left| \sin \left(\pi - \frac{4\pi}{2^p} \right) \right| = \sin \frac{4\pi}{2^p} \\
 \left| \sin \frac{2^{p-1}-1}{2} \alpha \right| &= \left| \sin \left(\pi - \frac{2\pi}{2^p} \right) \right| = \sin \frac{2\pi}{2^p} \\
 \sin(2^{p-1}-2+\frac{1}{2})\alpha &= \sin(2\pi - 6\pi 2^{-p}) = -\sin \frac{6\pi}{2^p}
 \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{2^{p-1}-2} e^{ik\alpha} = \frac{-1}{2} + \frac{\sin(6\pi 2^{-p})}{\sin(2\pi 2^{-p})} + i \frac{\sin \frac{4\pi}{2^p} \sin \frac{2\pi}{2^p}}{2 \sin(2\pi 2^{-p})} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{5}{2}$$

Ciò vuol dire che $T_1, T_3 \sim 2^{-p}/p$ e quindi, quando poi sommo in p ottengo una quantità piccola a piacere.

T_2, T_4

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left(\frac{1}{(k+2^{p-1}) \ln(k+2^{p-1})} - \frac{1}{(k+2^{p-1}+1) \ln(k+2^{p-1}+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{ik\alpha} + \\
 & - \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{ik\alpha} \doteq \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} (f(k+2^{p-1}) - f(k)) B_k
 \end{aligned}$$

che riscrivo come

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} (f(k+2^{p-1}-j) - f(k+2^{p-1}-j-1)) B_k \right| \leq \\
 & \leq \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} \sum_{k=2^{p-1}-1}^{2^p-2} (-f(k+2^{p-1}-j) + f(k-1+2^{p-1}-j)) \underbrace{|B_k|}_{\leq \sin^{-1}(\alpha/2)} \leq (\text{somma telescopica in } k) \\
 & \leq \sin^{-1} \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} (f(2^{p-1}+2^{p-1}-j-2) - f(2^p+2^{p-1}-j-2)) \\
 & = \sin^{-1} \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} (f(2^p-j-2) - f(3 \cdot 2^{p-1}-j-2)) = \\
 & = \sin^{-1} \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} \left[\frac{1}{(2^p-j-2) \ln(2^p-j-2)} - \frac{1}{(2^p-j-1) \ln(2^p-j-1)} \right] + \\
 & - \sin^{-1} \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} \left[\frac{1}{(3 \cdot 2^{p-1}-j-2) \ln(3 \cdot 2^{p-1}-j-2)} + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(3 \cdot 2^{p-1}-j-1) \ln(3 \cdot 2^{p-1}-j-1)} \right] = \\
 & = \sin^{-1} \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{(2^{p-1}-1) \ln(2^{p-1}-1)} - \frac{1}{(2^p-1) \ln(2^p-1)} \right] + \\
 & \quad - \sin^{-1} \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{(2^p-1) \ln(2^p-1)} - \frac{1}{(3 \cdot 2^{p-1}-1) \ln(3 \cdot 2^{p-1}-1)} \right] = \\
 & = \sin^{-1} \frac{\alpha}{2} \cdot 2^{1-p} \left(\frac{1}{(p-1) \ln 2} - \frac{1}{p \ln 2} + \frac{1}{3 p \ln 2 + \ln(3/2)} + O(2^{-2p}/p) \right) \leq \frac{1}{p 2\pi \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)
 \end{aligned}$$

Poi c'è l'ultimo pezzo di (*) ossia

$\boxed{T_5}$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{2^{p+1}-1} \frac{e^{ik\alpha}}{k \ln k} = \\
 & \underbrace{\frac{1}{(2^{p+1}-1) \ln(2^{p+1}-1)} \sum_{k=1}^{2^{p+1}-1} e^{i\alpha k}}_{O(2^{-2p}/p)} - \underbrace{\frac{1}{(2^p+2^{p-1}-1) \ln(2^p+2^{p-1}-1)} \sum_{k=1}^{2^p+2^{p-1}-1} e^{i\alpha k}}_{O(2^{-p}/p)} + \\
 & + \sum_{k=2^p+2^{p-1}-2}^{2^{p+1}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k}
 \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2^{p+1}-1} e^{i\alpha k} &= \frac{-1}{2} + \frac{\sin(2\pi 2^{-p})}{2 \sin(2\pi 2^{-p})} + i \frac{\sin(\pi 2^{-p-1}) \sin(3\pi 2^{-p-1})}{\sin(2\pi 2^{-p})} = O(2^{-p}) \\
 \sum_{k=1}^{2^p+2^{p-1}-1} e^{i\alpha k} &= \frac{-1}{2} - \frac{\sin(2\pi 2^{-p})}{2 \sin(2\pi 2^{-p})} + i \frac{\sin(4\pi 2^{-p}) \sin(3\pi)}{\sin(2\pi 2^{-p})}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=2^p+2^{p-1}-2}^{2^{p+1}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k} \right| \geq \\ & \geq \left| \sum_{k=2^p+2^{p-1}-2}^{2^{p+1}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| \end{aligned} \quad (**)$$

Ora se $2^p + 2^{p-1} - 2 \leq k \leq 2^{p+1} - 1$ allora

$$3\pi - \frac{4\pi}{2^p} \leq \frac{k\alpha}{2} \leq 4\pi - \frac{2\pi}{2^p}, \quad 3\pi - \frac{2\pi}{2^p} \leq \frac{(k+1)\alpha}{2} \leq 4\pi$$

Per questo spezziamo l'insieme $\{2^p + 2^{p-1} - 2, \dots, 2^{p+1} - 1\}$ come unione dell'insieme $\{2^p + 2^{p-1}, \dots, 2^{p+1} - 1\}$ e dei due punti $2^p + 2^{p-1} - 2, 2^p + 2^{p-1} - 1$. Poi spezziamo il primo insieme in tre ulteriori sottoinsiemi

$$(2^p + 2^{p-1}, \dots, 2^{p+1} - 1) = \underbrace{\left(\frac{3}{2}2^p, \dots, \frac{7}{4}2^p - 2 \right)}_{I_1: (k+1)\alpha < 7\pi} \cup \left\{ \frac{7}{4}2^p - 1 \right\} \cup \underbrace{\left(\frac{7}{4}2^p, 2^{p+1} - 1 \right)}_{I_2: k\alpha \geq 7\pi}$$

$$k \in I_1 \implies \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \geq \left(\frac{k\alpha}{2} - 3\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}$$

$$k \in I_2 \implies \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \geq \left(\frac{k\alpha}{2} - 4\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}$$

Finalmente (**) si può minorare come

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=2^p+2^{p-1}-2}^{2^{p+1}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| \geq \\ & \geq \underbrace{\sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \left(\frac{k\alpha}{2} - 3\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}}_{T_6} + \\ & \quad + \underbrace{\sum_{k=\frac{7}{4}2^p}^{2^{p+1}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \left(\frac{k\alpha}{2} - 4\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}}_{T_7} + \\ & \quad + \underbrace{\left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_{k=2^p+2^{p-1}-2}}_{O(2^{-p}/p)} + \\ & \quad + \underbrace{\left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_{k=2^p+2^{p-1}-1}}_{O(2^{-p}/p)} + \\ & \quad + \underbrace{\left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_{k=\frac{7}{4}2^p-1}}_{O(2^{-p}/p)} \end{aligned}$$

Ora

$$k^2 \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) = \frac{k}{\ln k} - \frac{k+1}{\ln(k+1)} + \frac{2}{\ln(k+1)} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \quad (***)$$

Cominciamo da T_6 . Da $\frac{k^2 \alpha^2}{4} \frac{1}{\pi \alpha}$ viene

$$\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{k}{\ln k} - \frac{k+1}{\ln(k+1)} + \frac{2}{\ln(k+1)} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right]$$

La primitiva di $1/(x \ln x)$ è $\ln(\ln x)$ per cui $\sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{\alpha}{(k+1) \ln(k+1)} \sim \frac{1}{p2^p}$ e poi sommato su p dà un contributo trascurabile.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \left(\frac{k}{\ln k} - \frac{k+1}{\ln(k+1)} \right) &= 2^{-p} \left(\frac{2^p + 2^{p-1}}{\ln(2^p + 2^{p-1})} - \frac{\frac{7}{4}2^p - 2 + 1}{\ln(\frac{7}{4}2^p - 2 + 1)} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\ln(\frac{3}{2}2^{p-1})} - \frac{\frac{7}{4} - 2^{-p}}{\ln(\frac{7}{4}2^p - 1)} = \frac{\ln(6/7)}{p \ln 2} + O(1/p^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{4\pi} \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{2}{\ln(k+1)} \sim \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{\frac{7}{4}2^p - 2}{\ln(1 + \frac{7}{4}2^p - 2)} - \frac{2^p + 2^{p-1}}{\ln(1 + 2^p + 2^{p-1})} \right)$$

che sommata alla precedente da $\frac{\ln(7/6)}{p \ln 2} + O(1/p^2)$. Quindi il contributo di (***) è quello appena scritto.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) (-3\pi \alpha k + 9\pi^2) \frac{4}{\pi \alpha} = \\ &= -12 \left[\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} + \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] + \frac{36\pi}{\alpha} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\ln(A + B2^p)} - \frac{1}{\ln(C + D2^p)} = \frac{1}{p^2 \ln 2} \ln \frac{D}{B} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{36\pi}{\alpha} \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} &= 9 \cdot 2^p \left[\frac{1}{(\frac{3}{2}2^p - 1) \ln(\frac{3}{2}2^p - 1)} - \frac{1}{(\frac{7}{4}2^p - 2) \ln(\frac{7}{4}2^p - 2)} \right] = \\ &= \frac{9}{\frac{3}{2}p \ln 2} - \frac{9}{\frac{7}{4}p \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{63}{4p \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \end{aligned}$$

Poi abbiamo

$$-12 \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) = O(2^{-p})$$

e poi

$$-12 \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \sim -12 \ln \left(\ln \frac{7}{4}2^p - \ln \frac{3}{2}2^p \right) \sim \frac{-12}{p \ln 2} \ln \frac{7}{6} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

e finalmente notiamo che $\frac{63}{4} > 12 \ln(7/6)$.

La conclusione è che

$$|-T_2 + T_4 + T_5| \geq |T_5| - |T_4 - T_2| \sim \left(\frac{64}{4} - 12 \ln \frac{7}{6}\right) \frac{1}{p \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

e quindi

$$|T_1 - T_2 + T_3 + T_4 + T_5| \geq |T_5| - |T_4 - T_2| - |T_1 + T_2| \geq \left(\frac{64}{4} - 12 \ln \frac{7}{6} - \frac{1}{2\pi}\right) \frac{1}{p \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Riprendiamo (**) e lo riscriviamo come

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-2}^{2^{p-1}-1} \left[\frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p-1}) \ln(k+3 \cdot 2^{p-1})} - \frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p-1}+1) \ln(k+3 \cdot 2^{p-1}+1)} \right] \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \\ & = \underbrace{\left[\frac{1}{(-2+3 \cdot 2^{p-1}) \ln(-2+3 \cdot 2^{p-1})} - \frac{1}{(-1+3 \cdot 2^{p-1}) \ln(-1+3 \cdot 2^{p-1})} \right]}_{O(2^{-p/p})} \sin \alpha + \\ & + \underbrace{\sum_{k=1}^{2^{p-1}-1} \left[\frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p-1}) \ln(k+3 \cdot 2^{p-1})} - \frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p-1}+1) \ln(k+3 \cdot 2^{p-1}+1)} \right]}_{\doteq S} \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$S = |S| \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{2^{p-1}-1} \left[\frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p-1}) \ln(k+3 \cdot 2^{p-1})} - \frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p-1}+1) \ln(k+3 \cdot 2^{p-1}+1)} \right] \frac{k\alpha}{2} \frac{(k+1)\alpha}{\pi} \frac{2}{\alpha}$$

Sia $A = 3 \cdot 2^{p-1}$. Ricordo che $\alpha = 4\pi 2^{-p}$.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2^{p-1}-1} \left[\frac{k(k+1)}{(k+A) \ln(k+A)} - \frac{(k+1)(k+2)}{(k+A+1) \ln(k+A+1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{\ln(k+A+1)} - \frac{2A}{(k+A+1) \ln(k+A+1)} \right] 4 \cdot 2^{-p} \geq \\ & \geq 4 \cdot 2^{-p} \left[\frac{2}{(1+A) \ln(1+A)} - \frac{2^{p-1}(2^{p-1}+1)}{(2^{p-1}+A) \ln(2^{p-1}+A)} + \int_1^{2^{p-1}} \frac{dx}{\ln(1+x+A)} + \right. \\ & \quad \left. - \int_1^{2^{p-1}} \frac{dx 2A}{(x+A) \ln(x+A)} \right] \geq \end{aligned}$$

Guardando la (1.1) bisogna poi sommare in p e quindi scriviamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{2p-1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k} &= \underbrace{\sum_{n=p}^{p+1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k}}_{Q_p} + \underbrace{\sum_{n=p+2}^{p+3} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k}}_{Q_{p+2}} + \dots + \\ &+ \underbrace{\sum_{n=2p-2}^{2p-1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k}}_{Q_{2p-2}}, \end{aligned}$$

Genericamente abbiamo Q_{p+2q} , $0 \leq q \leq p/2-1$ ($q=0$ è il caso appena studiato) e la riscriviamo come in (*) solo che i termini li chiamiamo $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_5$.

$$\boxed{\overline{T}_1, \overline{T}_3}$$

$$\sum_{k=2^{p-1+2q}-1}^{2^{p+2q}-1} e^{ik\alpha} = \sum_{k=1}^{2^{p+2q}-1} e^{ik\alpha} - \sum_{k=1}^{2^{p-1+2q}-2} e^{ik\alpha}$$

Usiamo (2).

$$\begin{aligned} \sin \frac{2^{p+2q}-1+1}{2} \alpha &= \sin(2^{p-1+2q} 4\pi 2^{-p}) = 0, \\ &= \sin(2^{p+2q}-1 + \frac{1}{2}) \alpha = \sin \left((2^{p+2q} - \frac{1}{2}) 4\pi 2^{-p} \right) = -\sin(\pi 2^{1-p}) \end{aligned}$$

Ciò vuol dire che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{p+2q}-1} e^{ik\alpha} &= \frac{-1}{2} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin(\pi 2^{1-p}) = \frac{-1}{2} - \frac{\sin(\pi 2^{1-p})}{\sin(2\pi 2^{-p})} = \frac{-3}{2} \\ \left| \sin \frac{2^{p-1+2q}-2}{2} \alpha \right| &= \left| \sin \left(\frac{2^{p-1+2q}-2}{2} 4\pi 2^{-p} \right) \right| = \left| \sin(-\frac{4\pi}{2^p}) \right| = \sin \frac{4\pi}{2^p} \\ \left| \sin \frac{2^{p-1+2q}-1}{2} \alpha \right| &= \left| \sin(-\frac{2\pi}{2^p}) \right| = \sin \frac{2\pi}{2^p} \\ \sin(2^{p-1+2q}-2 + \frac{1}{2}) \alpha &= \sin(2\pi - 6\pi 2^{-p}) = -\sin \frac{6\pi}{2^p} \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{2^{p-1+2q}-2} e^{ik\alpha} = \frac{-1}{2} + \frac{\sin(6\pi 2^{-p})}{\sin(2\pi 2^{-p})} + i \frac{\sin \frac{4\pi}{2^p} \sin \frac{2\pi}{2^p}}{2 \sin(2\pi 2^{-p})} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{5}{2}$$

Ciò vuol dire che $\overline{T}_1, \overline{T}_3 \sim 2^{-p}/p$ e quindi, quando poi sommo in p ottengo una quantità piccola a piacere.

$$\boxed{\overline{T}_2, \overline{T}_4}$$

La situazione è la stessa rispetto a T_2, T_4 per cui la stima è quella di prima ma con $p+2q$ al posto di p .

$\overline{T_5}$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=2^{p+2q}+2^{p-1}}^{2^{p+2q+1}-1} \frac{e^{ik\alpha}}{k \ln k} = \\
 & \underbrace{\frac{1}{(2^{p+2q+1}-1) \ln(2^{p+2q+1}-1)} \sum_{k=1}^{2^{p+2q+1}-1} e^{i\alpha k}}_{O(2^{-2(p+2q)/(p+2q)})} + \\
 & - \underbrace{\frac{1}{(2^{p+2q}+2^{p-1+2q}-1) \ln(2^{p+2q}+2^{p-1+2q}-1)} \sum_{k=1}^{2^{p+2q}+2^{p-1+2q}-1} e^{i\alpha k}}_{O(2^{-(p+2q)/(p+2q)})} + \\
 & + \sum_{k=2^{p+2q}+2^{p-1+2q}-2}^{2^{p+1+2q}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k}
 \end{aligned}$$

Infatti

$$\sum_{k=1}^{2^{p+1+2q}-1} e^{i\alpha k} = \frac{-1}{2} + \frac{\sin(2\pi 2^{-p})}{2 \sin(2\pi 2^{-p})} + i \frac{\sin(\pi 2^{-p-1}) \sin(3\pi 2^{-p-1})}{\sin(2\pi 2^{-p})} = O(2^{-p})$$

$$\sum_{k=1}^{2^{p+2q}+2^{p+2q-1}-1} e^{i\alpha k} = \frac{-1}{2} - \frac{\sin(2\pi 2^{-p})}{2 \sin(2\pi 2^{-p})} + i \frac{\sin(4\pi 2^{-p}) \sin(3\pi)}{\sin(2\pi 2^{-p})}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=2^{p+2q}+2^{p+2q-1}-2}^{2^{p+1+2q}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \sum_{j=1}^k e^{i\alpha k} \right| \geq \\
 & \geq \left| \sum_{k=2^{p+2q}+2^{p+2q-1}-2}^{2^{p+1+2q}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| \quad (**)
 \end{aligned}$$

Ora definiamo $k - 2^{p+2q} - 2^{p+2q-1} = k'$ (ne caso precedente NON ho seguito tale strada) ma k' lo richiamiamo k per brevità. È come dire $k - \frac{3}{2} \cdot 2^{p+2q} = k'$ oppure $k - 3 \cdot 2^{p+2q-1} = k'$ per cui si ottiene

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=-2}^{2^{p+2q-1}-1} \left(\frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p+2q-1}) \ln(k+3 \cdot 2^{p+2q-1})} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{(k+3 \cdot 2^{p+2q-1}+1) \ln(k+3 \cdot 2^{p+2q-1}+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right|
 \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{k\alpha + 2^{p+2q}\alpha + 2^{p+2q-1}\alpha}{2} = \sin \left(\frac{k\alpha}{2} + 6\pi 2^{2q} \right) = \sin \frac{k\alpha}{2} \\
 & \sin \left(\frac{k\alpha + 2^{p+2q}\alpha + 2^{p+2q-1}\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \left(\frac{k\alpha}{2} + 6\pi 2^{2q} + \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

Se $k = -2$ il contributo è

$$\left| \left(\frac{1}{(-2 + 3 \cdot 2^{p+2q-1}) \ln(-2 + 3 \cdot 2^{p+2q-1})} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{(-2 + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1) \ln(-2 + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1)} \right) \frac{\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| = O(2^{-2p-q})$$

Se $k = -1, 0$ il contributo è nullo e quindi riscriviamo

$$\left| \sum_{k=1}^{2^{p+2q-1}-1} \left(\frac{1}{(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1}) \ln(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1})} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1) \ln(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right|$$

2^p è il periodo della funzione $\sin \frac{k\alpha}{2}$ e quindi scriviamo $\{1, \dots, 2^{p+2q-1} - 1\} = \{1, 2, \dots, 2^p\} \cup \{2^p + 1, \dots, 2 \cdot 2^p\} \cup \{2 \cdot 2^p + 1, \dots, 3 \cdot 2^p\} \cup \dots \cup \{(2^{2q-1} - 1) \cdot 2^p + 1, \dots, 2^{2q-1} \cdot 2^p - 1\}$

$$\left| \sum_{s=0}^{2^{2q-1}-1} \sum_{k=1+s \cdot 2^p}^{(s+1)2^p-1} \left(\frac{1}{(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1}) \ln(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1})} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1) \ln(k + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| = \\ = \left| \sum_{s=0}^{2^{2q-1}-1} \sum_{k=1}^{2^p} \left(\frac{1}{(k + s2^p + 3 \cdot 2^{p+2q-1}) \ln(k + s2^p + 3 \cdot 2^{p+2q-1})} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{(k + s2^p + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1) \ln(k + s2^p + 3 \cdot 2^{p+2q-1} + 1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right|$$

‡ Per $s = 2^{2q} - 1$ il valore massimo di k è $2^{p+2q-1} - 1$.

Ora se $-2 \leq k \leq 2^{p+2q-1} - 1$ allora

$$-\frac{8\pi}{2^p} \leq \frac{k\alpha}{2} \leq \pi 2^{2q} - \frac{2\pi}{2^p}, \quad -\frac{6\pi}{2^p} \leq \frac{(k+1)\alpha}{2} \leq \pi 2^{2q}$$

Per questo spezziamo l'insieme $\{2^p + 2^{p-1} - 2, \dots, 2^{p+1} - 1\}$ come unione dell'insieme $\{2^p + 2^{p-1}, \dots, 2^{p+1} - 1\}$ e dei due punti $2^p + 2^{p-1} - 2, 2^p + 2^{p-1} - 1$. Poi spezziamo il primo insieme in due ulteriori sottoinsiemi

$$(2^p + 2^{p-1}, \dots, 2^{p+1} - 1) = \underbrace{\left(\frac{3}{2} 2^p, \dots, \frac{7}{4} 2^p - 2 \right)}_{I_1: (k+1)\alpha < 7\pi} \cup \left\{ \frac{7}{4} 2^p - 1 \right\} \cup \underbrace{\left(\frac{7}{4} 2^p, 2^{p+1} - 1 \right)}_{I_2: k\alpha \geq 7\pi}$$

$$k \in I_1 \implies \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \geq \left(\frac{k\alpha}{2} - 3\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}$$

$$k \in I_2 \implies \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \geq \left(\frac{k\alpha}{2} - 4\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}$$

Finalmente (**) si può minorare come

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=2^p+2^{p-1}-2}^{2^{p+1}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right| \geq \\
 & \geq \underbrace{\sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \left(\frac{k\alpha}{2} - 3\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}}_{T_6} + \\
 & \quad + \underbrace{\sum_{k=\frac{7}{4}2^p}^{2^{p+1}-1} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \left(\frac{k\alpha}{2} - 4\pi \right)^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{\alpha}}_{T_7} + \\
 & \quad + \underbrace{\left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_{k=2^p+2^{p-1}-2}}_{O(2^{-p}/p)} + \\
 & \quad + \underbrace{\left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_{k=2^p+2^{p-1}-1}}_{O(2^{-p}/p)} + \\
 & \quad + \underbrace{\left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_{k=\frac{7}{4}2^p-1}}_{O(2^{-p}/p)}
 \end{aligned}$$

Ora

$$k^2 \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) = \frac{k}{\ln k} - \frac{k+1}{\ln(k+1)} + \frac{2}{\ln(k+1)} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \quad (***)$$

Cominciamo da T_6 . Da $\frac{k^2 \alpha^2}{4} \frac{1}{\pi \alpha}$ viene

$$\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{k}{\ln k} - \frac{k+1}{\ln(k+1)} + \frac{2}{\ln(k+1)} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right]$$

La primitiva di $1/(x \ln x)$ è $\ln(\ln x)$ per cui $\sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{\alpha}{(k+1) \ln(k+1)} \sim \frac{1}{p2^p}$ e poi sommato su p dà un contributo trascurabile.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \left(\frac{k}{\ln k} - \frac{k+1}{\ln(k+1)} \right) = 2^{-p} \left(\frac{2^p + 2^{p-1}}{\ln(2^p + 2^{p-1})} - \frac{\frac{7}{4}2^p - 2 + 1}{\ln(\frac{7}{4}2^p - 2 + 1)} \right) = \\
 & = \frac{3}{2} \frac{1}{\ln(\frac{3}{2}2^{p-1})} - \frac{\frac{7}{4} - 2^{-p}}{\ln(\frac{7}{4}2^p - 1)} = \frac{\ln(6/7)}{p \ln 2} + O(1/p^2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{4\pi} \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{2}{\ln(k+1)} \sim \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{\frac{7}{4}2^p - 2}{\ln(1 + \frac{7}{4}2^p - 2)} - \frac{2^p + 2^{p-1}}{\ln(1 + 2^p + 2^{p-1})} \right)$$

che sommata alla precedente da $\frac{\ln(7/6)}{p \ln 2} + O(1/p^2)$. Quindi il contributo di (***) è quello appena scritto.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) (-3\pi\alpha k + 9\pi^2) \frac{4}{\pi\alpha} = \\ & = -12 \left[\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} + \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] + \frac{36\pi}{\alpha} \left[\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right] \\ & \frac{1}{\ln(A + B2^p)} - \frac{1}{\ln(C + D2^p)} = \frac{1}{p^2 \ln 2} \ln \frac{D}{B} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{36\pi}{\alpha} \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} = 9 \cdot 2^p \left[\frac{1}{(\frac{3}{2}2^p-1) \ln(\frac{3}{2}2^p-1)} - \frac{1}{(\frac{7}{4}2^p-2) \ln(\frac{7}{4}2^p-2)} \right] = \\ & = \frac{9}{\frac{3}{2}p \ln 2} - \frac{9}{\frac{7}{4}p \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{63}{4p \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \end{aligned}$$

Poi abbiamo

$$-12 \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \left(\frac{1}{k \ln k} - \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right) = O(2^{-p})$$

e poi

$$-12 \sum_{k=2^p+2^{p-1}}^{\frac{7}{4}2^p-2} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \sim -12 \ln \left(\ln \frac{7}{4}2^p - \ln \frac{3}{2}2^p \right) \sim \frac{-12}{p \ln 2} \ln \frac{7}{6} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

e finalmente notiamo che $\frac{63}{4} > 12 \ln(7/6)$.

La conclusione è che

$$| -T_2 + T_4 + T_5 | \geq |T_5| - |T_4 - T_2| \sim \left(\frac{64}{4} - 12 \ln \frac{7}{6} \right) \frac{1}{p \ln 2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Guardando la (1.1) bisogna poi sommare in p e quindi scriviamo

$$\begin{aligned} & \sum_{n=p}^{2p-1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k} = \underbrace{\sum_{n=p}^{p+1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k}}_{Q_p} + \underbrace{\sum_{n=p+2}^{p+3} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k}}_{Q_{p+2}} + \dots + \\ & + \underbrace{\sum_{n=2p-2}^{2p-1} (-1)^{n-1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{e^{i\alpha k}}{k \ln k}}_{Q_{2p-2}}, \quad q \leq p-2 \end{aligned}$$

e quindi la serie non è uniformemente convergente.

234.8.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$. La serie è definita in tutto il piano complesso tranne i punti che risolvono le infinite equazioni $z^p = 1$, p intero maggiore o uguale a 1 ossia i p numeri complessi $e^{2\pi i \frac{m}{p}}$, $0 \leq m \leq p-1$. Fissiamo quindi $p \geq 1$ intero e dimostriamo come la serie sia illimitata in un intorno di uno dei punti che risolvono la equazione $z^p = 1$. Sia $\rho < 1$ e $z = z_m = e^{2\pi i \frac{m}{p}}$

e scriviamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\rho z_m)^n}{1 - (\rho z_m)^n}$. Se $n = pN$ con N intero da cui $z_m^n = e^{2\pi i m N} = 1$. Se n non è un multiplo di p allora deve essere $1 \leq n \leq p-1$, oppure $p+1 \leq n \leq 2p-1$, oppure $2p+1 \leq n \leq 3p-1$, oppure $3p+1 \leq n \leq 4p-1$, eccetera ossia $Mp+1 \leq n \leq (M+1)p-1$. Ora osserviamo che $e^{2\pi i \frac{m}{p}(Mp+1)} = e^{2\pi i \frac{m}{p}((M+1)p+1)}$ e anche $e^{2\pi i \frac{m}{p}(Mp+2)} = e^{2\pi i \frac{m}{p}((M+1)p+2)}$ e così via fino a $z_m^n = e^{2\pi i \frac{m}{p}((M+1)p-1)} = e^{2\pi i \frac{m}{p}((M+2)p-1)}$. Ne segue che la quantità $1 - (\rho z_m)^n$, una volta fissato ρ , può assumere solo $p-1$ valori diversi fra di loro e chiaramente diversi da zero. Quindi è limitata dal basso da una costante C ossia $|1 - (\rho z_m)^n| \geq \min_{1 \leq n \leq p-1} |1 - (\rho z_m)^n| = C$.

A questo punto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\rho z_m)^n}{1 - (\rho z_m)^n} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq pN, N=1,2,\dots}}^{+\infty} \frac{(\rho z_m)^n}{1 - (\rho z_m)^n} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq pN, N=1,2,\dots}}^{+\infty} \frac{(\rho z_m)^n}{1 - (\rho z_m)^n} \\ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq pN, N=1,2,\dots}}^{+\infty} \frac{(\rho z_m)^n}{1 - (\rho z_m)^n} &= \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{\rho^{pN}}{1 - \rho^{pN}} = \frac{1}{1 - \rho} \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{\rho^{pN}}{\sum_{j=0}^{pN-1} \rho^j} \geq \frac{1}{1 - \rho} \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{\rho^{pN}}{pN} = \\ &= \frac{-\ln(1 - \rho^p)}{p(1 - \rho)} \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq pN, N=1,2,\dots}}^{+\infty} \frac{(\rho z_m)^n}{1 - (\rho z_m)^n} \right| \leq C^{-1} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq pN, N=1,2,\dots}}^{+\infty} \rho^n \leq C^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n = \frac{\rho}{C(1 - \rho)}.$$

La somma delle due quantità implica che $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\rho z_m)^n}{1 - (\rho z_m)^n} = +\infty$ per ogni soluzione della equazione $z^p = 1$ e per ogni valore di p . Poiché tali numeri, al variare di p nei naturali, sono densi sulla circonferenza di raggio 1, ne consegue che la circonferenza costituisce una frontiera naturale di analiticità della funzione $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{1 - z^k}$.

235.8.2 Siano $z_1, \dots, z_n$ gli n punti in questione. La serie è data da $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k} (z_1^{-k} + \dots + z_n^{-k})$.

La divergenza per $z = z_1, \dots, z_n$ è immediata. Si dimostri la convergenza in qualsiasi altro punto della circonferenza di raggio 1.

236.8.2

237.8.2 Soluzione di H.Lam. Scriviamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x} dx &= \int_0^1 \ln x \ln(1-x) f'(x) dx = \\ &= f(x) \ln x \ln(1-x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \left[\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} \right] dx = - \int_0^1 f(x) \left[\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} \right] dx = \\ &= - \int_0^1 f(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{1}{2} f^2(1) - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} f^2(1) - \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln x \frac{x^{n+k}}{k^2} dx = -\frac{1}{2} f^2(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(n+k+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ossia } -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^4}{72} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^4}{72} + \frac{\pi^4}{120} = -\frac{\pi^4}{180} \text{ (usando } \boxed{\text{rich.17}}).$$

Soluzione di Rutledge e Douglas.

$$\ln^2(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{x^q}{q} = \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{x^r}{k(r-k)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{x} \ln^2(1-x) dx &= \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k(r-k)} \int_0^1 x^{r-1} \ln x = -\sum_{r=2}^{+\infty} \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k(r-k)} = \\ &= \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{-1}{r^2} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r-k} - \frac{1}{k} \right] = \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{-2}{r^3} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{36} &= \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right] \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right] = \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k^2(r-k)^2} \\ &= \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2}{r^3} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{r-k} \right] + \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(r-k)^2} \right] = \\ &= \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{4}{kr^3} + \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2}{k^2 r^2} = -2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x} \ln^2(1-x) dx + \sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2}{k^2 r^2} \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\sum_{r=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2}{k^2 r^2} = \frac{\pi^4}{5!} = \frac{\pi^4}{120} \implies \int_0^1 \frac{\ln x}{x} \ln^2(1-x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{120} \right) = \frac{-\pi^4}{180}$$

238.8.2 Un numero quadratico algebrico α è un numero irrazionale che soddisfa una equazione polinomiale di secondo grado a coefficienti interi. Si dimostra che esiste una costante positiva C che soddisfa la relazione $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^2}$ per ogni coppia di interi p, q . Se chiamiamo $\|x\|$ la distanza di x dall'intero più vicino, abbiamo $\|kx\| \geq C/k$. Abbiamo $|\sin k\pi\alpha| = |\sin \pi(\alpha k - k')|$ per ogni k' e lo scegliamo in modo tale che $\alpha k - k' = \|\alpha k - k'\|$. Per cui $|\sin k\pi\alpha| \leq \pi \|\alpha k\|$. Inoltre se $-\frac{1}{2} + k\alpha \leq k' \leq \frac{1}{2} + k\alpha$ allora $-\frac{\pi}{2} \leq \pi(k\alpha - k') \leq \frac{\pi}{2}$ e quindi, usando la concavità della funzione $|\sin \pi x|$ fra $-1/2 \leq x \leq 0$ e $0 \leq x \leq 1/2$ ossia $|\sin \pi x| \geq 2|x|$ per $-1 \leq x \leq 1$ si ha $|\sin k\pi\alpha| = |\sin \pi(k\alpha - k')| \geq 2|k\alpha - k'| \geq 2\|\alpha k\|$. Ne segue che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 |\sin(n\pi\alpha)|} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 \|\alpha n\|}$.

Consideriamo $\|\alpha\|, \|2\alpha\|, \|3\alpha\|, \dots, \|n\alpha\|$. Sappiamo che $\|k\alpha\| \geq \frac{C}{k} \geq \frac{C}{n}$. Inoltre sappiamo che $|\|x\| - \|y\|| = \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ e quindi $|\|k\alpha\| - \|k'\alpha\||$ è uno dei valori $\|\alpha\|, \|2\alpha\|, \dots, \|(2n-1)\alpha\|$. Inoltre $\|(k+p)\alpha\| \geq \frac{C}{k+p} \geq \frac{C}{k}$ e quindi ciascuno dei valori $\|\alpha\|, \|2\alpha\|, \dots, \|(2n-1)\alpha\|$

è maggiore o uguale a $\frac{C}{(2n-1)} > \frac{C}{(2n)}$. Ne segue che se ordiniamo in modo crescente i numeri $\|\alpha\|, \|2\alpha\|, \dots, \|n\alpha\|$ allora possiamo dire che il k -esimo è maggiore o uguale a k volte il primo ossia $\frac{kC}{(2n)}$ e quindi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\|k\alpha\|} \leq \frac{2n}{C} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{2n}{C} \ln(n+1)$. Ora usiamo il risultato di rich.11 ossia $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} a'_k B_k$ dove $B_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k b_i$ e $a'_k \stackrel{\text{def}}{=} a_{k+1} - a_k$, $b_k = \frac{1}{\|k\alpha\|}$ e $a_k = 1/k^2$. Osserviamo che $a_n B_n$ tende a zero in quanto $B_n \leq \frac{2n}{C} \ln(n+1)$ mentre a_n tende a zero quadraticamente. Inoltre osserviamo che $a_{k+1} - a_k$ tende a zero come $1/k^3$, da cui $\sum_{k=1}^{+\infty} a'_k B_k$ converge assolutamente.

Si può notare come il ragionamento fatto sulle quantità $\|\alpha\|, \|2\alpha\|, \|3\alpha\|, \dots, \|n\alpha\|$ sia essenziale. Se avessimo stimato $\|n\alpha\| \geq \frac{C}{n}$, nella serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 \|n\alpha\|}$ avremmo avuto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ da cui la divergenza.

239.8.2 Usando il Teorema di Abel rich.11 otteniamo $\sum_{k=1}^n k a_k = n A_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k$ e sappiamo che $|A_n - A| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Ne segue $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k = A_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (A_k - A) + A \frac{n-1}{n} = A_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} (A_k - A) - \frac{1}{n} \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1} (A_k - A) + A \frac{n-1}{n}$. Ora $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} (A_k - A) \right| \leq \frac{n_\varepsilon}{n} \max_{1 \leq k \leq n_\varepsilon} |A_k - A| \leq \varepsilon$ per ogni $n > (n_\varepsilon \max_{1 \leq k \leq n_\varepsilon} |A_k - A|) / \varepsilon \doteq M_\varepsilon$. Inoltre $\frac{A}{n} < \varepsilon$ se $n > A/\varepsilon \doteq r_\varepsilon$. Ne segue che se $n > \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon, r_\varepsilon\}$ allora $\left| \sum_{k=1}^n k a_k \right| < 4\varepsilon$ da cui il risultato.

240.8.2 Detta $S_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ abbiamo $0 < S_n \leq \frac{a_{n+1} - a_1}{a_2}$. Se $\{a_n\}$ è limitata è convergente ossia $a_n \nearrow A$ e questo implica $0 < S_n \leq (A - a_1)/a_2$. Del resto i termini $1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}$ sono positivi e quindi la successione S_n è crescente e quindi, essendo limitata, converge. Supponiamo ora che $S_n \rightarrow S$. Dalla proprietà di Cauchy abbiamo $0 < \frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1} - a_m) \leq \sum_{k=m}^n \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) < \varepsilon$ for any $n, m > n_\varepsilon$. Ne segue $1 - \frac{a_m}{a_{n+1}} < \varepsilon$ ossia $a_{n+1} < \frac{a_m}{1 - \varepsilon}$ che fornisce un limite superiore alla successione.

• Come successione limitata convergente per cui S_n non converge si può prendere $a_k = 1/k^2$. Naturalmente non è crescente.

241.8.2 Se la serie converge allora $a_k \rightarrow 0$. Supponiamo che $\sum \left|1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ converga. Ne segue che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow 1$ allora $\frac{\left|\ln \frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}{\left|1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} \rightarrow 1$ per cui, data una opportuna costante positiva c , si ha

$$\sum_{k=m+1}^n \left| 1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq c \sum_{k=m+1}^n \left| \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq c \left| \sum_{k=m+1}^n \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c \left| \ln \frac{a_{n+1}}{a_{m+1}} \right| \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

242.8.2 Osserviamo che $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k = a_1 \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} + a_2 \sum_{n=2}^m \frac{2}{n(n+1)} + a_3 \sum_{n=3}^m \frac{3}{n(n+1)} + \dots + a_{m-1} \sum_{n=m-1}^m \frac{m-1}{n(n+1)} + a_m \sum_{n=m}^m \frac{m}{n(n+1)}$. Essendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ si ha $a_1(1 - \frac{1}{m+1}) + 2a_2(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}) + 3a_3(\frac{1}{3} - \frac{1}{m+1}) + \dots + (m-1)a_{m-1}(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}) + \frac{a_m}{m+1} = \sum_{k=1}^m a_k - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m k a_k$. La conclusione è raggiunta usando il risultato di rich.19 per cui si ottiene $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

243.8.2 Riscriviamo la somma come $a_0(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) + a_1 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{1} + a_2 \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{2} + a_3 \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{3} + \dots$. Essendo la serie a termini positivi è lecito. Il termine generico è $a_p \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{p} = a_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+p}} \binom{k+p-1}{p} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+p}} \binom{k+p-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+p+1}} \binom{k+p}{k}$. Deriviamo ora m volte $(1-x)^{-1}$ ed otteniamo $\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{m!} \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)(k-2) \dots (k-m+1)x^{k-m} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+m)(n+m+1)(n+m+2) \dots (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{m!n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m}{n} x^n$. Ne segue finalmente che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+p+1}} \binom{k+p}{k} = \frac{1}{2^{p+1}} \frac{1}{(1-x)^{p+1}} \Big|_{x=1/2} = 1$.

244.8.2 Supponiamo che $a > 0$. Siccome $x_n \rightarrow a$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - x_{n-1}) = L/a$ ossia definitivamente $x_n - x_{n-1} \geq L/(2an)$. Ma allora $x_n \geq C + \frac{C'L}{2a} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ con C e C' costanti opportune e quindi $x_n \rightarrow +\infty$ dato che la serie armonica diverge. Ma ciò è in contraddizione con il fatto che $x_n \rightarrow a$. Se $a < 0$ allora definitivamente $x_n \leq C + \frac{2C'L}{a} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow -\infty$

245.8.2 Scriviamo $\frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n}{b_n} \frac{1}{1 + \frac{a_n}{b_n}}$. Se $a_n/b_n > 0$ abbiamo $1 - \frac{a_n}{b_n} < \frac{1}{1 + \frac{a_n}{b_n}} < 1$ mentre se $a_n/b_n < 0$ allora $1 < \frac{1}{1 + \frac{a_n}{b_n}} < 1 - \frac{a_n}{b_n}$. Ne segue che $\frac{a_n}{b_n} \min\{1, 1 + \frac{a_n}{b_n}\} < \frac{a_n}{a_n + b_n} < \frac{a_n}{b_n} \max\{1, 1 - \frac{a_n}{b_n}\}$. Ora scriviamo $\sum_{n=p}^q \frac{a_n}{a_n + b_n} = \sum_{\substack{n=p \\ n \in A}}^q \frac{a_n}{a_n + b_n} + \sum_{\substack{n=p \\ n \in B}}^q \frac{a_n}{a_n + b_n}$ dove $a_n/b_n \geq 0$ se $n \in A$ mentre $a_n/b_n < 0$ se $n \in B$. Quindi abbiamo $\sum_{\substack{n=p \\ n \in A}}^q \frac{a_n}{b_n} + \sum_{\substack{n=p \\ n \in B}}^q \frac{a_n}{b_n} (1 + \frac{a_n}{b_n}) \leq \sum_{n=p}^q \frac{a_n}{a_n + b_n} \leq$

$\sum_{\substack{n=p \\ n \in A}}^q \frac{a_n}{b_n} + \sum_{\substack{n=p \\ n \in B}}^q \frac{a_n}{b_n} \left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right)$ ossia $\sum_{n=p}^q \frac{a_n}{b_n} + \sum_{\substack{n=p \\ n \in B}}^q \frac{a_n^2}{b_n^2} \leq \sum_{n=p}^q \frac{a_n}{a_n + b_n} \leq \sum_{n=p}^q \frac{a_n}{b_n} - \sum_{\substack{n=p \\ n \in B}}^q \frac{a_n^2}{b_n^2}$ ed essendo $\sum \frac{\alpha_n^2}{b_n^2}$ convergente, il risultato segue.

246.8.2 Utilizziamo [rich.11](#) per scrivere $\sum_{k=p}^p \frac{1}{kf(k)} = \frac{1}{q+1} \sum_{k=1}^q \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{f(k)} + \sum_{k=p}^q \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sum_{j=1}^k \frac{1}{f(j)}$ e la convergenza segue osservando che $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ dalla iniettività e poi chiaramente abbiamo $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n+1)$. Ne segue che $\frac{1}{q+1} \sum_{k=1}^q \frac{1}{f(k)} \leq \frac{\ln(q+1)}{q}$, $\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{f(k)} \leq \frac{\ln p}{p}$ e $\sum_{k=p}^q \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sum_{j=1}^k \frac{1}{f(j)} = \sum_{k=p}^q \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k \frac{1}{f(j)} \leq \sum_{k=p}^q \frac{\ln(k+1)}{k(k+1)}$. Se p e q sono grandi abbastanza, le tre precedenti quantità sono piccole e quindi si ha convergenza.

247.8.2 Supponiamo che l'integrale converga e scriviamo

$$\begin{aligned} \int_m^n \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx &= \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx \geq \\ &\geq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{f(m)} \left(\int_k^{k+1} f(x) dx - \int_k^{k+1} f(x+1) dx \right) = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{f(m)} \left(\int_k^{k+1} f(x) dx - \int_{k+1}^{k+2} f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{f(m)} \int_m^{m+1} f(x) dx - \frac{1}{f(m)} \int_n^{n+1} f(x) dx \end{aligned}$$

Ora prendiamo n così grande da rendere $\left| \frac{1}{f(m)} \int_n^{n+1} f(x) dx \right| < \varepsilon$ per cui abbiamo $\int_m^n \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx \geq \frac{1}{f(m)} \int_m^{m+1} f(x) dx - \varepsilon$. Possono accadere due cose. La prima è che *frequentemente* $\frac{1}{f(m)} \int_m^{m+1} f(x) dx \geq c > 0$ con c fissato da cui si ha la divergenza grazie a Cauchy. La seconda è che $\forall c > 0 \exists m_c: m > m_c \implies \frac{1}{f(m)} \int_m^{m+1} f(x) dx < c$ ossia $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(m)} \int_m^{m+1} f(x) dx = 0$. Consideriamo allora $\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{f(x+1)}{f(x)}\right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{f(x+1)}{f(x)}\right) \int_k^{k+1} f(x) dx$. $\int_k^{k+1} \frac{f(x+1)}{f(x)} dx \leq \frac{1}{f(k+1)} \int_k^{k+1} f(x+1) dx = \frac{1}{f(k+1)} \int_{k+1}^{k+2} f(x) dx$ il cui limite è zero per cui la serie non può convergere.

• Riportiamo anche la terza soluzione esposta nel link allegato. Se l'integrale converge, $f(x+1)/f(x) \not\rightarrow 0$. D'altra parte

$$0 < \frac{f(a+1)}{f(a)} < \frac{1}{f(a)} \int_a^{a+1} f(x) dx = \frac{1}{f(a)} \int_a^{+\infty} (f(x) - f(x+1)) dx \leq \int_a^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx$$

e l'ultimo integrale tende a zero se $a \rightarrow +\infty$ da cui la contraddizione.

248.8.2 Se $a_k \leq 1$ definitivamente per $k \geq k_0$, abbiamo $\sum \frac{1}{k} \frac{1+a_{k+1}}{a_k} \geq \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k} \frac{1+a_{k+1}}{a_k} \geq$

$$\sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k} (1+a_{k+1}) \geq \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Supponiamo ora che frequentemente $a_k > 1$ ossia esiste una sottosuccessione di termini a_{n_k} per i quali $a_{n_k} > 1$. Siano p e q tali che $a_p, a_q > 1$. Dunque $\sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{k} \frac{1+a_{k+1}}{a_k} \geq \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{k} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq$

$$\frac{1}{q} \sum_{k=p}^{q-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \frac{1}{q} (q-p) \left(\prod_{k=p}^{q-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \right)^{\frac{1}{q-p}} = \frac{q-p}{q} \left(\frac{a_q}{a_p} \right)^{\frac{1}{q-p}} \geq \frac{q-p+1}{q} \left(\frac{1}{a_p} \right)^{\frac{1}{q-p+1}}.$$

Ora prendiamo q così grande da far sì che $\frac{q-p}{q} \left(\frac{1}{a_p} \right)^{\frac{1}{q-p}} \geq \frac{1}{2}$. Siccome le coppie (p, q) tale che $a_p, a_q > 1$ sono illimitate, ne segue che è violata la condizione di Cauchy e quindi la serie diverge.

249.8.2 La dimostrazione di prima ha usato solo il fatto che $\frac{1}{k}$ è monotona e che $\sum 1/k$ diverge.

• Sia $b_k = 1/k$ se k è pari e $b_k = 0$ altrimenti. Inoltre $a_k = k$ se k è pari e $a_k = 1$ altrimenti.

$$\text{Abbiamo } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{1+a_{k+1}}{a_k} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2i} \frac{2}{2i} < +\infty.$$

Se invece $b_k = 1/k$ se k è pari e $b_k = 1$ altrimenti e $\{a_k\}$ come prima, la serie diverge.

250.8.2 Prima dimostrazione La serie non esiste. Se esistesse allora $(N-1)a_k + \frac{1}{k^N(a_k)^{N-1}} \geq \frac{N}{k}$ e quindi dovrebbe convergere pure $\sum 1/k$ il che è impossibile.

Seconda dimostrazione Prendiamo per iniziare $N = 2$. Sia $\sum a_k$ convergente e quindi $(a_m + \dots + a_n) < \varepsilon$ per ogni m grande abbastanza

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k^2 a_k} &\geq \frac{(n-m+1)^2}{m^2 a_m + (m+1)^2 a_{m+1} + \dots + n^2 a_n} \geq \\ &\geq \frac{(n-m+1)^2}{n^2 (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n)} \geq \frac{1}{2(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n)} \geq \frac{1}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

Sia ora $\sum 1/(k^2 a_k)$ convergente quindi $\frac{1}{m^2 a_m} + \dots + \frac{1}{n^2 a_n} < \varepsilon$

$$\sum_{k=m}^n a_k \geq \frac{(n-m+1)^2}{\frac{1}{a_m} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{(n-m+1)^2}{\frac{m^2}{m^2 a_m} + \dots + \frac{n^2}{n^2 a_n}} \geq \frac{(n-m+1)^2}{n^2 \left(\frac{1}{m^2 a_m} + \dots + \frac{1}{n^2 a_n} \right)} \geq \frac{1}{2\varepsilon}$$

In generale supponendo $\sum a_k$ convergente

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \frac{1}{k^N a_k^{N-1}} &\geq \frac{(n-m+1)^2}{m^k a_m^{N-1} + (m+1)^k a_{m+1}^{N-1} + \dots + n^k a_n^{N-1}} \geq \\ &\geq \frac{(n-m+1)^2}{n^2 (a_m^{N-1} + a_{m+1}^{N-1} + \dots + a_n^{N-1})} \geq \frac{1}{2(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n)} \geq \frac{1}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

Ora supponiamo $\sum 1/(k^2 a_k)$ convergente

$$\sum_{k=m}^n a_k \geq \frac{(n-m+1)^2}{\frac{1}{a_m} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{(n-m+1)^2}{\frac{m^{N-1}}{m^{N-1} a_m} + \dots + \frac{n^{N-1}}{n^{N-1} a_n}} \geq \frac{(n-m+1)^2}{n^2 \left(\frac{1}{m^{N-1} a_m} + \dots + \frac{1}{n^{N-1} a_n} \right)} \geq \frac{1}{2\varepsilon}$$

251.8.2 Si applichi rich.20

252.8.2 Siccome $a_k^{p-1}/n^{1/p}$ è decrescente, si ha che $k^{\frac{p-1}{p}} a_k^{p-1}$ tende a zero ossia $a_k k^{1/p} \rightarrow 0$.

Poi scriviamo $\sum a_k^p = \sum \frac{a_k^{p-1} a_k}{k^{1/p}} \leq C \sum \frac{a_k^{p-1}}{k^{1/p}}$ e chiaramente converge.

253.8.2 Osserviamo che $e^{a_n} = a_n e^{a_{n+1}} + 1 = 1 + a_n(a_{n+1} e^{a_{n+2}} + 1) = 1 + a_n + a_n a_{n+1}(a_{n+2} e^{a_{n+3}} + 1)$ e quindi $e^{a_1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_{n+1}} \prod_{k=1}^n a_k$. Dalla relazione $e^{a_n}(1 - a_n) < 1$ segue che $a_{n+1} < a_n$ e siccome $a = 0$ è l'unico punto fisso dell'applicazione $x = \ln \frac{e^x - 1}{x}$, segue che $a_n \rightarrow 0$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_{n+1}} \prod_{k=1}^n a_k = 0$. Il risultato è evidentemente $e^{a_1} - 1$.

Per dimostrare che $a_n \rightarrow 0$ si può pure osservare che $\ln \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2}x + O(x^2) < (1/2 + \varepsilon)x$ e iterando tende a zero.

254.8.2 $-e^{a_{n+1}} + e^{a_n} = a_n$ da cui $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N e^{a_n} - e^{a_{n+1}} = e^{a_1} - e^{a_{N+1}}$.

$a_n \geq 0$ per induzione.

$a_{n+1} \leq a_n$ se e solo se $e^{a_n} - a_n \leq e^{a_n}$ che è vera. Ne segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Infatti se $a_n \rightarrow L$ deve aversi $e^L - e^L = L$ ossia $L = 0$ e quindi $e^{a_1} - e^{a_{N+1}} \rightarrow e^{a_1} - 1 = e - 1 + 1 = e$

255.8.2 $\sum_{k=1}^n A_k \geq \sum_{k=1}^n \frac{a_1}{k} \sim a_1 \ln n \rightarrow +\infty$.

Per quanto riguarda $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k}$ possiamo maggiorare $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ ma

tale serie abbiamo visto diverge. La disuguaglianza di Carleman è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k} \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[a_1 \cdot 2a_2 \cdots na_n]^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{1/n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n(n!)^{1/n}} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n(n+1)} = \\ &= e \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \end{aligned}$$

256.8.2 Converge se e solo se $\alpha > 0$. Se $\alpha \leq 0$ il termine generale non tende a zero e quindi la serie non può convergere. Se $\alpha > 1$ converge assolutamente. Se $0 < \alpha \leq 1$ si tenga presente che $|\cos(\ln n + 1) - \cos(\ln n)| \leq \frac{1}{n}$ e si applichi rich.11.

257.8.2 Osserviamo

$$\sum \frac{a_k}{A_k (\ln A_k)^{1+r}} \leq \sum \frac{\ln A_k - \ln A_{k-1}}{\ln^{1+r} A_k} \quad (1)$$

Infatti

$$\frac{a_k}{A_k} = \frac{A_k - A_{k-1}}{A_k} \leq \ln\left(1 + \frac{A_k - A_{k-1}}{A_{k-1}}\right),$$

Ciò segue da $(1 - x) \leq -\ln x$ per $0 < x < 1$ e $x = A_{k-1}/A_k$. Grazie a rich.21, la serie destra in (1) converge. Il termine generale della serie è $\ln A_k - \ln A_{k-1}$.

258.8.2 La parte della convergenza è come prima per cui ora ci interessiamo solo della divergenza per $r \leq 0$. Supponiamo che $A_{n-1}/A_n \geq c > 0$. Ne segue che $a_k/A_k \geq c(\ln A_k - \ln A_{k-1})$, da cui la divergenza in quanto

$$\sum_{k=m}^n \frac{\ln A_k - \ln A_{k-1}}{\ln^{1+r} A_k} \geq \frac{1}{\ln A_n^{1+r}} \sum_{k=m}^n \ln A_k - \ln A_{k-1} = \frac{1}{\ln A_n^{1+r}} (\ln A_n - \ln A_{m-1}) \geq 1/2$$

Semplici calcoli mostrano che se $0 < c \leq x \leq 1$, allora $1 - x \geq -c \ln x$. Sia infatti $g(x) = A \ln x + 1 - x$ con $0 < c \leq x \leq 1$ e vogliamo trovare il valore più piccolo di A perché $g(x) \geq 0$. $g(1) = 0$, e $g(c) = A \ln c + 1 - c \geq 0$ da cui $A \leq (c-1)/\ln c$. $g'(x) = \frac{A}{x} - 1 \leq 0$ se e solo se $x \geq A$ per cui vogliamo $A \leq c$ e quindi $A \leq \min\{c, \frac{c-1}{\ln c}\} = c$ con $0 < c \leq 1$.

La condizione $A_{n-1}/A_n \geq c > 0$ non può essere abbandonata. Si prenda $A_k = k^k$ e si osservi $A_{k-1}/A_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ ma $\sum \frac{a_k}{A_k \ln^{1+r} A_k} = \sum \frac{k^k - (k-1)^{k-1}}{k^k} \frac{1}{k^{1+r} \ln^{1+r} k}$ diverge se $r < 0$. Se invece si prende $A_n = n^{n^n}$ allora $\sum \frac{a_k}{A_k \ln^{1+r} A_k} = \sum \frac{k^{k^k} - (k-1)^{(k-1)^{k-1}}}{k^{k^k}} \frac{\ln^{-(1+r)} k}{k^{k(1+r)}}$ converge per $r > -1$.

259.8.2 Vediamo la convergenza. Usando la stima precedente

$$\frac{a_k}{A_k} = \frac{A_k - A_{k-1}}{A_k} \leq \ln\left(1 + \frac{A_k - A_{k-1}}{A_{k-1}}\right),$$

si ha

$$\sum \frac{d_k}{S_k (\ln \ln S_k)^{1+\alpha}} \leq \sum \frac{\ln S_k - \ln S_{k-1}}{\ln S_k (\ln \ln S_k)^{1+\alpha}}$$

Detta $q_k = \ln S_k - \ln S_{k-1}$ e $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$, si ha

$$\sum \frac{\ln S_k - \ln S_{k-1}}{\ln S_k (\ln \ln S_k)^{1+\alpha}} = \sum \frac{q_k}{Q_k (\ln Q_k)^{1+\alpha}}$$

ed utilizziamo il risultato già dimostrato per dire che se $\alpha > 0$ la serie converge. Per quanto riguarda la divergenza, se $S_{n-1}/S_n \geq c > 0$, allora possiamo scrivere

$$\sum \frac{d_k}{S_k (\ln \ln S_k)^{1+\alpha}} \geq c \sum \frac{\ln S_k - \ln S_{k-1}}{\ln S_k (\ln \ln S_k)^{1+\alpha}}$$

che diverge se $\alpha \leq 0$.

260.8.2 Definiamo $D_k = d_k$ se $d_k \leq 1$, $D_k = 1$ se $d_k > 1$. $S_n = \sum_{k=1}^n D_k \rightarrow +\infty$, e sia $c_k = \frac{D_k}{S_k (\ln S_k)^{1+\beta}}$ $\beta > 0$. Chiaramente $c_k \leq d_k$ e grazie ad uno dei risultati dimostrati sopra, $\sum c_k = +\infty$. Inoltre

$$\sum c_k^\alpha = \sum \frac{D_k^\alpha}{S_k^\alpha (\ln S_k)^{(1+\beta)\alpha}} \geq \sum \frac{D_k}{S_k^\alpha (\ln S_k)^{(1+\beta)\alpha}} = +\infty, \quad \alpha < 1$$

261.8.2 The series converges for any $\beta > \alpha + 1$. If $\beta = \alpha + 2$ the second formula holds.

Convergence.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n + \ln(n+1)}{n-1 + \ln n} \frac{\alpha + n + \ln n}{\beta + n + 1 + \ln(n+1)}$$

whose asymptotic expansion gives

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{\alpha - \beta}{k} + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

Doing the same expansion with the sequences

$$b_n = \frac{1}{n \ln n}, \quad c_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

we get

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k \ln k} + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right), \quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 - \frac{1}{k} - \frac{2}{k \ln k} + O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

If $\beta > \alpha + 1$ we have asymptotically

$$0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

The theory of the series with definite sign implies the convergence of the series $\sum a_n$ provided that $\sum c_n$ converges. Since the convergence of $\sum c_n$ is well known (integral test of Cauchy–condensation test), it follows the convergence of $\sum a_n$ for any $\beta > \alpha + 1$

If $\beta \leq \alpha + 1$ we have

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{b_n}{b_{n-1}} > 0$$

yielding the divergence of $\sum a_n$ provided that $\sum b_n$ diverges but this is a well known fact as well.

Summarizing the series converges if and only if $\beta > \alpha + 1$.

To prove

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)\right) = (\alpha + 1)(\alpha + 2 + \ln 2) - \frac{(\alpha + 1)^2}{2}$$

we write (the series converges absolutely so we can break into two parts)

$$a_n = (\alpha + n + 1 + \ln(n+1)) \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)} - (\alpha + 1) \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)}$$

which we write as $a_n = p_n - (\alpha + 1)q_n$.

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\alpha + n + 1 + \ln(n+1)}{\beta + n + 2 + \ln(n+2)}$$

thus

$$\beta(q_{n+1} - q_n) + (\beta - \alpha)q_n + q_{n+1}(n+2) - q_n(n+1) = q_n \ln(n+1) - q_{n+1} \ln(n+2)$$

Since $q_{n+1} \leq q_n$ (the sequence $\{q_n\}$ is monotonic) we employ the following well known Lemma

Lemma *A convergent series $\sum q_n$ of positive monotonic terms satisfies $\lim_{n \rightarrow \infty} nq_n = 0$*

By summing for $1 \leq n \leq N$ and telescoping we have

$$\beta(q_{N+1} - q_1) + (\beta - \alpha) \sum_{n=1}^N q_n + q_{N+1}(N+2) - 2q_1 = q_1 \ln 2 - q_{N+1} \ln(N+2)$$

Doing $N \rightarrow \infty$ and employing the Lemma we get $\left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \doteq U\right)$

$$-a_1 U + (\beta - \alpha)U - a_1(2 + \ln 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U = \frac{\alpha + 1}{\beta - \alpha}$$

As for $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ we write

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\alpha + n + 2 + \ln(n+2)}{\beta + n + 2 + \ln(n+2)}$$

from which

$$\begin{aligned} & \beta(p_{n+1} - p_n) + (\beta - \alpha)p_n + (p_{n+1}(n+2) - p_n(n+2)) - p_n = \\ & = (p_n \ln(n+1) - p_{n+1} \ln(n+2)) + (p_n \ln(n+2) - p_n \ln(n+1)) \end{aligned}$$

Since p_n is obviously also monotonic, by summing as above and telescoping we get

$$-\beta a_1 + (\beta - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} p_n - 2p_1 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

thus

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_n &= \frac{p_1(\beta + 2 + \ln 2)}{\beta - \alpha - 1} + \frac{1}{\beta - \alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2 + \ln 2)}{\beta - \alpha - 1} + \frac{1}{\beta - \alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Finally

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n - (\alpha + 1)q_n = \\ &= \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2 + \ln 2)}{\beta - \alpha - 1} + \frac{1}{\beta - \alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{(\alpha + 1)^2}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

and for $\beta = \alpha + 2$ we get the result.

262.8.2

263.8.2

264.8.2 Prima dimostrazione ([RRA]) Da Cauchy-Schwarz

$$(1 + 2 + \dots + k)^2 = \left(\sqrt{a_1} \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \dots + \sqrt{a_k} \frac{k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \leq \sum_{j=1}^k a_k \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j}$$

$$\text{da cui } k^2 \leq \frac{4}{(k+1)^2} \sum_{j=1}^k a_k \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j}, \quad S_k = a_1 + \dots + a_k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k k^2}{S_k^2} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{S_k^2} \frac{4}{(k+1)^2} \sum_{j=1}^k a_k \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{S_k} \frac{4}{(k+1)^2} \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)^2} \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} = \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^2}{a_j} \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)^2} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^2}{a_j} \frac{1}{j^2} = 4 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{a_j} \end{aligned}$$

Seconda dimostrazione (da [KN])

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{k^2 a_k}{S_k^2} &= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{k^2 (S_k - S_{k-1})}{S_k^2} \leq \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{k^2 (S_k - S_{k-1})}{S_k S_{k-1}} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{S_{k-1}} - \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{S_k} = \\ &= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^2}{S_k} - \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{S_k} = \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{(k+1)^2}{S_k} - \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{S_k} = \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{2k+1}{S_k} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{k \sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k} S_k} \leq \sqrt{\sum_{k=2}^n \frac{k^2 a_k}{S_k^2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k}} \Rightarrow \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{2k+1}{S_k} \leq \frac{5}{a_1} + \left[\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{S_k^2}} + 1 \right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

da cui, se indichiamo $a = 5/a_1$, $b = 1/a_1 + \dots + 1/a_n$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{S_k^2} \leq \frac{5}{a_1} + \left[\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{S_k^2}} + 1 \right] \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{S_k^2} \leq \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4a + 4b}}{2}}$$

e la serie converge.

265.8.2 Come prima

$$\frac{k^2 (k+1)^2}{4} = \left[\sqrt{a_1} \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2} \frac{2}{\sqrt{a_2}} + \dots + \sqrt{a_k} \frac{k}{\sqrt{a_k}} \right]^2 \leq \sum_{j=1}^k a_k \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k S_k} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{4}{k S_k (k+1)^2} \sum_{j=1}^k a_k \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} = \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \sum_{k=j}^n \frac{4}{k(k+1)^2} = \\ &= 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \sum_{k=j}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] = 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=j}^n \frac{1}{(k+1)^2} \right] \leq \\ &\leq 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \left[\frac{1}{j} - \int_j^n \frac{dx}{(x+1)^2} \right] \leq 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \leq 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{j^2 a_j} = \sum_{j=1}^n \frac{4}{a_j} \end{aligned}$$

266.8.2 Sia $\{N_k\} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ una successione crescente di interi da scegliere e sia $I_k = \{1, 2, \dots, N_k\}$.

$$\sum_{k \in A} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n \in (A \cap I_k) \setminus (A \cap I_{k-1})} \frac{1}{n} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{N_k} (|A \cap I_k| - |A \cap I_{k-1}|).$$

Sia $|A \cap I_k| \geq N_k(r - \varepsilon/2)$ dove $r = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|A \cap I_k|}{N_k}$. Abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{N_k} (|A \cap I_k| - |A \cap I_{k-1}|) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{N_k} (N_k(r - \varepsilon/2) - N_{k-1}).$$

Ora prendiamo $\varepsilon = r/2$ e dato N_{k-1} , prendiamo $N_k \geq (4N_{k-1})/r$. In tal modo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{N_k} (N_k(r - \varepsilon/2) - N_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{N_k} \frac{rN_k}{4} = \frac{r}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

267.8.2 Se convergesse, detta $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, dovrebbe aversi $S \leq S - a_1$ e questo è impossibile.

268.8.2 Supponiamo $a_k \nearrow l$ con l finito. Si ha $S_k \geq a_1 k$ per cui

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^p}{S_k^p} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{l^p}{a_1^p k^p} < +\infty$$

e quindi converge.

Sia ora $a_k \rightarrow +\infty$. Dividiamo gli interi in due sottoinsiemi, N_1 e N_2 . In N_1 ci sono gli interi n per cui $S_n \geq a_n n/2$. In tal modo abbiamo $\sum_{k \in N_1} \frac{a_k^p}{S_k^p} \leq \sum_{k \in N_1} \frac{2^p}{k^p} < +\infty$.

Sia ora $k \in N_2$ ossia $S_k \leq a_k k/2$. Usiamo il seguente risultato, vedi Rich.20

Ipotesi. Sia $d_k \geq 0$, $d_0 = 0$, e $D_n = \sum_{k=1}^n d_k \rightarrow +\infty$. Sia $f(x)$ una funzione definita per $x \geq 0$,

decrecente e tale che $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$.

Tesi. Allora $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k f(D_k)$ converge. Infatti $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k f(D_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (D_k - D_{k-1}) f(D_k) \leq$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{D_{k-1}}^{D_k} f(x)dx = \int_{d_0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Sia data ora $f(x)$ tale che $xf(x)$ è decrescente e $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. Definiamo $d_1 = a_1$ mentre

per $n \geq 2$ definiamo $d_n = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{na_n - S_n}{n(n-1)} > 0$. Si ha $D_n = \sum_{k=1}^n d_k = \frac{S_n}{n} \rightarrow +\infty$. Basta

scrivere $\frac{S_n}{n} \geq \frac{a_{n/2+1} + \dots + a_n}{n} \geq \frac{1}{2} a_{n/2+1} \rightarrow +\infty$. La serie $\sum_{k \in N_2} d_k f(D_k)$ converge ed inoltre

$$\sum_{k \in N_2} d_k f(D_k) = \sum_{k \in N_2} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \right) f\left(\frac{S_k}{k}\right). \text{ Possiamo minorare } \frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \geq \frac{S_k}{k} \left(\frac{a_k}{S_k} - \frac{1}{k} \right).$$

Infatti si traduce in $\frac{a_k}{k} + \frac{S_{k-1}}{k-1} \leq \frac{S_k}{k} + \frac{S_k}{k^2}$ che è equivalente a $\frac{S_{k-1}}{k-1} \leq \frac{S_{k-1}}{k} + \frac{S_k}{k^2}$ che a sua

volta equivale a $S_k \leq ka_k$. Quindi arriviamo a $\infty > \sum_{k \in N_2} d_k f(D_k) = \sum_{k \in N_2} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \right) f\left(\frac{S_k}{k}\right) \geq$

$\sum_{k \in N_2} \left(\frac{a_k}{S_k} - \frac{1}{k} \right) \frac{S_k}{k} f\left(\frac{S_k}{k}\right) \geq \sum_{k \in N_2} \left(\frac{a_k}{S_k} - \frac{1}{k} \right) \frac{S_k}{a_k} f\left(\frac{S_k}{a_k}\right) = \sum_{k \in N_2} \left(1 - \frac{S_k}{a_k k} \right) f\left(\frac{S_k}{a_k}\right) \geq \sum_{k \in N_2} \frac{1}{2} f\left(\frac{S_k}{a_k}\right)$. Se ora si prende $f(x) = x^{-p}$, $p > 1$, si ha il risultato.

269.8.2 Si procede come sopra. Supponiamo $a_k \nearrow l$ con l finito. Si ha $S_k \geq a_1 k$.

Usiamo il seguente risultato, vedi [\[rich.20\]](#)

Ipotesi. Sia $d_k \geq 0$, $d_0 = 0$, e $D_n = \sum_{k=1}^n d_k \rightarrow +\infty$. Sia $f(x)$ una funzione definita per $x \geq 0$, decrescente e tale che $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$.

Tesi. Allora $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k f(D_k)$ converge. Infatti $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k f(D_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (D_k - D_{k-1}) f(D_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{D_{k-1}}^{D_k} f(x)dx = \int_{d_0}^{+\infty} f(x)dx$. *fine della dimostrazione del risultato*

$$\frac{S_k r_k}{a_k} \geq \frac{a_1 k r_k}{l} \geq \frac{a_1 k}{l} \text{ e quindi } \frac{S_k r_k}{a_k} f\left(\frac{S_k r_k}{a_k}\right) \leq \frac{a_1 k}{l} f\left(\frac{a_1 k}{l}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r_k f\left(\frac{S_k r_k}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{S_k} \frac{S_k r_k}{a_k} f\left(\frac{S_k r_k}{a_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{l}{a_1 k} \frac{a_1 k}{l} f\left(\frac{a_1 k}{l}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} f\left(\frac{a_1 k}{l}\right) < +\infty$$

Sia ora $a_k \rightarrow +\infty$. Dividiamo gli interi in due sottoinsiemi, N_1 e N_2 . In N_1 ci sono gli interi n per cui $S_n \geq a_n n/2$. Quindi $\frac{S_k r_k}{a_k} \geq \frac{n r_k}{2} \geq \frac{n}{2}$ e $\frac{S_k r_k}{a_k} f\left(\frac{S_k r_k}{a_k}\right) \leq \frac{k}{2} f\left(\frac{k}{2}\right)$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r_k f\left(\frac{S_k r_k}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{S_k} \frac{S_k r_k}{a_k} f\left(\frac{S_k r_k}{a_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k} \frac{k}{2} f\left(\frac{k}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2}\right) < +\infty$$

Sia ora $k \in N_2$ ossia $S_k \leq a_k k/2$. Definiamo $d_1 = a_1$ mentre per $n \geq 2$ definiamo $d_n = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{n a_n - S_n}{n(n-1)} > 0$. Si ha $D_n = \sum_{k=1}^n d_k = \frac{S_n}{n} \rightarrow +\infty$. Basta scrivere

$\frac{S_n}{n} \geq \frac{a_{n/2+1} + \dots + a_n}{n} \geq \frac{1}{2} a_{n/2+1} \rightarrow +\infty$. La serie $\sum_{k \in N_2} d_k f(D_k)$ converge ed inoltre

$\sum_{k \in N_2} d_k f(D_k) = \sum_{k \in N_2} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \right) f\left(\frac{S_k}{k}\right)$. Possiamo minorare $\frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \geq \frac{S_k}{k} \left(\frac{a_k}{S_k} - \frac{1}{k} \right)$. Infatti

si traduce in $\frac{a_k}{k} + \frac{S_{k-1}}{k-1} \leq \frac{S_k}{k} + \frac{S_k}{k^2}$ che è equivalente a $\frac{S_{k-1}}{k-1} \leq \frac{S_{k-1}}{k} + \frac{S_k}{k^2}$ che a sua volta equiv-

ale a $S_k \leq k a_k$. Quindi arriviamo a $\infty > \sum_{k \in N_2} d_k f(D_k) = \sum_{k \in N_2} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{S_{k-1}}{k-1} \right) f\left(\frac{S_k}{k}\right) \geq \sum_{k \in N_2} \left(\frac{a_k}{S_k} - \frac{1}{k} \right) \frac{S_k}{k} f\left(\frac{S_k}{k}\right) \geq \sum_{k \in N_2} \left(\frac{a_k}{S_k} - \frac{1}{k} \right) \frac{r_k S_k}{a_k} f\left(\frac{r_k S_k}{a_k}\right) = \sum_{k \in N_2} \left(1 - \frac{S_k}{a_k k} \right) r_k f\left(\frac{r_k S_k}{a_k}\right) \geq \sum_{k \in N_2} \frac{r_k}{2} f\left(\frac{r_k S_k}{a_k}\right)$ da cui la convergenza.

Se $\{r_k\}$ è limitata avremmo la convergenza di $\sum_{k \in N_2} f\left(\frac{S_k}{a_k}\right)$ come nel precedente esercizio.

Se $\{r_k\}$ è illimitata, allora possiamo dare una successione a_k tale che $\sum_{k \in N_2} \frac{r_k}{2} f\left(\frac{S_k r_k}{a_k}\right)$ converga ma $\sum_{k \in N_2} f\left(\frac{S_k}{a_k}\right)$ diverge.

Sia $r_1 = 1$, $r_{k_p} \geq n_p r_{k_p}$ e definiamo $a_k = k_p r_{k_p}$ per $k_p \leq k < k_{p+1}$, $p = 1, 2, \dots$. Si ha $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq k r_k$ e per $m = 2, 3, \dots$

$$S_{k_m} - a_{k_m} = \sum_{p=1}^{m-1} (k_{p+1} - k_p) k_p r_{k_p} \leq k_m r_{k_m} = a_{k_m} \implies \frac{a_n}{a_m} \leq 2 \text{ per } k = k_m, m \geq 2$$

da cui la divergenza di $\sum_{k \in N_2} f\left(\frac{S_k}{a_k}\right)$

270.8.2 Evidentemente $a_k \rightarrow 0$ e quindi $A_k \leq M k$ e poi usare Hölder.

271.8.2 Supponiamo che $\sum 1/f(k)$, converga. Chiaramente $f(k)$ è crescente e quindi per ogni c positivo, da [\[rich.5\]](#) definitivamente $f(k) \geq ck$. Detta $A_n = \sum_{k=1}^n f^{(-1)}(k)$ e $b_k = 1/k^2$ ed

usando [\[rich.11\]](#), scriviamo $\sum_{k=p}^q \frac{f^{(-1)}(k)}{k^2} = \frac{A_q}{q^2} - \frac{A_{p-1}}{(p-1)^2} - \sum_{k=p}^q A_{k-1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(1-k)^2} \right)$. Da $f(k) \geq ck$ segue $k \geq f^{(-1)}(ck)$ e quindi definitivamente $k/c \geq f^{(-1)}(k)$ dove abbiamo usato il fatto che $f^{(-1)}(k)$ è crescente. Da ciò segue che per ogni $c > 0$ definitivamente abbiamo $A_q/q^2 \leq c^{-1}$ che equivale a dire $\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{A_q}{q^2} = 0$. Per quanto riguarda $\sum_{k=p}^q A_{k-1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(1-k)^2} \right) \leq \sum_{k=p}^q \frac{A_k}{k^2} -$

$\sum_{k=p}^q \frac{A_{k-1}}{(1-k)^2}$ e ripetiamo il ragionamento.

Supponiamo ora che $\sum 1/f(k)$ diverga. Allora frequentemente $\sum_{k=p}^q \frac{1}{f(k)} \geq \varepsilon$ per un certo $\varepsilon > 0$.

Dalla monotonia di $f(k)$ si ha $\frac{1}{f(p)}(q-p+1) \geq \varepsilon$. Ciò implica $\frac{1}{f(p)}(Np-p+1) \geq \frac{1}{f(p)}(q-p+1) \geq \varepsilon$ per un N grande abbastanza e quindi $\frac{1}{f(k)} \geq \frac{C\varepsilon}{k}$ e quindi $k \geq C\varepsilon f(k)$. Ne segue $f^{(-1)}(k) \geq f^{(-1)}(C\varepsilon f(k))$ ossia $f^{(-1)}\left(\frac{k}{C\varepsilon}\right) \geq k$ ossia $f^{(-1)}(k) \geq C\varepsilon k$. Ma allora $\frac{f^{(-1)}(k)}{k^2} \geq \frac{C\varepsilon k}{k^2} = \frac{C\varepsilon}{k}$

e quindi frequentemente $\sum_{k=p}^q \frac{f^{(-1)}(k)}{k^2} \geq \sum_{k=p}^q \frac{C\varepsilon}{k}$. Dalla positività di $f(k)$ segue che prendendo

r grande abbastanza $\sum_{k=p}^r \frac{1}{f(k)} \geq \sum_{k=p}^q \frac{1}{f(k)} \geq \varepsilon$ e quindi $\sum_{k=p}^r \frac{f^{(-1)}(k)}{k^2} \geq \sum_{k=p}^r \frac{C\varepsilon}{k}$ e non è una quantità piccola per r sufficientemente grande.

272.8.2 Sia $\sum a_k < +\infty$. Da [\[rich.5\]](#) si ha $ka_k \rightarrow 0$ e quindi $a_k = o(1/k)$. Poi usiamo [\[rich.11\]](#) e scriviamo $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1})k = \sum_{k=m}^n a_k + a_m m - a_{n+1}(n+1)$ da cui si vede che tale quantità è positiva e minore di ε da cui la convergenza.

Siano ora come ipotesi $a_k = o(1/k)$ e $\sum (a_k - a_{k+1})k < +\infty$. Da $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1})k - a_m m + a_{n+1}(n+1) = \sum_{k=m}^n a_k$ segue la tesi.

273.8.2 Come ipotesi assumiamo $\sum a_k/k < +\infty$. La successione a_k/k è monotona per cui $\sum a_k/k$ converge se e solo se converge $\sum 2^k \frac{a_{2^k}}{2^k} = \sum a_{2^k}$ rich.3. Essendo $b_k \doteq a_{2^k}$ monotona, sempre da rich.5 abbiamo $ka_{2^k} \rightarrow 0$ ossia $\ln k \cdot a_k \rightarrow 0$. Scriviamo ora

$$0 \leq \sum_{k=m}^n (a_n - a_{n+1}) \log n = \sum_{k=m}^n (\log(k+1) - \log k) a_{k+1} + a_m \log m - a_{n+1} \ln(n+1)$$

Siccome $\ln(k+1) - \ln k \sim 1/k$ abbiamo che la parte destra è piccola tanto quanto vogliamo. Viceversa supponiamo che $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) \log k < +\infty$ e che $a_k = o(1/\ln k)$. La formula

$$0 \leq \sum_{k=m}^n (a_n - a_{n+1}) \log n = \sum_{k=m}^n (\log(k+1) - \log k) a_{k+1} + a_m \log m - a_{n+1} \ln(n+1)$$

e $\ln(k+1) - \ln k \sim 1/k$ dimostra il risultato.

274.8.2 Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che $n > n_\varepsilon$ implica $\frac{n}{\ln n}(1-\varepsilon) < q_n < \frac{n}{\ln n}(1+\varepsilon)$. Sia ora $\{n_k\}$ una successione strettamente crescente di numeri positivi tali che $n_k \rightarrow +\infty$. Sia A_k l'insieme dei numeri primi minori o uguali a n_k , e maggiori di n_{k-1} . Certamente la cardinalità di A_k è maggiore o uguale a $(1-\varepsilon)\frac{n_{k+1}}{\ln n_{k+1}} - (1+\varepsilon)\frac{n_k}{\ln n_k}$. Inoltre se prendiamo $n_k = 2^k$, possiamo dire che $(1-\varepsilon)\frac{n_{k+1}}{\ln n_{k+1}} - (1+\varepsilon)\frac{n_k}{\ln n_k} \geq c_\varepsilon \frac{n_{k+1}}{\ln n_{k+1}}$.

Inoltre all'interno di A_k abbiamo $1/p_k \geq 1/n_{k+1}$. Ne segue che

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \sum_{p_j \in A_k} \frac{1}{p_j} \geq \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{1}{n_{k+1}} c_\varepsilon \frac{n_{k+1}}{\ln n_{k+1}} = \frac{1}{2} c_\varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1) \ln 2} = +\infty$$

Un altro modo di procedere è il seguente. Dal fatto che la media aritmetica è maggiore o uguale alla media armonica e detta $\#A_k$ la cardinalità di A_k , si ha $\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} \geq \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{(\#A_k)^2}{\sum_{p_j \in A_k} p_j} \geq$

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{(\#A_k)^2}{(\#A_k)n_{k+1}} \geq c_\varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n_{k+1}} = +\infty.$$

Vediamo ora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{np_n - (n-1)p_{n-1}}$ che riscriviamo come

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{kp_k - (k-1)p_{k-1}} &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^{n-1}-1)^2}{\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} kp_k - (k-1)p_{k-1}} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^{n-1}-1)^2}{(2^n-1)p_{2^{n-1}} - (2^{n-1}-1)p_{2^{n-1}-1}} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^n-1)^2}{(2^n-1)p_{2^{n-1}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n-1}{p_{2^{n-1}}} = +\infty \end{aligned}$$

per il criterio di condensazione di Cauchy essendo $\{1/p_n\}$ monotona e $\sum 1/p_n$ divergente.

275.8.2 La disuguaglianza di Young ci dice che $\int_0^a f + \int_0^b h \geq ab$ e quindi $\sum \int_0^{a_k} f + \sum \int_0^{b_k} h \geq \sum a_k b_k$. Siccome $\int_0^a f(x)dx \leq af(a)$ la seconda parte è ovvia.

276.8.2 Usiamo la seconda parte dell'esercizio precedente. La funzione $f(x) = -1/\ln x$ e tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ed inoltre l'inversa è $h(x) = e^{-1/x}$. La derivata è $f'(x) = 1/(x \ln^2 x) > 0$.

Dalla convergenza della serie $\sum e^{-\frac{1}{b_k}}$ segue la convergenza della serie $\sum b_k e^{-\frac{1}{b_k}}$ semplicemente usando il fatto che $b_k \rightarrow 0$. Quindi dalla convergenza di $\sum \frac{a_k}{\ln \frac{1}{a_k}} + \sum e^{-\frac{1}{b_k}}$ segue la convergenza di $\sum a_k b_k$

277.8.2 Sappiamo che se $\sum c_n$ è una serie convergente a termini positivi e $\sum d_n$ è una serie divergente a termini sempre positivi, deve aversi $\overline{\lim} d_n/c_n = +\infty$. Sia ora $\beta = \alpha$ ($\beta > \alpha$ è chiaramente compreso). Abbiamo $\overline{\lim} \left(\frac{\ln a_k}{\ln k} \right)^\alpha = +\infty$. Supponiamo che $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{a_k (\ln k)^\alpha}$ diverge.

Sia ora $p > 1$ e $\{k_i\}$ la più ampia sottosuccessione tale che $\ln a_{k_i}/\ln k_i \geq p$. Quindi segue $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{k_i} (\ln k_i)^\alpha} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{k_i^p (\ln k_i)^\alpha}$ e quindi converge. Ne segue che $\sum_{k \neq k_i}^{+\infty} \frac{1}{a_k (\ln k)^\alpha}$ diverge mentre $\sum_{k \neq k_i}^{+\infty} \frac{1}{a_k (\ln a_k)^\alpha}$ converge e quindi $\overline{\lim}_{k \neq k_i} \left(\frac{\ln a_k}{\ln k} \right)^\alpha = +\infty$. Ma allora la successione $\{k_i\}$ non era la più ampia possibile. La contraddizione si risolve dicendo che la serie $\sum (a_k \ln^\beta k)^{-1}$ converge.

Sia $\beta < \alpha$ e sia $a_k = k(\ln k)^{1-\beta}$. Abbiamo $\sum \frac{1}{a_k \ln^\beta k} = \sum \frac{1}{k \ln k} = +\infty$. D'altra $\ln a_k = \ln k + (1-\beta) \ln \ln k \geq \ln k/2$ definitivamente. Quindi per una opportuna costante positiva C si ha che $\sum \frac{1}{a_k \ln^\alpha a_k} \geq C \sum \frac{1}{k (\ln k)^{1+\alpha-\beta}}$ converge per cui il risultato vale solo se $\beta \geq \alpha$.

Inoltre si può dare una successione $\{a_k\}$ tale che $\sum \frac{1}{a_k (\ln k)^\alpha}$ converge ma $\sum \frac{1}{a_k (\ln a_k)^\alpha}$ diverge. Basta prendere una sottouccessione di interi $\{k_i\}$ tali che $\sum (\ln k_i)^{-\alpha}$ converge e definire $a_{k_i} = a$, e $a_k = k^2$ altrimenti. La serie $\sum \frac{1}{a_k (\ln k)^\alpha}$ converge ma la serie $\sum \frac{1}{a_k (\ln a_k)^\alpha}$ diverge in quanto $\sum_{k=k_i} \frac{1}{a_k (\ln a_k)^\alpha} = \sum_{k=k_i} \frac{1}{a (\ln a)^\alpha} = +\infty$.

Sia $\alpha = \beta = 1$. $a_k = 2$ se $k = f(j)$ con $f(j)$ grande abbastanza e per ogni intero j . Per gli altri valori di k prendiamo $a_k = 1/k^2$. Abbiamo $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{\ln k} = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2}{\ln f(j)} + \sum_{k \neq f(j)} \frac{1}{k^2 \ln k}$. Se prendiamo $f(j) = 2^{j^2}$ abbiamo convergenza. D'altro canto $\sum \frac{a_k}{\ln a_k} \geq \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2}{\ln 2} = +\infty$

278.8.2 Applichiamo l'esercizio precedente con $\alpha = 1$. Sia $a_k = 1/\ln k$. $h(x) = -1/\ln x$ per $x \leq 1/e$ e per $x > 1/e$ la prolunghiamo in modo strettamente crescente. Il risultato precedente ci dice che se $\sum b_k h(b_k) = \sum \frac{1}{c_k \ln c_k}$ converge, allora converge pure $\sum b_k a_k = \sum \frac{1}{c_k \ln k}$ e

ciò acce vero. Inoltre si ha chiaramente $f(x) = e^{-1/x}$ per cui $\sum b_k f(b_k) = \sum \frac{1}{k \ln k} = +\infty$.

279.8.2 Come funzione $H(x)$ prendiamo $\int h(x)dx$ e $F(x) = \int f(x)dx$ delle precedenti.

$$F(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{y}} dy = xe^{-\frac{1}{x}} - \int_0^x e^{-\frac{1}{y}} \frac{dy}{y}. H(x) = \frac{-x}{\ln x} - \int_0^x \frac{dy}{\ln^2 y}$$

280.8.2 1) Vedere [\[rich.22\]](#). 2) Supponiamo che $\sum \frac{a_k}{\ln(1+k)} \ln \frac{1}{a_k}$ diverga. Ne segue $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_k \ln(1+k)} \ln \frac{1}{a_k} = +\infty$ ossia $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+k)} \ln \frac{1}{a_k} = +\infty$. Sia $\{k_i\}$ la più ampia successione tale che $\frac{1}{\ln(1+k_i)} \ln \frac{1}{a_{k_i}} > p$ per un certo $p > 1$. Ne segue che $a_{k_i} < \frac{1}{(k_i + 1)^p}$ e quindi $\sum_{k=k_i} \frac{a_k}{\ln(1+k)} \ln \frac{1}{a_k}$ converge. Ma allora $\sum_{k \neq k_i} \frac{a_k}{\ln(1+k)} \ln \frac{1}{a_k}$ diverge mentre certamente $\sum_{k \neq k_i} a_k$ converge. Ne seguirebbe che $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty, k \neq k_i} \frac{1}{\ln(1+k)} \ln \frac{1}{a_k} = +\infty$ ma allora la successione $\{k_i\}$ non sarebbe la più ampia possibile.

281.8.2 Usiamo Cesàro–Stolz ed eseguiamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln S_{n+1} - \ln S_n)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{S_k} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S_k} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} \left[\ln \left(1 + \frac{a_{n+1}}{S_n} \right) \right]^{-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left[\ln \left(1 + \frac{a_{n+1}}{S_n} \right) \right]^{-\frac{S_n}{a_{n+1}}} \right)^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{aligned} 1 &\leq \underbrace{\left(\left[\ln \left(1 + \frac{a_{n+1}}{S_n} \right) \right]^{-\frac{S_n}{a_{n+1}}} \right)^{\frac{S_{n+m}}{S_n}}}_{\forall m} \leq \left(\left[\ln \left(1 + \frac{a_{n+1}}{S_n} \right) \right]^{-\frac{S_n}{a_{n+1}}} \right)^{\frac{S_{n+1}}{S_n}} \leq \\ &\leq \left[\ln \left(1 + \frac{a_{n+1}}{S_n} \right) \right]^{-\frac{S_n}{a_{n+1}}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

si ha il risultato in quanto $S_{n+m} \rightarrow +\infty$.

282.8.2 Sappiamo che $k/a_k \rightarrow 0^+$. Ne segue $\frac{\ln^p a_k}{a_k} \geq \frac{\ln^p k}{a_k}$ definitivamente e quindi se $\sum \frac{\ln^p a_k}{a_k}$ converge, converge pure $\sum \frac{\ln^p k}{a_k}$. Supponiamo che $\sum \frac{\ln^p a_k}{a_k}$ diverga. Dobbiamo mostrare che diverge pure $\sum \frac{\ln^p k}{a_k}$. Supponiamo che quest'ultima converga. Ne segue che

$\overline{\lim} \frac{\ln^p a_k}{a_k} \frac{a_k}{\ln^p k} = +\infty$ e quindi sia I l'insieme di naturali più grande tali che $a_{k_i} > k_i^{\alpha \frac{1}{p}}$ con

$\alpha > 0$. Nell'insieme I^c si ha chiaramente $a_{k_i} \leq k_i^{\alpha \frac{1}{p}}$. Ne segue $\sum_{k \in I^c} \frac{\ln^p a_k}{a_k} \leq \sum_{k \in I^c} \frac{\ln^p k^{\alpha \frac{1}{p}}}{a_k} =$

$\sum_{k \in I^c} \frac{\alpha \ln^p k}{a_k} < +\infty$ e quindi per forza deve essere $\sum_{k \in I} \frac{\ln^p a_k}{a_k} = +\infty$. Scriviamo $\sum_{k \in I} \frac{\ln^p a_k}{a_k^v a_k^{1-v}} =$

$\sum_{k \in I} \frac{\ln^p a_k}{a_k}$. Banalmente $(\ln^p x)/x^q \leq p^p e^{-pq}$ da cui $\sum_{k \in I} \frac{1}{a_k^v} p^p e^{-(1-v)p} \leq p^p e^{-(1-v)p} \sum_{k \in I} k^{-v\alpha \frac{1}{p}}$ e

scegliamo v tale che $v\alpha \frac{1}{p} > 1$ da cui convergenza ma questo contraddice l'ipotesi.

283.8.2 Sia $\sum f'(k)$ convergente. Dalla monotonia di f' segue la convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} f'(x)dx = f(+\infty) - f(1)$ da cui $f \rightarrow f(+\infty) \doteq L$. Ne segue immediatamente al convergenza pure di $\sum \frac{f'(k)}{f(k)}$. Supponiamo ora $\sum f'(k)$ divergente. Ciò vuol dire che $f(+\infty) = +\infty$.

Inoltre $f(x)$ è crescente e quindi $f'(x)/f(x)$ è decrescente e quindi la serie $\sum \frac{f'(k)}{f(k)}$ converge o diverge con $\int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(+\infty) - \ln f(1) = +\infty$

284.8.2 3) $\implies$ 1). Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k F(r_k) &= \sum_{k=1}^n (r_k - r_{k+1}) F(r_k) \leq \sum_{k=1}^n (r_k - r_{k+1}) h(r_k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{r_{k+1}}^{r_k} h(x) dx = \\ &= \int_{r_n}^{r_0} h(x) dx \leq \int_0^{r_0} h(x) dx < +\infty \end{aligned}$$

da cui 1)

1) $\implies$ 2). Dimostriamo prima il Lemma

Lemma Esiste $\delta > 0$ tale che $\sum c_k \leq \delta$ e $\sum c_k F(r_k) \leq 1$.

Dimostrazione Se è falso è vera l'affermazione complementare e quindi $\forall \delta > 0$ esiste una successione $\{c_k\}$ tale che $\sum c_k \leq \delta$ implica $\sum c_k F(r_k) > 1$.

Sia quindi $\{c_k^{(1)}\}$ una successione tale che se n_1 è grande abbastanza, si ha

$$\delta_1 \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^{(1)} < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n_1} c_k^{(1)} F(r_k^{(1)}) > 1$$

Allo stesso modo esiste una successione $\{c_k^{(2)}\}$ tale che se n_2 è abbastanza grande, si ha

$$\delta_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^{(2)} < \min \left(\frac{1}{4}, \delta_1 - \sum_{k=1}^{n_1} c_k^{(1)} \right), \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n_2} c_k^{(2)} F(r_k^{(2)}) > 1$$

Continuiamo allo stesso modo ed otteniamo la successione

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}, \dots, c_{n_1}^{(1)}, \delta_1 - \delta_2 - \sum_{k=1}^{n_1} c_k^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_{n_2}^{(2)}, \delta_2 - \delta_3 - \sum_{k=1}^{n_2} c_k^{(2)}, \dots, \\ \dots c_1^{(k)}, \dots, c_{n_k}^{(k)}, \delta_k - \delta_{k+1} - \sum_{j=1}^{n_k} c_j^{(k)}, \dots \end{aligned}$$

Indichiamo con $c_1, c_2, c_3, \dots$, la successione ottenuta. Chiaramente $\delta_k - \delta_{k+1} - \sum_{j=1}^{n_k} c_j^{(k)} > 0$ e

quindi $\delta_1 = \sum c_k < +\infty$. Sia $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} c_k$

$$F(r_1) = F(\delta_1) = F \left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^{(1)} \right), \quad F(r_2) = F(\delta_1 - c_1^{(1)}) = F \left(\sum_{k=2}^{+\infty} c_k^{(1)} \right)$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k^{(1)} F(r_k) > 1$$

e parimenti

$$\sum_{k=1}^{n_p} c_k^{(p)} F\left(\sum_{j=n_1+\dots+n_{p-1}+p-1+k}^{+\infty} c_j\right) > 1$$

Ne segue che $\sum c_k F(r_k)$ non può convergere dovendo sommare infinite volte 1. ■

Per ogni $x \in (0, \delta_1]$ definiamo $f(x) = \sup \sum c_k F(r_k)$ dove il sup è preso su tutte le successioni $\{c_k\}$ tali che $\sum c_k = x$. Sia ora $\{\tilde{c}_k\}$ una successione tale che $\sum \tilde{c}_k = y < x$. Chiaramente

$$\sum \tilde{c}_k F(\tilde{r}_k) + (x - y)F(x) \leq f(x)$$

in quanto $\sum \tilde{c}_k F(\tilde{r}_k) + (x - y)f(y)$ è il valore che la funzione f assume sulla serie generata dalla successione $\{(x - y), \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots\}$ e $f(x)$ è il sup su tutte le serie tali che $\sum c_k = x$. Ne segue che

$$f(y) + (x - y)F(x) \leq f(x)$$

ossia la tesi.

Ora 2) $\implies$ 3).

Sia

$$g(x) = \inf_{0 < y < x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$h(x) = \sup_{x \leq t \leq 1} g(t) = \sup_{x \leq t \leq 1} \inf_{0 < y < t} \frac{f(t) - f(y)}{t - y} \geq \sup_{x \leq t \leq 1} \inf_{0 < y < t} F(t) = \sup_{x \leq t \leq 1} F(t) \geq F(x) \quad (1)$$

Ora osserviamo che $h(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq F(x) \geq 0$ e dall'esercizio **65.5**** sappiamo che h è non decrescente. Se è limitata allora è pure integrabile. Supponiamo quindi che non sia limitata in $[0, 1]$ e quindi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$. e quindi ora basta far vedere che $\int_0^1 h(x) dx < +\infty$.

$$\int_0^1 h \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k \mu\{x: (k-1) < h(x) \leq k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu\{x: h(x) > k\}$$

e quindi $\mu\{x: h(x) > k\}$ definisce una successione, detta $\{t_k\}$, tale che $t_k \searrow 0$, $g(t_k) \geq k$, $\int_0^1 f \leq \sum_{k=0}^{+\infty} t_k$. Certamente $\frac{f(t_k) - f(t_{k+1})}{t_k - t_{k+1}} \geq k$ da (1) per cui

$$t_k - t_{k+1} \leq \frac{f(t_k)}{k} - \frac{f(t_{k+1})}{k}, \quad t_{k+1} - t_{k+2} \leq \frac{f(t_{k+1})}{k+1} - \frac{f(t_{k+2})}{k+1}, \dots$$

da cui

$$t_k \leq \frac{f(t_k)}{k} - \frac{f(t_{k+1})}{k(k+1)} - \frac{f(t_{k+2})}{(k+1)(k+2)} - \dots$$

Ora sommiamo tutti codesti termini

$$\sum_{k=1}^{+\infty} t_k \leq \frac{f(t_1)}{1} + \left[-\frac{f(t_2)}{2} + \frac{f(t_2)}{2}\right] + \left[-\frac{f(t_3)}{6} - \frac{f(t_3)}{6} + \frac{f(t_3)}{3}\right] + \dots = f(t_1)$$

da cui la convergenza della serie e quindi l'integrabilità di $h(x)$. Ciò conclude la dimostrazione.

285.8.2 Sia $a_n \rightarrow a \neq 0, 1$. Sviluppando al primo ordine $x^{1/n}$, per una opportuna costante positiva C si ha

$$\left| \sum_{n=p}^q \frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - (a_n)^{1/n}} \right| \leq C \left| \sum_{n=p}^q \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n} \right| \underbrace{\leq}_{def.te} \frac{C}{a - \delta} \sum_{n=p}^q a_{n-1} - a_n = \frac{C}{a - \delta} (a_{p-1} - a_q) < \varepsilon$$

se p, q sono grandi abbastanza.

Sia $a = 1$. Chiaramente $a_n > 1$ e lo stesso identico sviluppo di prima dà

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q \frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - (a_n)^{1/n}} \right| &\geq C \left| \sum_{n=p}^q \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n \ln a_n} \right| = C \left| \frac{a_{p-1} - a_q}{a_p \ln a_p} \right| \underbrace{\geq}_{monotonia \text{ di } a_n} C \left| \frac{a_{p-1} - a_q}{a_{p-1} \ln a_{p-1}} \right| = \\ &= \left| C \frac{1}{\ln a_{p-1}} \left[1 - \frac{1}{a_{p-1}} \right] + C \frac{1}{\ln a_{p-1}} \frac{a_q - 1}{a_{p-1}} \right| \underbrace{\geq}_{\ln x / (x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1} \frac{C_1}{a_{p-1}} - C \frac{1}{\ln a_{p-1}} \frac{a_q - 1}{a_{p-1}} \geq \\ &\geq C_2 - C \frac{1}{\ln a_{p-1}} \frac{a_q - 1}{a_{p-1}} \end{aligned}$$

Poi prendiamo q così grande che $C \frac{1}{\ln a_{p-1}} \frac{a_q - 1}{a_{p-1}} < \frac{1}{2} C_2$ e quindi $\left| \sum_{n=p}^q \frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - (a_n)^{1/n}} \right| \geq C_2/2$ da cui divergenza.

Sia $a_n \searrow 0$. Abbiamo quattro sottocasi.

- 1) $a_{n+1}/a_n \rightarrow l \neq 0, 1$. In tal caso $a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow l$ e quindi $\frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - (a_n)^{1/n}} \sim -1/(nl)$ da cui la divergenza.
- 2) $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$. Chiaramente $a_{n-1}/a_n \rightarrow 1$. In tal caso scriviamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - (a_n)^{1/n}} \right| &= \left| \frac{\ln \sqrt[n]{a_n}}{(a_n)^{1/n} - 1} \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}}{\frac{1}{n} \ln a_n} \right| \underbrace{\geq}_{def.te} (1 - \varepsilon) \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{\ln \frac{1}{a_n}} = \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{\ln \frac{a_{n-1}}{a_n}} \frac{(1 - \varepsilon)}{\left[1 - \frac{\ln a_{n-1}}{\ln \frac{a_{n-1}}{a_n}} \right]} = \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{-\ln a_n} \end{aligned}$$

Sia ora $b_k = \ln a_{k-1} - \ln a_k$, $a_0 \doteq 1$. $B_k \doteq b_1 + \dots + b_k = -\ln a_k \rightarrow +\infty$ per cui

$$\sum_{n=p}^q \frac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{-\ln a_n} = \sum_{n=p}^q \frac{b_n}{B_n} = +\infty$$

da rich.8

- 3) $a_{n+1}/a_n \rightarrow 0$. Ciò vuol dire che $a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ e $a_{n-1}/a_n \rightarrow +\infty$. Quindi $\sum_{n=p}^q \frac{1}{n} \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1}{1 - (a_n)^{1/n}} \geq$

$$\sum_{n=p}^q \frac{1}{n} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - 1 \right) \geq C \sum_{n=p}^q \frac{1}{n} \geq C \text{ se } p, q \text{ sono grandi abbastanza}$$

- 4) a_{n+1}/a_n non converge. Stessi calcoli di 3).

In realtà tutti e quattro i sottocasi possono essere trattati come 3).

• Sia $a_n = e^n + \infty$, a parte costanti, il termine generale della serie è asintotico a $1/n$. Se invece $a_n = e^{n^2}$ è asintotico a e^{-n}/n e quindi converge.

286.8.2 Nel lavoro citato si dimostrano due risultati. Il primo è

Se per un dato $\varepsilon < 1$, $A(n) \geq \varepsilon$ per uno o più valori in ciascuno degli intervalli $K^m \leq n \leq K^{m+\frac{1}{2}}$ e $K^{m+\frac{1}{2}} \leq n \leq K^{m+1}$ dove $K \geq 4/\varepsilon^2$, allora per almeno un intero n_m tale che $K^m \leq n_m \leq K^{m+1}$ si ha $A(n_m) \geq \varepsilon$ e $c_{n_m} \geq d_{n_m}$

Dimostrazione Bisogna tenere presente che se per un dato intero p si ha $A(p) < \varepsilon$ e $A(p+1) \geq \varepsilon$, allora $c_{p+1} \geq d_{p+1}$. Infatti

$$\left[\varepsilon \geq \frac{N(p)}{p} > \frac{N(p)}{p+1} \quad \wedge \quad \frac{N(p+1)}{p+1} > \varepsilon \right] \implies c_{p+1} \geq d_{p+1}$$

Ciò implica che se $A(p) < \varepsilon$ per almeno un intero nel primo intervallo, dovendo aversi $A(q) \geq \varepsilon$ per almeno un intero nel secondo intervallo, si avrà $c_q \geq d_q$. Lo stesso accade se $A(\hat{q}) < \varepsilon$ dove $\hat{q}$ è il primo intero del secondo intervallo. Ci riduciamo quindi al caso in cui $A(\hat{p}) \geq \varepsilon$ e $A(\hat{q}) \geq \varepsilon$ dove $\hat{p}$ e $\hat{q}$ sono rispettivamente il primo intero del primo e secondo intervallo. Se la tesi non è vera, allora per ogni intero q nel secondo intervallo si ha $A(q) \geq \varepsilon$ e $c_q \leq d_q$. Di conseguenza $A(q) \leq A(K^{m+\frac{1}{2}})$ (supponendo che $K^{m+\frac{1}{2}}$ sia un intero) per ogni q appartenente al secondo intervallo. Di conseguenza

$$A(K^{m+1}) = \frac{N(K^{m+1})}{K^{m+1}} = \frac{K^{m+\frac{1}{2}}}{K^{m+1}} = \frac{1}{K^{m+\frac{1}{2}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e ciò è falso.

Il secondo risultato che fa uso del primo è :

Per ogni positivo $\varepsilon < 1$, esistono infiniti intervalli della forma $K^m \leq n \leq K^{m+\frac{1}{2}}$ e $K^{m+\frac{1}{2}} \leq n \leq K^{m+1}$ dove $K \geq 4/\varepsilon^2$, per i quali $A(n) < \varepsilon$.

Dimostrazione Assumiamo il contrario per cui in ogni intervallo $A(n) \geq \varepsilon$ per almeno un intero n . Dal risultato precedente segue che nell'intervallo $K^m \leq n \leq K^{m+1}$, deve esserci almeno un intero tale che $A(n) \geq \varepsilon$ e $c_n \geq d_n$. Selezioniamo tutti tali interi al variare di m ed indichiamo con $\{n_m\}$ tale insieme. Abbiamo

$$\sum_n c_n \geq \sum_m c_{n_{2m}} (N(n_{2m}) - N(n_{2m-1})) \geq \sum_m d_{n_{2m}} (N(n_{2m}) - N(n_{2m-1}))$$

Sia $\delta_m = \frac{N(n_{2m}) - N(n_{2m-2})}{N(n_{2m+2}) - N(n_{2m})}$. Siccome $A(n) \leq 1$ per definizione, da $A(n_{2m}) \geq \varepsilon$ si ottiene

$\varepsilon n_{2m} \leq N(n_{2m}) \leq n_{2m}$ da cui $\delta_m \geq \frac{\varepsilon n_{2m} - n_{2m-1}}{n_{2m+2}}$. Ora essendo $K^{2m} \leq n_{2m} \leq K^{2m+1}$ si ha

$$\delta_m \geq \frac{\varepsilon K^{2m} - K^{2m+1}}{K^{2m+2}} \geq \frac{\varepsilon K - 1}{K^4} \geq \frac{4/\varepsilon - 1}{K^4} \geq \frac{3}{K^4} > 0$$

per cui

$$\sum_n c_n \geq \sum_m d_{n_{2m}} \delta_m (N(n_{2m+2}) - N(n_{2m})) \geq \frac{3}{K^4} \sum_{n=n_2}^{+\infty} d_n$$

che è assurdo.

La diretta conseguenza di tale secondo risultato è che per ogni $\varepsilon > 0$, esistono infiniti interi n per i quali $A(n) < \varepsilon$. Se dunque esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$ esso vale zero.

Il prossimo esempio non solo verifica $\overline{\lim} c_k/d_k = +\infty$, ma verifica pure $\overline{\lim} A(n) = 1$. Prendiamo $d_n = 1/(n \ln n)$ e $c_n = \frac{2m}{2^{2^m} \ln 2^{2^m}}$ se $2^{2^{(m-1)}} < n \leq 2^{2^m}$. Se $n = 2^{2^m}$ il rapporto c_n/d_n diventa $2m \rightarrow +\infty$. La serie $\sum c_n$ chiaramente converge in quanto

$$\sum c_n \leq \sum (2^{2^m} - 2^{2^{m-1}}) \frac{2m}{2^{2^m} \ln 2^{2^m}} \leq \sum 2^{2^m} \frac{2m}{2^{2^m} \ln 2^{2^m}} \leq \frac{2}{\ln 2} \sum \frac{m}{2^m} < +\infty$$

Inoltre se $\frac{1}{m} 2^{2^m} \leq n \leq 2^{2^m}$ si ha

$$\frac{c_n}{d_n} \geq \frac{2m}{2^{2^m} \ln 2^{2^m}} \frac{2^{2^m}}{m} \ln \frac{2^{2^m}}{m} = 2 \left(1 - \frac{\ln m}{2^m \ln 2} \right) > 1, \quad m \geq 1$$

Inoltre

$$A(2^{2^m}) \geq \frac{(1 - 1/m) 2^{2^m}}{2^{2^m}} = 1 - \frac{1}{m}$$

287.8.2 Sia $C_n = \sum_{k=K^{n-1}}^{K^n-1} c_k$, $D_n = \sum_{k=K^{n-1}}^{K^n-1} d_k$, $K \geq 2$. Se per ogni n , $c_k \geq d_k$ per qualche k che soddisfa $K^{n-1} \leq k < K^n$, per la monotonia, $C_{n-1} \geq D_{n+1}$. Ma $\sum C_n$ converge mentre $\sum D_n$ diverge per cui devono esistere infiniti n per cui $C_{n-1} < D_{n+1}$ e quindi per infiniti n si ha $c_k < d_k$ per ogni k che soddisfa $K^{n-1} \leq k < K^n$. Definendo $R_i = K^{i-1}$ si ha il risultato.

288.8.2 Vogliamo dimostrare che il risultato

Per ogni positivo $\varepsilon < 1$, esistono infiniti intervalli della forma $K^m \leq n \leq K^{m+\frac{1}{2}}$ e $K^{m+\frac{1}{2}} \leq n \leq K^{m+1}$ dove $K \geq 4/\varepsilon^2$, per i quali $A(n) < \varepsilon$.

segue da

per ogni $K > 1$, esistono infiniti $R_i \rightarrow +\infty$ tali che se $R_i \leq n \leq KR_i$, si ha $c_n < d_n$.

Infatti Sia $r_i \doteq R_i \sqrt{K} \leq n \leq KR_i \doteq kr_i$. Sappiamo che $c_n < d_n$ per ogni n tale che $R_i \leq n \leq KR_i$ e quindi $A(n) = \frac{N(n)}{n} \leq \frac{A(R_i)}{R_i \sqrt{K}} = 1/\sqrt{K}$ se $n \in [R_i \sqrt{K}, KR_i]$. Ciò dimostra la tesi

289.8.2 Supponiamo rich.33 vera. Supponiamo poi che $\overline{\lim} P(n)/n = L < +\infty$ e quindi $P(n)/n < L'$ per ogni n grande abbastanza. Se n corrisponde ad uno degli R_i abbiamo $n = R_i$ mentre $P(n) = KR_i - R_i = R_i(K - 1)$.

$$\frac{P(n)}{n} = \frac{K(R_i - 1)}{R_i} < L'$$

e ciò è falso se K è grande. Supponiamo ora sia vera $\overline{\lim} P(n)/n = +\infty$. Ciò vuol dire che esiste una successione $\{n_k\}$ tale che $P(n_k) > Cn_k$ e ciò implica rich.33. Basta prendere $R_k = n_k$, $KR_k = Cn_k$ e siamo a posto.

• La dimostrazione con $Q(n; \varepsilon)$ è come la precedente.

290.8.2 Il primo passo è costruire una successione $\{t_n\}$ tale che $t_n \nearrow +\infty$ tale che $t_n/t_{n+1} \searrow 0$. Grazie a rich.32, sappiamo che esistono $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ monotone non crescenti, $\sum c_n < +\infty$, e $\sum d_n = +\infty$ tali che $d_n/t_{2n} = c_n$ per cui $\sum d_n = \sum c_n t_{2n} = +\infty$. Inoltre dalla monotonia di

t_{2n-1}/t_{2n} sappiamo che $d'_n \frac{t_{2n-1}}{t_{2n}} = c'_n$ per due opportune successioni monotone non crescenti $\{d'_n\}$ e $\{c'_n\}$ e $\sum c'_n < +\infty$. Poi scriviamo

$$d_n/t_{2n} = c_n \iff d_n \frac{t_{2n-1}}{t_{2n}} = c_n t_{2n-1}$$

ed essendo $d'_n \geq d_n$ si ha $\sum d_n \frac{t_{2n-1}}{t_{2n}} < +\infty$ ossia $\sum c_n t_{2n-1} < +\infty$. La condizione $d_n \leq d'_n$ deriva dalla sua definizione e dal fatto che $t_{2n}^{-1} \leq t_{2n-1} t_{2n}^{-1}$. Inoltre la condizione $t_n/t_{n+1} \searrow 0$ non è presente nel lavoro di Dvoretzky.

Richiamiamo $c_n = a_n$. Ora definiamo $T_{-1} = T_0 = 0$. $T_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ e poi definiamo due nuove successioni

$$c_\nu = a_n \text{ se } T_{2n-3} < \nu \leq T_{2n-1} \quad d_\nu = a_n \text{ se } T_{2n-2} < \nu \leq T_{2n}$$

$\{c_\nu\}$ e $\{d_\nu\}$ sono monotone ed inoltre

$$T_{2n-1} - T_{2n-3} = t_{2n-2} + t_{2n-1} \leq 2t_{2n-1}, \quad T_{2n} - T_{2n-2} = t_{2n} + t_{2n-1} > t_{2n}$$

da cui $\sum c_\nu < +\infty$, $\sum d_\nu = +\infty$ e $c_\nu = d_\nu$ se $T_{2n-2} < \nu \leq T_{2n-1}$ ossia t_{2n-1} . Per gli altri valori di ν si ha $c_\nu < d_\nu$. In tal modo $A(m)$ ed $N(m)$ aumentano quando $T_{2n-2} < m \leq T_{2n-1}$ e decrescono se $T_{2n-1} < \nu \leq T_{2n}$. Quindi (per Cesàro-Stolz, da $t_n/t_{n+1} \rightarrow 0$ segue $t_n/T_n \rightarrow 1$).

$$A(T_{2n-1}) = (t_1 + t_2 + \dots + t_{2n-1})/T_{2n-1} \geq t_{2n-1}/T_{2n-1} \sim 1, \quad n \rightarrow +\infty$$

$$A(T_{2n}) = (t_1 + t_2 + \dots + t_{2n-1})/T_{2n} \geq t_{2n-1}/T_{2n} \sim 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

$$P(m) \leq T_{2n} - T_{2n-1} = t_{2n} \quad \text{se } T_{2n-1} < m \leq T_{2n+1}$$

Notare che se $T_{2n} + 1 \leq m \leq T_{2n+1}$, allora $P(m) = 0$. Se invece $m = T_{2n-1} + 1$ possiamo arrivare al massimo a T_{2n} da cui la stima $P(m) \leq T_{2n} - T_{2n-1}$.

Da $A(T_{2n-1}) \geq t_{2n-1}/T_{2n-1} \sim 1$ segue che se si inizia con $m = T_{2n-2}$, i valori in $Q(m, 1 - \varepsilon)$ si fermano a $m = T_{2n-1}$ se ε non è abbastanza vicino a zero. Per tale ragione si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \quad Q(m, 1 - \varepsilon) \leq T_{2n-1}/\varepsilon, \quad T_{2n-2} \leq m \leq T_{2n}$$

In realtà sarebbe $Q(m, 1 - \varepsilon) \leq (T_{2n-1} - T_{2n-2})/\varepsilon \sim T_{2n-1}/\varepsilon$

Ora dimostriamo 1)–3). Cominciamo da 1). Scegliamo la successione $\{t_n\}$ nel seguente modo $t_1 = 1$, $t_{n+1} = t_n \sqrt{g_n}$ con g_n intero positivo. Abbiamo $T_{2n-1} < m \leq T_{2n+1}$

$$g_m \geq g_m A(m) \geq g_m A(T_{2n}) \geq g_m \frac{t_{2n-1}}{T_{2n}} \geq \xi g_m \frac{t_{2n-1}}{t_{2n}} = \xi g_m / \sqrt{g_{2n-1}} \geq \xi \sqrt{g_{2n-1}}$$

per cui $g_n A(n) \rightarrow +\infty$.

Ora vediamo 2). Sempre per $T_{2n-1} < m \leq T_{2n+1}$

$$0 \leq \frac{P(m)}{mg_m} < \frac{t_{2n}}{T_{2n-1}g_m} \leq \frac{t_{2n-1}\sqrt{g_{2n-1}}}{t_{2n-1}g_m} \leq \frac{1}{\sqrt{g_{2n-1}}}$$

da cui $P(m)/(mg_m) \rightarrow 0$.

Ora vediamo 3). Sia $T_{2n-2} < m \leq T_{2n}$

$$\frac{Q(m, 1 - \varepsilon)}{mg_m} \leq \frac{T_{2n-1}}{\varepsilon g_m T_{2n-2}} \leq \xi' \frac{t_{2n-1}}{\varepsilon g_m t_{2n-2}} = \frac{\xi'}{\varepsilon} \frac{\sqrt{g_{2n-1}}}{g_m}$$

per cui $Q(m, 1 - \varepsilon)/(mg_m) \rightarrow 0$.

291.8.2 Costruiamo una successione $\{T_n\}$ nel seguente modo: $T_1 = 1$, $T_n > nT_{n-1}$, $nT_{n-1}G_{T_n} < T_n$. La successione $t_1 = T_1$, $t_n = T_n - T_{n-1}$ soddisfa $\lim t_n/t_{n+1} = 0$ e procediamo col definire le successioni $\{c_\nu\}$ e $\{d_\nu\}$ come in [\[rich.34\]](#). Se $m = T_{2n-1}$ Abbiamo

$$G_m(1 - A(m)) \leq G_m(1 - \frac{t_{2n-1}}{T_{2n-1}}) = G_{T_{2n-1}} \frac{T_{2n-2}}{T_{2n-1}} < \frac{1}{2n-1}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n - T_{n-1}} \geq \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \leq (n+1)G_{T_{n+1}} - 1 \rightarrow +\infty$$

$$\frac{G_{T_n}}{T_n} \leq \frac{1}{nT_{n-1}}$$

292.8.2 Prima di tutto osserviamo che se $a_1 = 2$, allora $a_k \equiv 2$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1$$

Inoltre $a_n > 2$ se $a_1 > 2$ per cui la serie converge essendo $a_1 a_2 \cdots a_n \geq 2^n$.

Prima dimostrazione Definiamo $U(a_1) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n a_k^{-1}$ ed osserviamo che soddisfa la relazione funzionale

$$U(a_1) = \frac{1}{a_1} (1 + U(a_2)) = \frac{1}{a_1} (1 + U(a_1^2 - 2)), \quad \lim_{a_1 \rightarrow +\infty} U(a_1) = 0$$

A parte la condizione asintotica, essa è soddisfatta da

$$U(a_1) = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4}{4}} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

e solo quella col segno meno va bene.

Seconda dimostrazione La relazione ricorrente $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ è risolta tramite induzione da $a_n = z^{2^k} + z^{-2^k}$ per ogni z . Per $k = 1$ abbiamo $a_1 = z^2 + z^{-2} = 2x$ da cui $z^2 = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ (solo il segno più va bene). Per induzione arriviamo a

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} z^{2+4k} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} z^{-2-4k} = \frac{z^2}{1-z^4} (1 - z^{2^{n+1}}) + \frac{z^2}{z^4-1} (1 - z^{-2^{n+1}}) =$$

$$= \frac{z^2}{z^4-1} z^{2^{n+1}} - \frac{z^2}{z^4-1} z^{-2^{n+1}}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n a_k^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^4-1}{z^2} \frac{1}{z^{2^{n+1}} - z^{-2^{n+1}}} = \frac{z^4-1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \sinh(2^{n+1} \ln z)} =$$

$$= \frac{z^4-1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \sinh(2^{n+1} \ln z)} = \frac{z^4-1}{2z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\tanh(2^n \ln z)} - \frac{1}{\tanh(2^{n+1} \ln z)} \right] =$$

$$= \frac{z^4-1}{2z^2} \left[\frac{1}{\tanh(2 \ln z)} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[z^2 - \frac{1}{z^2} \right] \left[\frac{z^2 + z^{-2}}{z^2 - z^{-2}} - 1 \right] = \frac{1}{z^2}$$

Se $x \rightarrow +\infty$, la serie deve tendere a zero e quindi bisogna prendere $z^2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$ da cui il risultato $x - \sqrt{x^2 - 1}$

Terza dimostrazione (quella di [K]) Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2a_1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Ora

$$a_{n+1}^2 - 4 = (a_n^2 - 2)^2 - 4 = a_n^2(a_n^2 - 4) = a_n^2 a_{n-1}^2 (a_{n-1}^2 - 4)$$

da cui

$$a_{n+1}^2 - 4 = a_n^2 a_{n-1}^2 \cdots a_1^2 (a_1^2 - 4) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1^2 - 4}$$

ed il risultato è

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2a_1} - \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}$$

Quarta dimostrazione [quella del G.R.A.20 ("Problem solving group") capitanato da R.Tauraso]. Si parte da $a_n = z^{2^{n-1}} + z^{-2^{n-1}}$ ($a_1 = z + 1/z$, $0 < z \leq 1$) e si arriva alla formula

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^4 - 1}{z^2} \frac{1}{z^{2^n} - z^{-2^n}} &= - \left(z - \frac{1}{z} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \\ \frac{1 - z^2}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(z^{2^{n+1}} \right)^k &= \frac{1 - z^2}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (z^2)^{(2k+1)2^{n-1}} \end{aligned}$$

L'osservazione chiave è che ogni intero m si può scrivere in modo unico come il prodotto di un numero dispari $2k + 1$ e di una potenza 2^{n-1} . Di conseguenza

$$\frac{1 - z^2}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (z^2)^{(2k+1)2^{n-1}} = \frac{1 - z^2}{z} \sum_{m=1}^{+\infty} (z^2)^m = \frac{1 - z^2}{z} \frac{z^2}{1 - z^2} = z = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

Quinta dimostrazione È quella pubblicata sulla rivista Mathematics Magazine. È simile alla seconda ma un po' più semplice.

$$a_k = 2 \cosh(2^k \ln z) \implies a_1 a_2 \cdots a_n = 2 \cosh(2 \ln z) \cdots 2 \cosh(2^n \ln z)$$

da cui

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{2 \sinh(4 \ln z)}{2 \sinh(2 \ln z)} \frac{2 \sinh(8 \ln z)}{2 \sinh(4 \ln z)} \cdots \frac{2 \sinh(2^{n+1} \ln z)}{2 \sinh(2^n \ln z)} = \frac{\sinh(2^{n+1} \ln z)}{\sinh(2 \ln z)}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh(2 \ln z)}{\sinh(2^{n+1} \ln z)}$$

ed abbiamo la stessa espressione della seconda dimostrazione.

293.8.2 Se la serie $\sum a_k$ converge, $T_k \geq S_k \geq a_1$ per cui $\sum \frac{a_k}{T_k^\alpha} \leq \frac{1}{a_1} \sum a_k < +\infty$. Sia $\sum a_k = +\infty$ e sia $\{n_m\}$ una successione strettamente crescente di interi per cui $S_{n_m-1} \leq m < S_{n_m}$. La prima osservazione è

$$T_{n_m} = S_1 + S_2 + \cdots + S_{n_m} \geq S_{n_1} + S_{n_2} + \cdots + S_{n_m} \geq m(m+1)/2$$

Poi abbiamo

$$\sum_{n=n_2}^{+\infty} \frac{a_n}{T_n^\alpha} = \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{a_k}{T_k^\alpha} \leq \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{S_{n_{m+1}-1} - S_{n_m-1}}{T_{n_m}^\alpha} \leq \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m+1-m}{T_{n_m}^\alpha} \leq \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2^\alpha}{m^\alpha(m+1)^\alpha}$$

e se $\alpha > 1/2$ converge. D'altra parte se $\alpha = 1/2$ e $a_k \equiv 1$ la serie diverge.

294.8.2 $\cos x = t$ implica che l'integrale diventa

$$4 \int_0^1 \frac{t^2 \ln^2 t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 4 \int_0^1 \frac{d^2}{da^2} \frac{t^a}{\sqrt{1-t^2}} dt \Big|_{a=2} = 2 \frac{d^2}{da^2} \int_0^1 y^{\frac{a-1}{2}} (1-y)^{\frac{-1}{2}} dy \Big|_{a=2} = 2 \frac{d^2}{da^2} \beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{a+1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)} - \frac{\Gamma'(\frac{a}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)} = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2} \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)} \left[\Psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{a}{2}+1\right) \right] = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \left[\Psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{a}{2}+1\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{da^2} \beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{a+1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)} \left[\Psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{a}{2}+1\right) \right]^2 + \\ &+ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{4} \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)} \left[\Psi'\left(\frac{a+1}{2}\right) - \Psi'\left(\frac{a}{2}+1\right) \right] \end{aligned}$$

Con $a = 2$ abbiamo

$$\frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \left[\Psi\left(\frac{3}{2}\right) - \Psi(2) \right]^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \left[\Psi'\left(\frac{3}{2}\right) - \Psi'(2) \right]$$

Sappiamo che $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k-1} \right), \quad \Psi'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k-1)^2}$$

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Psi(1) = -\gamma$$

$$\Psi\left(\frac{3}{2}\right) = \Psi\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 2 - \gamma + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1} \right) = 2 - \gamma - 2 \ln 2$$

$$\Psi'(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$\Psi'\left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} - 4$$

Mettendo tutto assieme si ha il risultato $\frac{\pi^3}{12} + \pi \ln^2 2 - \pi \ln 2 - \frac{\pi}{2}$

295.8.2

296.8.2

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln(1 - \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \ln 2 + 2x \ln \sin \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{\pi^2 \ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8x \ln \sin x dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8x \ln \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8x [\operatorname{Ln}(e^{ix}) + \operatorname{Ln}(1 - e^{-2ix}) - \operatorname{Ln}(2i)] dx \\ &= \frac{i\pi^3}{24} - \frac{\pi^2}{4} (\ln 2 + i\frac{\pi}{2}) - 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ikx}}{k} = \\ &= \frac{i\pi^3}{24} - \frac{\pi^2}{4} (\ln 2 + i\frac{\pi}{2}) - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{-\pi}{8ik} e^{\frac{-ik\pi}{2}} + \frac{1}{4k^2} (e^{\frac{-ik\pi}{2}} - 1) \right) \end{aligned}$$

Essendo $e^{\frac{-i\pi k}{2}} = (-1)^r$ se $k = 2r$, e $e^{\frac{-i\pi k}{2}} = (-1)^r i$ se $k = 2r - 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\pi e^{\frac{-ik\pi}{2}}}{8ik^2} + \frac{e^{\frac{-ik\pi}{2}} - 1}{4k^3} \right) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r} \left(\frac{-\pi(-1)^r}{16ri} + \frac{(-1)^r - 1}{16r^2} \right) + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r-1} \left(\frac{-\pi(-1)^r}{8(2r-1)} + \frac{(-1)^r i - 1}{4(2r-1)^2} \right) = \frac{\pi i}{32} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^2} + \frac{1}{32} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r - 1}{r^3} + \\ &- \frac{\pi}{8} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i(-1)^r - 1}{(2r-1)^3} = \\ &= \frac{\pi i}{32} \frac{-\pi^2}{12} + \frac{1}{32} \left(-\frac{3}{4} \zeta(3) - \zeta(3) \right) - \frac{\pi}{8} (-G) + \frac{1}{4} \left(\frac{-i\pi^3}{32} - \frac{7}{8} \zeta(3) \right) \end{aligned}$$

Sommando si ha

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^2}{8} \ln 2 + \\ &+ \frac{i\pi^3}{24} - \frac{\pi^2}{4} (\ln 2 + i\frac{\pi}{2}) - 8 \left[\frac{\pi i}{32} \frac{-\pi^2}{12} + \frac{1}{32} \left(-\frac{3}{4} \zeta(3) - \zeta(3) \right) - \frac{\pi}{8} (-G) + \frac{1}{4} \left(\frac{-i\pi^3}{32} - \frac{7}{8} \zeta(3) \right) \right] \\ &= \frac{35}{16} \zeta(3) - \frac{\pi^2 \ln 2}{8} - \pi G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln(1 + \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \ln 2 + 2x \ln \cos \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{\pi^2 \ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8x \ln \cos x dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8x \ln \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8x [\operatorname{Ln}(e^{ix}) + \operatorname{Ln}(1 + e^{-2ix}) - \ln 2] dx \\ &= \frac{i\pi^3}{24} - \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-2ikx}}{k} = \\ &= \frac{i\pi^3}{24} - \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{-\pi}{8ik} (-1)^k e^{\frac{-ik\pi}{2}} + \frac{1}{4k^2} ((-1)^k e^{\frac{-ik\pi}{2}} - (-1)^k) \right) \end{aligned}$$

Essendo $e^{\frac{-i\pi k}{2}} = (-1)^r$ se $k = 2r$, e $e^{\frac{-i\pi k}{2}} = (-1)^r i$ se $k = 2r - 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{-\pi}{8ik} (-1)^k e^{\frac{-ik\pi}{2}} + \frac{1}{4k^2} ((-1)^k e^{\frac{-ik\pi}{2}} - (-1)^k) \right) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r} \left(\frac{-\pi(-1)^r}{16ri} + \frac{(-1)^r - 1}{16r^2} \right) + \\ &- \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r-1} \left(\frac{-\pi(-1)^r}{8(2r-1)} + \frac{(-1)^r i - 1}{4(2r-1)^2} \right) = \frac{\pi i}{32} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^2} + \frac{1}{32} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r - 1}{r^3} + \\ &+ \frac{\pi}{8} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i(-1)^r - 1}{(2r-1)^3} = \\ &= \frac{\pi i}{32} \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{32} \left(-\frac{3}{4} \zeta(3) - \zeta(3) \right) - \frac{\pi}{8} G - \frac{1}{4} \left(\frac{-i\pi^3}{32} - \frac{7}{8} \zeta(3) \right) \end{aligned}$$

Sommando si ha

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} \ln 2 + \frac{i\pi^3}{24} - \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - 8 \left[\frac{\pi i}{32} \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{32} \left(-\frac{3}{4} \zeta(3) - \zeta(3) \right) - \frac{\pi}{8} G - \frac{1}{4} \left(\frac{-i\pi^3}{32} - \frac{7}{8} \zeta(3) \right) \right] = \\ = \frac{-21}{16} \zeta(3) - \frac{\pi^2 \ln 2}{8} + \pi G \end{aligned}$$

La relazione

$$\text{Ln}(1 - e^{-2ix}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ikx}}{k}$$

si giustifica con rich.37 ed il corollario scritto nello svolgimento.

297.8.2 1) Usiamo $\int_0^{+\infty} e^{-xa} x^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{y^n}{a^{n+1}} dy = \frac{n!}{a^{n+1}}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx}{(k+x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(k+x)} t^2 dt = \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-tx} \frac{e^t}{(e^t - 1)^2} dt$$

$$t^2 e^t \leq (e^t - 1)^2 \iff t^2 \leq e^t - 2 + e^{-t} \iff t^2 \leq \left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} \right)^2 \iff \sinh \frac{t}{2} \geq \frac{t}{2}$$

Ne segue

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx}{(k+x)^3} \leq \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{2}$$

La maggiorazione

$$\frac{t^2 e^t}{(e^t - 1)^2} \leq \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq 1 \\ ce^{-3t/4}, & t \geq 1 \end{cases}$$

per una opportuna costante c , rende possibile l'uguaglianza racchiusa dagli apici in quanto spezziamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \int_0^{+\infty} e^{-t(k+x)} t^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} k \int_0^1 e^{-t(k+x)} t^2 dt + \sum_{k=1}^{+\infty} k \int_1^{+\infty} e^{-t(k+x)} t^2 dt$$

($x \geq 0$). La maggiorazione ci rende una maggiorante integrabile in t che a sua volta rende possibile il passaggio di serie sotto il segno di integrale.

2) Sia $0 \leq x \leq 1$. Ripetendo i medesimi calcoli si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1-x}{(k+1+x)^3} &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x)} \frac{t^2 e^t}{(e^t - 1)^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x)} \frac{t^2}{e^t - 1} dt (1-x) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x)} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x)} t dt (1-x) = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2} \frac{1-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Se $x > 1$, evidenze numeriche la indicano falsa.

3) Sia $0 \leq x \leq 1$. Usiamo $e^x - 1 \leq x e^x$ Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x)} \frac{t^2 e^t}{(e^t - 1)^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x)} \frac{t^2}{e^t - 1} dt (1-x) &\geq \\ \geq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(2+x)} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(2+x)} t dt (1-x) &= \frac{1}{2(2+x)} + \frac{1-x}{2(2+x)^2} = \frac{3}{2(2+x)^2} \end{aligned}$$

e

$$\frac{3}{2(2+x)^2} - \frac{x}{(1+x)^3} = \frac{1}{2} \frac{x+x^2+x^3+3}{(x+2)^2(1+x)^3} > 0$$

e ciò conclude la dimostrazione di 3).

298.8.2 È sufficiente la divergenza di $\sum c_k$. Supponiamo infatti che sia vera 1) ossia $\frac{c_k}{b_k} > \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}$. Facilmente si ottiene $b_k > c_k \frac{b_0}{c_0}$ da cui la divergenza pure di $\sum b_k$. Supponiamo che sia vera 2) ossia $\frac{c_k}{b_k} < \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}$. La terza condizione ci sà

$$\sum \frac{c_k}{c_0 + \dots + c_k} \leq K \sum \frac{b_k}{b_0 + \dots + b_k}$$

e quindi la serie a destra diverge e questo comporta la divergenza della serie $\sum b_k$ grazie a [\[rich.8\]](#).

Per dimostrare il risultato definiamo $\beta_k = (b_0 s_0 + \dots + b_k s_k)/B_k$, $\gamma_k = (c_0 s_0 + \dots + c_k s_k)/C_k$, da cui $b_k s_k = B_k \beta_k - B_{k-1} \beta_{k-1}$ e $\gamma_n = \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k \beta_k - B_{k-1} \beta_{k-1})$. Inoltre $\beta_k = s + \varepsilon_k$ con chiaramente $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k (\varepsilon_k + s) - B_{k-1} (\varepsilon_{k-1} + s)) = \\ &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k - B_{k-1}) s + \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k \varepsilon_k - B_{k-1} \varepsilon_{k-1}) = \\ &= s + \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k \varepsilon_k - B_{k-1} \varepsilon_{k-1}) = \\ &= s + \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_k}{b_k} (B_k \varepsilon_k - B_{k-1} \varepsilon_{k-1}) + \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k \varepsilon_k - B_{k-1} \varepsilon_{k-1}) \end{aligned}$$

Supponiamo dapprima che $\frac{c_k}{b_k} > \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}$ da cui

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k \varepsilon_k - B_{k-1} \varepsilon_{k-1}) = \\
 &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \left(\frac{c_k}{b_k} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) B_k \varepsilon_k - \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \frac{c_k}{b_k} B_{k-1} \varepsilon_{k-1} + \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} B_k \varepsilon_k = \\
 &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \left(\frac{c_k}{b_k} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) B_k \varepsilon_k + \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} B_k \varepsilon_k - \frac{c_k}{b_k} B_{k-1} \varepsilon_{k-1} \right) = \\
 &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^n \left(\frac{c_k}{b_k} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) B_k \varepsilon_k + \frac{1}{C_n} \left(\frac{c_{n+1}}{b_{n+1}} B_n \varepsilon_n - \frac{c_N}{b_N} B_{N-1} \varepsilon_{N-1} \right) = \\
 &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{c_k}{b_k} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) B_k \varepsilon_k + \frac{1}{C_n} \left(\frac{c_n}{b_n} B_n \varepsilon_n - \frac{c_N}{b_N} B_{N-1} \varepsilon_{N-1} \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ora

$$\left| \frac{1}{C_n} \frac{c_N}{b_N} B_{N-1} \varepsilon_{N-1} \right| < \varepsilon, \quad (C_n \rightarrow \infty), \quad N \text{ fixed}$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{c_k}{b_k} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) B_k \varepsilon_k + \frac{1}{C_n} \frac{c_n}{b_n} B_n \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon}{C_n} \sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{c_k}{b_k} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) B_k + \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_n}{b_n} B_n \\
 &= \frac{\varepsilon}{C_n} \left(\sum_{k=N}^{n-1} \frac{c_k}{b_k} B_k - \sum_{k=N+1}^n \frac{c_k}{b_k} B_{k-1} \right) + \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_n}{b_n} B_n = \frac{\varepsilon}{C_n} \left(\sum_{k=N}^n \frac{c_k}{b_k} B_k - \sum_{k=N+1}^n \frac{c_k}{b_k} B_{k-1} \right) = \\
 &= \frac{\varepsilon}{C_n} \sum_{k=N+1}^n \frac{c_k}{b_k} (B_k - B_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_N}{b_N} B_N = \varepsilon \frac{C_n - C_N}{C_n} + \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_N}{b_N} B_N
 \end{aligned}$$

Inoltre se n è abbastanza grande,

$$\frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_k}{b_k} (B_k \varepsilon_k - B_{k-1} \varepsilon_{k-1}) < \varepsilon$$

e quindi $|\gamma_n - s| < K_1 \varepsilon$ per n grande abbastanza ossia $\gamma_n \rightarrow s$.

Siano ora verificate le condizioni 2) ossia $\frac{c_k}{b_k} < \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}$ e $\frac{B_n}{b_n} < K \frac{C_n}{c_n}$.

Ripartiamo dalla (1). Come prima

$$\left| \frac{1}{C_n} \frac{c_N}{b_N} B_{N-1} \varepsilon_{N-1} \right| < \varepsilon, \quad (C_n \rightarrow \infty), \quad N \text{ fixed}$$

Poi

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{C_n} \frac{c_n}{b_n} B_n \varepsilon_n \leq \frac{1}{C_n} \frac{c_n}{b_n} b_n K \frac{C_n}{c_n} \varepsilon_n = K \varepsilon_n \\
 & \left| \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{c_k}{b_k} - \frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} \right) B_k \varepsilon_k \right| \leq \frac{1}{C_n} \sum_{k=N}^{n-1} \left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{c_k}{b_k} \right) B_k \varepsilon_k = \\
 &= \frac{\varepsilon}{C_n} \sum_{k=N+1}^n \frac{c_k}{b_k} B_{k-1} - \frac{\varepsilon}{C_n} \sum_{k=N}^{n-1} \frac{c_k}{b_k} B_k = \frac{\varepsilon}{C_n} \sum_{k=N+1}^n \frac{c_k}{b_k} (B_{k-1} - B_k) - \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_N}{b_N} B_N + \\
 &+ \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_n}{b_n} B_n = -\varepsilon \frac{C_n - C_N}{C_n} + \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_N}{b_N} B_N + \frac{\varepsilon}{C_n} \frac{c_n}{b_n} B_n
 \end{aligned}$$

e ciascuna di esse è piccola con n . Nell'ultima si usa la seconda delle due ipotesi della 2) del testo.

Una interessante applicazione si ha quando $b_k \equiv 1$. In tal caso il risultato diventa: se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n} = s$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_0 s_0 + \dots + c_n s_n}{c_0 + \dots + c_n} = s$ se è vera una delle due condizioni 1) $c_n > c_{n+1}$ oppure 2) $c_n < c_{n+1}$ e $\frac{c_0 + \dots + c_n}{c_n} > Kn$ e inoltre $\sum c_n = +\infty$.

Sia $c_k = 2k + 1$. Allora se $\{s_k\}$ è Cesàro-sommabile ossia $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n} = s$ possiamo dire che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_0 + 3s_1 + 5s_3 + \dots + (2n+1)s_n}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_0 + 3s_1 + 5s_3 + \dots + (2n+1)s_n}{(n+1)^2} = s$$

Sia $c_k = 2^k$. Il risultato non si applica in quanto $c_{n+1} > c_n$ ma non è vero che $\frac{c_0 + \dots + c_n}{c_n} > Kn$. Prendiamo ora $s_k = (-1)^k$. Chiaramente

$$\left| \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{2k}}{2k} \right| \leq \frac{1}{2k} \rightarrow 0$$

ma

$$\frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 + \dots + c_n s_n}{c_0 + c_2 + c_2 + \dots + c_n} = \frac{1}{2^{n-1} - 1} \sum_{k=0}^n (-2)^k = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3(2^{n+1} - 1)}$$

ed il limite non esiste.

299.8.2 L'integrale è

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\ln(1+x) - \ln(1+y)}{x-y} &\stackrel{u=x, v=x-y}{=} 2 \int_0^1 du \int_0^u \frac{dv}{v} (\ln(1+u) - \ln(1+u-v)) = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dv}{v} \int_v^1 du (\ln(1+u) - \ln(1+u-v)) = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dv}{v} \left[\ln(1+u)(1+u) - \ln(1+u-v)(1+u-v) - v \right]_{u=v}^{u=1} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dv}{v} (2 \ln 2 - (2-v) \ln(2-v) - (1+v) \ln(1+v)) = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-4}{v} \ln \left(1 - \frac{v}{2} \right) + 2 \ln(2-v) - 2 \frac{\ln(1+v)}{v} - 2 \ln(1+v) \right] dv \\ &= -4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt - 2 \int_0^{-1} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = 4 \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \text{Li}_2(-1) = \\ &= 4 \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2} \right) + 2 \frac{-\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6} - 2 \ln^2 2 \end{aligned}$$

Si è usato

$$\text{Li}_2(-1) = - \int_0^{-1} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{-1} \frac{x^{k-1}}{k} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2}$$

(c'è il problema della non uniforme convergenza in $[0, 1)$ della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ e per questo si può guardare [\[rich.45\]](#)).

$\text{Li}_2(x)$ è il dilogaritmo definito come $-\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ con $x < 1$. Si può estendere a tutto il piano complesso definendo $\text{Li}_2(z) = -\int_{\gamma(0,z)} \frac{\text{Ln}(1-w)}{w} dw$ dove γ è una curva nel piano complesso che inizia in $w = 0$ e finisce in $w = z$. Il piano complesso è tagliato lungo l'insieme $[1, +\infty)$.
 $\text{Li}_2(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Per trovare $\text{Li}_2(-1)$ utilizziamo la formula

$$\text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Li}_2(z) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\text{Ln}^2(-z)$$

per cui

$$\text{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4}\text{Ln}^2(1) \implies \text{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

La formula

$$\text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Li}_2(z) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\text{Ln}^2(-z)$$

si dimostra così:

$$\left[\text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) + \text{Li}_2(z)\right]'(z) = \frac{1}{z^2}z\text{Ln}\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \frac{\text{Ln}(1-z)}{z} = \frac{\text{Ln}(-z)}{z} = -\frac{\text{Ln}^2(-z)}{2}$$

$$\left[\text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) + \text{Li}_2(z)\right] = -\frac{\text{Ln}^2(-z)}{2} + c, \quad z = 1 \implies \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + c$$

$$c = -\pi^2/6$$

Lo stesso risultato si può molto più semplicemente ottenere nel seguente modo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2}$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{\pi^2}{12}$$

Per calcolare $\text{Li}_2(1/2)$ usiamo

$$\text{Li}_2(1-z) = -\text{Li}_2(z) + \frac{\pi^2}{6} - \text{Ln}(z)\text{Ln}(1-z) \implies \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$$

$$[\text{Li}_2(1-z) + \text{Li}_2(z)]' = \frac{\text{Ln}(z)}{1-z} - \frac{\text{Ln}(1-z)}{z} = (-\text{Ln}(z)\text{Ln}(1-z))'$$

per cui

$$\text{Li}_2(1-z) + \text{Li}_2(z) + \text{Ln}(z)\text{Ln}(1-z) = c \quad z = 0 \implies c = \frac{\pi^2}{6}$$

Un altro modo di calcolare $\text{Li}_2(1/2)$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-k(t+\ln 2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{2e^t - 1} \underbrace{=}_{y=e^{-t}} \int_0^1 \ln \frac{1}{y} \frac{dy}{2-y} = \int_0^1 \ln \frac{1}{1-y} \frac{dy}{1+y} = \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-y)^k \ln \frac{1}{1-y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{y^{k+1}}{k+1} \ln \frac{1}{1-y} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{k+1} dy}{(k+1)(1-y)} \right] = \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \lim_{a \rightarrow 1^-} \left[-\ln a + \int_0^1 dy \sum_{j=1}^k y^j dy + \ln a \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

Ora sappiamo che

$$\begin{aligned}
 (\ln 2)^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{q=2}^{+\infty} (-1)^q \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k(q-k)} = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-q} \right) = \\
 &= \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{2}{k}
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} - \frac{\ln^2 2}{2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$$

300.8.2 Supponiamo che $\sum a_k$ converga. Sappiamo che $0 \leq \ln(1+a_k) \leq a_k$ per cui $\ln \prod_{k=1}^{+\infty} (1+a_k)$

$a_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1+a_k)$ converge e quindi converge pure $\prod_{k=1}^{+\infty} (1+a_k)$. Viceversa supponiamo che

$\prod_{k=1}^{+\infty} (1+a_k)$ converge. Da Cauchy sappiamo che per n grande

$$0 < \prod_{k=1}^{n+1} (1+a_k) - \prod_{k=1}^n (1+a_k) = \prod_{k=1}^n (1+a_k) a_{n+1} < \varepsilon$$

ed essendo $\prod_{k=1}^n (1+a_k) > 1$ si ha che $a_n \rightarrow 0$. Ne segue che definitivamente $\ln(1+a_n) \geq a_n/2 > 0$ quindi se converge $\sum \ln(1+a_k)$ allora converge pure $\sum a_k$.

Prendiamo ora $a_k = (-1)^k/\sqrt{k}$. $\sum a_k$ converge. $\ln \prod_{k=2}^{+\infty} (1+a_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \ln(1+a_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} (a_k -$

$\frac{1}{2}a_k^2 + O(a_k^3))$ e siccome $\sum a_k^2$ diverge, la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln(1+a_k)$ non può convergere.

Ora prendiamo $a_k = e^{(-1)^k/\sqrt{k}} - 1$. $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln(1 + a_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge. D'altra parte $\sum (e^{(-1)^k/\sqrt{k}} - 1) = \sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum \frac{1}{2k} + \sum O(\frac{1}{k^{3/2}})$ e chiaramente diverge.

301.8.2 Esaminiamo prima il caso reale. Possiamo supporre che $|g_k(\underline{x})| < 1$.

$$\prod_{k=0}^N (1 + g_k(\underline{x})) - \prod_{k=0}^M (1 + g_k(\underline{x})) = \prod_{k=0}^M (1 + g_k(\underline{x})) \left(\prod_{k=M+1}^N (1 + g_k(\underline{x})) - 1 \right)$$

$$\ln \prod_{k=0}^M (1 + g_k(\underline{x})) = \sum_{k=0}^M \ln(1 + g_k(\underline{x})) \leq \sum_{k=0}^M |g_k(\underline{x})| < K$$

$$\prod_{k=M+1}^N (1 + g_k(\underline{x})) - 1 = e^{\sum_{k=M+1}^N \ln(1 + g_k(\underline{x}))} - 1 \underset{\text{Lagrange}}{=} e^{\xi} \sum_{k=M+1}^N \ln(1 + g_k(\underline{x}))$$

dove $0 < \xi < \sum_{k=M+1}^N \ln(1 + g_k(\underline{x}))$ e

$$\sup_{\underline{x} \in D} \left| \sum_{k=M+1}^N \ln(1 + g_k(\underline{x})) \right| \leq \sup_{\underline{x} \in D} \sum_{k=M+1}^N |g_k(\underline{x})| < \varepsilon$$

per ipotesi quindi l'uniforme convergenza.

Stando a Hardy le ipotesi date nel testo fanno parte di un teorema attribuito ad Arzelà . Un altro teorema che condurrebbe alle stesse conclusioni è attribuito da Bromwich a Tannery e prevede come ipotesi $|g_k(\underline{x})| \leq M_k$ e $\sum M_k < +\infty$ (la convergenza totale o di Weierstrass). Naturalmente una successione può soddisfare le condizioni di Arzelà ma non quelle di Tannery.

Prendiamo funzioni in $\mathbf{R}$ e sia $g_k(x) = \frac{1}{k+1}$ per $1 - 2^{-k} \leq x \leq 1 - 2^{-k-1}$ e $g_k(x) = 0$ fuori. $\sup_{x \in \mathbf{R}} g_k(x) = 1/(k+1)$ e $\sum 1/(k+1) = +\infty$ per cui le condizioni di Tannery non sono verificate.

Invece $\sum_{k=0}^n |g_k(x)| = \sum_{k=0}^n g_k(x) < 1$ e $\sum g_k(x) < +\infty$

Come applicazione Hardy considera i prodotti $P_1(x) \doteq \prod (1 + a_k x^k)$ e $P_2(x) = \prod (1 + a_k x)$ con x che si muove lungo un cammino tendente al punto $(1, 0)$ all'interno del cerchio di raggio 1. Il cammino deve avere tangente in ogni punto ma non deve avere tangente verticale in $(1, 0)$. I prodotti $P_1(x)$, e $P_2(x)$ sono assolutamente convergenti sotto le condizioni del Teorema di Arzelà .

302.8.2 Chiaramente $|g_n(x)| < \delta < 1$ definitivamente. Senza perdere di generalità possiamo supporre che è vera per ogni n . Quindi

$$\ln \prod_{n=0}^N (1 + g_n(x)) = \sum_{n=0}^N \ln(1 + g_n(x)) = \sum_{n=0}^N \left[g_n(x) - \frac{1}{2} g_n^2(x) + \frac{1}{3} g_n^3(x) + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} g_n^{k-1}(x) + R_n \right]$$

con $R_n(x) = \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j} g_n^j(x)$ e quindi $|R_n(x)| \leq \sum_{j=k}^{+\infty} |g_n^k(x)| |g_n^{j-k}(x)| \leq \frac{|g_n^k(x)|}{1 - \delta}$. Ne segue che

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \prod_{n=0}^N (1 + g_n(x))$ esiste uniformemente in D .

Come conseguenza, se esistono $\sum a_n, \sum a_n^2, \dots, \sum a_n^{k-1}, \sum |a_n^k|$ allora per il Teorema di Abel sul “cammino di Stolz” convergono uniformemente sul cammino pure $\sum a_n x^n, \sum a_n^2 x^{2n}, \dots, \sum a_n^{k-1} \cdot |x^{n(k-1)}|, \sum |a_n^k(x) x^{nk}|$ e come conseguenza, possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n x^n) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n)$$

Allo stesso modo se convergono $\sum a_n, \sum a_n^2, \dots, \sum a_n^{k-1}, \sum |a_n^k|$ allora convergono uniformemente in un qualsiasi insieme D , non necessariamente all'interno del cerchio di raggio 1 le quantità $\sum a_n x, \sum a_n^2 x^2, \dots, \sum a_n^{k-1} x^{k-1}, \sum |a_n^k(x)| |x^k|$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n x) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n)$$

303.8.2

• Primo esempio Sia dato il prodotto $\prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k} - 1/2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k} + 1/2}\right) \cdot a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k} - 1/2}$
 $a_{2k+1} = \frac{-1}{\sqrt{k} + 1/2}$

$$(1 + a_{2k})(1 + a_{2k+1}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{k} - 1/2} - \frac{1}{\sqrt{k} + 1/2} - \frac{1}{k - 1/4} = 1$$

per cui la produttoria converge. D'altra parte $\sum (a_{2k} + a_{2k+1}) = \sum \frac{1}{k - 1/4} = +\infty$.

• Secondo esempio. $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right)$

Sia $\boxed{\vartheta/\pi \text{ irrazionale.}}$ Poiché $\sum e^{n\vartheta i}/\sqrt{n}, \sum e^{2n\vartheta i}/n, \sum 1/n^{3/2}$ convergono, converge pure $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right)$ che è quindi “regularly convergent”

Sempre con ϑ/π irrazionale ora prendiamo $\prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right|^2 = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \frac{\cos(n\vartheta)}{\sqrt{n}}\right)$ e chiaramente converge essendo il quadrato del precedente prodotto ma non converge $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \frac{\cos(n\vartheta)}{\sqrt{n}}\right)$

Se $\boxed{\vartheta = 2\pi k}$ il prodotto diverge a $+\infty$ otteniamo $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

Se $\boxed{\vartheta = (2p+1)\pi}$ si ha

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\right)$$

e facendo il logaritmo vediano che tende a $-\infty$ per cui il prodotto diverge a zero.

• Terzo esempio. $a_k = e^{(-1)^k/\sqrt{k}} - 1$ studiato qualche esercizio sopra

Gli esempi precedenti sono casi che Hardy chiama “irregularly convergent”. In tutti e tre i casi non converge $\sum a_k$ se scriviamo la produttoria come $\prod(1 + a_k)$.

Il secondo caso di prodotti “irregularly convergent” ossia quello in cui $\sum |a_k|^p$ non converge per nessun valore intero p è $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\ln n}\right)$ con ϑ/π irrazionale. Chiaramente $\sum a_k^p$ converge per ogni p intero ma mai assolutamente. A parte i casi in cui ϑ/π è un intero, Hardy lascia tale questione irrisolta.

Torniamo al prodotto $\prod \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right)$ e generalizziamo a $\prod \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{n^\alpha}\right)$. Sia p un intero tale che $p\alpha > 1$. In tal caso le serie $\sum a_n, \dots, \sum a_n^{p-1}$ e $\sum |a_n|^p$ convergono e quindi il prodotto è “regularly convergent” a meno che fra $\vartheta, 2\vartheta, \dots, (p-1)\vartheta$ non vi sia un multiplo intero di 2π .

304.8.2 L'esempio è $\prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k} - 1/2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k} + 1/2}\right)$. Infatti

$\prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{k} - 1/2}\right) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{k} + 1/2}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{x(1-x)}{k - 1/4}\right)$ e converge solamente se $x = 0, 1$ come è facile verificare.

305.8.2 Abbiamo visto che $\prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right|^2 = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2\cos \vartheta n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ converge se ϑ/π è irrazionale ed indichiamo con L tale valore. Vogliamo far vedere che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2\cos(\vartheta n)x^n}{\sqrt{n}} + \frac{x^n}{n}\right) = 2L$$

Sappiamo che $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right)$ è “regularly convergent” e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + x^n \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right)$$

da cui (il limite del modulo è il modulo del limite)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + x^n \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right| = \prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right| \implies \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + x^n \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right|^2 = \prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + \frac{e^{n\vartheta i}}{\sqrt{n}}\right|^2$$

ossia

$$\lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2x^n \cos(n\vartheta)}{\sqrt{n}} + \frac{x^{2n}}{n}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2\cos(n\vartheta)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = L$$

È sufficiente dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{2\cos(\vartheta n)x^n}{\sqrt{n}} + \frac{x^n}{n}}{1 + \frac{2x^n \cos \vartheta n}{\sqrt{n}} + \frac{x^{2n}}{n}} = \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n + 2x^n \sqrt{n} \cos(n\vartheta) + x^{2n}} \doteq \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \beta_n) = 2$$

Poiché $\sum \beta_n^2$ converge uniformemente, converge uniformemente anche la serie $\sum \ln(1 + \beta_n) - \beta_n$ per cui $\lim_{x \rightarrow 1} \sum \ln(1 + \beta_n) - \beta_n = 0$. Basta quindi far vedere che $\lim_{x \rightarrow 1} \sum \beta_n = \ln 2$. Sia $\gamma_n = x^n(1-x)^n/n$ e

$$|\gamma_n - \beta_n| = \left| \frac{x^n(1-x^n)}{n} \right| \left| \frac{2x^n \sqrt{n} \cos(\vartheta n) + x^{2n}}{n + 2x^n \sqrt{n} \cos(n\vartheta) + x^{2n}} \right| \leq Cn^{-3/2}$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum \beta_n = \lim_{x \rightarrow 1} \sum (-\gamma_n + \beta_n) + \gamma_n = \lim_{x \rightarrow 1} \sum \gamma_n = -\ln(1-x) + \ln(1-x^2) = \ln(1+x) = \ln 2$$

e ciò conclude la dimostrazione.

306.8.2 Littlewood comincia dicendo che se $|u_n| \rightarrow 0$ allora converge

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left[(1+u_n) \exp \left(-u_n + \frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^3}{3} + \dots + \pm \frac{u_n^n}{n} \right) \right] \left(\sim \prod_{n=1}^{+\infty} (1+u_n) e^{-\ln(1+u_n)} \right) \equiv 1$$

Passando al logaritmo (supponiamo senza perdita di generalità che $|u_n| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln(1+u_n) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} u_n^k}{k} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} u_n^k}{k}$$

Usiamo Cauchy e in modulo possiamo maggiorare con ($|u_n| < \delta$ per n grande abbastanza)

$$\sum_{n=p}^q \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_n|^k \leq \sum_{n=p}^q \sum_{k=n+1}^{+\infty} \delta^k = \sum_{n=p}^q \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} < \varepsilon \text{ e quindi converge uniformemente.}$$

Poi considera

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{n=1}^{+\infty} (1+a_n e^{i\vartheta_n}) \exp[-\ln(1+a_n e^{i\vartheta_n})] = \prod_{n=1}^{+\infty} (1+a_n e^{i\vartheta_n}) \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{m} a_n^m e^{i\vartheta_m n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left[(1+a_n e^{i\vartheta_n}) \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{m} a_n^m e^{i\vartheta_m n} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left[(1+a_n e^{i\vartheta_n}) \exp \left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m}{m} a_n^m e^{i\vartheta_m n} \right) \right] \end{aligned}$$

da cui

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1+a_n e^{i\vartheta_n}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \exp \left[\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m} a_n^m e^{i\vartheta_m n} \right]$$

Passando al logaritmo

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m} a_n^m e^{i\vartheta_m n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m}^N \frac{(-1)^{m-1}}{m} a_n^m e^{i\vartheta_m n}$$

Poi si definisce $\vartheta_m = 2\pi \left\lfloor \frac{m\vartheta}{2\pi} \right\rfloor$ con $0 < |\vartheta_m| < \pi$ e si ottiene

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m}^N \frac{(-1)^{m-1}}{m} a_n^m e^{i\vartheta_m n} \doteq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^{m-1}}{m} A_m(N) \doteq \lim_{N \rightarrow +\infty} f(N)$$

Per l'esistenza del limite usiamo Cauchy ossia $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: N, N' > N_\varepsilon \implies |f(N') - f(N)| < \varepsilon$. Sia $N' > N$ quindi

$$f(N') - f(N) = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^{m-1}}{m} (A_m(N') - A_m(N)) + \sum_{m=N+1}^{N'} \frac{(-1)^{m-1}}{m} A_m(N')$$

Ora applichiamo la “somma per parti” e otteniamo

$$\begin{aligned} A_p(N') - A_p(N) &= \sum_{n=N+1}^{N'} a_n^p e^{i\vartheta_p n} = \sum_{n=N+1}^{N'} a_n^p e^{i\vartheta_p n} = \sum_{n=1}^{N'} a_n^p e^{i\vartheta_p n} - \sum_{n=1}^N a_n^p e^{i\vartheta_p n} = \\ &= a_{N'}^p \sum_{n=1}^{N'} e^{i\vartheta_p n} + \sum_{n=1}^{N'-1} (a_n^p - a_{n+1}^p) \sum_{j=1}^n e^{i\vartheta_p j} - a_N^p \sum_{n=1}^N e^{i\vartheta_p n} - \sum_{n=1}^N (a_n^p - a_{n+1}^p) \sum_{j=1}^n e^{i\vartheta_p j} = \\ &= a_{N'}^p \sum_{n=1}^{N'} e^{i\vartheta_p n} + \sum_{n=N+1}^{N'-1} (a_n^p - a_{n+1}^p) \sum_{j=1}^n e^{i\vartheta_p j} - a_N^p \sum_{n=1}^N e^{i\vartheta_p n} \end{aligned}$$

Ora $\left| \sum_{n=1}^{N'} e^{i\vartheta_p n} \right| \leq \frac{2\pi}{|\vartheta_p|}$ e usando la monotonia della successione $\{a_n\}$ possiamo maggiorare in modulo

$$\frac{4\pi a_N^p}{|\vartheta_p|} + \frac{2\pi}{|\vartheta_p|} (a_{N+1}^p - a_{N'}^p) \leq \frac{8\pi a_N^p}{|\vartheta_p|}$$

Se ϑ/π è un numero algebrico allora si dimostra che $|\vartheta_m| \geq K^{-m}$ quindi

$$\left| \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(-1)^m}{m} \sum_{p=1}^m (A_p(N') - A_p(N)) \right| \leq 8\pi \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} (Ka_N)^m < K'a_N$$

se $Ka_N < 1$. La stessa cosa accade per $\sum_{m=N+1}^{N'} \frac{(-1)^{m-1}}{m} A_m(N')$ e questo conclude la dimostrazione.

307.8.2 Se utilizziamo il Teorema descritto nell'esercizio **86.8** del capitolo sugli integrali, la serie converge o diverge con $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^a}}{x^b} dx$ a patto che $\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$. $f'(x) = \frac{a}{x^{b-a+1}} e^{ix^a} - \frac{b}{x^{b+1}} e^{ix^a}$. Il secondo termine è assolutamente convergente mentre il primo termine converge assolutamente per $\boxed{b > a}$ come si evince cambiando variabili $x^a = t$, $\int_1^{+\infty} e^{it} t^{\frac{-b}{a}} \frac{dt}{a}$.

Quindi l'integrale $\int_1^{+\infty} e^{ix^a}/x^b dx$ e la serie $\sum e^{ik^a}/k^b$ convergono o non convergono assieme per $\boxed{b > a}$.

D'altra parte facendo lo stesso cambio nell'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^a}}{x^b} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\frac{b}{a}-\frac{1}{a}+1}} \frac{dt}{a}$ si ottiene $\boxed{a+b > 1}$. Usiamo allora il contenuto dell'esercizio sugli integrali **87.8**. Essendo $f^{(s)}(x) \sim (ia)^s x^{s(a-1)-b} e^{ix^a}$ che converge assolutamente per $s(a-1)-b < -1$ ossia $s > (1-b)/(1-a)$ e questo è chiaramente possibile. Ne segue che integrale e serie convergono o non convergono assieme per $\boxed{a+b > 1}$.

308.8.2 A parte un'analisi diretta della serie, si può utilizzare il Teorema generale descritto nell'esercizio **86.8** del capitolo sugli integrali per dire che converge o diverge con l'integrale della funzione $\frac{\cos(x^b \cos(\ln(x)))}{x^a}$

309.8.2** Ci serve il

Lemma Sia $O \subseteq \mathbf{R}$ aperto. Possiamo definire una successione $\{f_n(x)\}$ su $\mathbf{R}$ tale che: 1) $0 \leq f_n(x) \leq 1$, 2) $f_n(x) = 0$ per $x \notin O$ 3) per ogni $x \in O$, esiste almeno un valore di n tale $f_n(x) = 1$. 4) Per ogni $x \in O$ esiste un numero finito di valori di n per cui $f_n(x) \neq 0$

Dimostrazione del Lemma Definiamo le seguenti funzioni su $\mathbf{R}$

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1/4 \\ 4x - 1 & 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & x \geq 1/2 \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 1/2 \vee x \leq 1/16 \\ 16x - 1 & 1/16 \leq x \leq 1/8 \\ 1 & 1/8 \leq x \leq 1/4 \\ -4x + 2 & 1/4 \leq x \leq 1/2 \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 2^{-n+1} \vee x \leq 2^{-n-2} \\ x2^{n+2} - 1 & 2^{-n-2} \leq x \leq 2^{-n-1} \\ 1 & 2^{-n-1} \leq x \leq 2^{-n} \\ -x2^n + 2 & 2^{-n} \leq x \leq 2^{-n+1} \end{cases}$$

Poi definiamo $f_n(x) = g_n(\text{dist}(x, O^c))$. Chiaramente: 1) $g_n(x) \geq 0$, 2) se $x \notin O$ allora $x \in O^c$ e quindi $f_n(x) = g_n(0) = 0$, 3) se $x \in O$ allora $\text{dist}(x, O^c) > 0$ e quindi $\text{dist}(x, O^c) \geq 2^{-N}$ per qualche N . Ne segue $f_n(x) \neq 0$ non appena $2^{-n-2} \leq 2^{-N} \leq 2^{-n-1}$

Poi necessitiamo del secondo

Lemma Sia $\{U_k\}$ una successione di aperti. Possiamo trovare una successione di funzioni reali $\{f_k(x)\}$ tale che: 1) $f_k(x) \geq 0$ per ogni x , 2) per ogni $x \in \bigcap_{j=1}^n U_k$ esistono infiniti valori di n tale che $f_n(x) = 1$ e $f_n(x) = 0$ 3) per ogni $x \in \bigcap_{j=1}^n U_k$ esistono solo un numero finito di valori n tali che $f_k(x) \neq 0$.

Dimostrazione del Lemma Possiamo supporre $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$. Altrimenti prendiamo $V_1 = U_1$, $V_2 = U_1 \cap U_2$, e via dicendo. Dal Lemma precedente, per ogni m possiamo trovare una successione di funzioni $\{g_{m,n}\}$ $n = 1, 2, \dots$ tale che: 1) $0 \leq g_{m,n}(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ 2) se $x \notin U_m$ allora $g_{m,n}(x) = 0$ 3) per ogni $x \in U_m$ esiste almeno un valore n tale che $g_{m,n}(x) \neq 0$ 4) per ogni $x \in U_m$ esiste solo una quantità finita di valori n tale che $g_{m,n}(x) \neq 0$

Sia ora $x \notin \bigcap_{j=1}^{+\infty} U_j$ e quindi esiste m_0 tale che $x \notin U_m$ per $m > m_0$. Segue da 3) e 4) che $g_{m,n}(x) = 0$ per $m > m_0$ e per ogni n e che se $1 \leq m \leq m_0$ ci sono solo un numero finito di valori di n tali che $g_{m,n}(x) \neq 0$. Quindi se $x \notin \bigcap_{j=1}^{+\infty} U_j$ c'è solo un numero finito di indici (m, n) tali che $g_{m,n}(x) \neq 0$.

Se $x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} U_j$ allora $x \in U_m$ per ogni m ed esiste $n(m)$ tale che $g_{m,n(m)}(x) = 1$. Inoltre tranne una quantità finita di indici n , $g_{m,n}(x) = 0$. Ne concludiamo che se $x \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} U_j$ allora esistono infiniti indici per cui $g_{m,n}(x) = 1$ e infiniti indici per cui $g_{m,n}(x) = 0$.

Ora dimostriamo il risultato dell'esercizio. Sia $E = G_{\delta\sigma}$ e quindi $E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$ con $V_j \in G_\delta$ ossia V_j è intersezione di aperti. Dal Lemma precedente possiamo dire che esistono funzioni continue $g_{n,1}, g_{n,2}, g_{n,3}, \dots$, $n = 1, 2, \dots$ tali che: 1) $0 \leq g_{m,n}(x) \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$, 2) per ogni V_m esistono

infiniti valori n tali che $g_{m,n}(x) = 1$ e infiniti valori per cui $g_{m,n}(x) = 0$, 3) per ogni m esistono solo finiti valori per cui $g_{m,n}(x) \neq 0$,

Ora poniamo $h_{m,n} = 2^{-m}g_{m,n}$ ed automaticamente abbiamo 1') $0 \leq h_{m,n}(x) \leq 2^{-m}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, 2') per ogni $x \in V_m$ esistono infiniti valori di n tali che $h_{m,n}(x) = 2^{-m}$ ed infiniti valori tali che $f_{m,n}(x) = 0$, 3') per ogni $x \notin V_m$ esiste solo una quantità finita di valori di n per cui $h_{m,n}(x) \neq 0$.

Ora se $x \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$ vuol dire che $x \in V_k$ per qualche k e quindi esistono infiniti valori n per cui $h_{k,n}(x) = 2^{-k}$ e infiniti valori per cui $h_{k,n}(x) = 0$.

Ciò vuol dire che se $x \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$, allora esiste $\eta(x) > 0$ tale che per infinite coppie (m, n) $h_{m,n}(x) \geq \eta(x)$ e per infinite coppie $h_{m,n}(x) = 0$

Sia ora $x \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$, e $\varepsilon > 0$. Scegliamo $m_0 \geq 1$, tale che $2^{-m_0} \leq \varepsilon$. Ne segue che se $m > m_0$ allora $0 \leq h_{m,n}(x) < \varepsilon$. Se invece $1 \leq m \leq m_0$ c'è solo una quantità finita di valori di n tale che $h_{m,n}(x) \neq 0$ e a priori solo una quantità finita di valori di n per i quali $h_{m,n}(x) > \varepsilon$. Ne concludiamo che se $x \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$, e $\varepsilon > 0$, allora $0 \leq h_{m,n}(x) < \varepsilon$ per tutte le coppie (m, n) tranne una quantità finita.

Ora definiamo una successione $f_k(x)$ stabilendo una numerazione delle infinite coppie (m, n) . Ne segue che se $x \in \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$, allora $f_k(x)$ non converge mentre se $x \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} V_j$, allora converge a zero.

310.8.2

311.8.2 Basta applicare il teorema in **87.8** del file sugli integrali e osservare che $f^{(s)}(x) \sim (ia)^s x^{s(a-1)b} e^{ix^a}$ e se $s > (1-b)/(1-a)$ il teorema si applica.

312.8.2 $k > k_\varepsilon$ implica $|a_k - Cb_k| < \varepsilon b_k$.

$$\begin{aligned} |f(x) - Cg(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n (a_k - Cb_k)x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_k - Cb_k| \underbrace{x^k}_{0 < x < 1} + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_k - Cb_k|x^k \leq \\ &\leq g(x) \left(g^{-1}(x) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_k - Cb_k|x^k \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon b_k x^k = g(x) \left(g^{-1}(x) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_k - Cb_k|x^k \right) + \varepsilon g(x) = \\ &2\varepsilon g(x) \end{aligned}$$

Si può generalizzare. Siano $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ e $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ divergenti e $A_n \sim CB_n$. $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k$ $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} B_k x^k$. Applicando il Teorema segue che $f(x) \sim g(x)$. In particolare se $A_n \sim Cn$, allora $f(x) \sim C/(1-x)$.

313.8.2 Prima di dimostrare il risultato, vediamo che è possibile la stima $C_1 n \leq A_n \leq C_2 n$.

Infatti definitivamente per $x \rightarrow 1$

$$(1 + \varepsilon) > f(x)(1 - x) = (1 - x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \geq A_n x^n.$$

Ora prendiamo $x = 1 - 1/n$ e otteniamo e se n è abbastanza grande $n(1 + \varepsilon) > A_n(1/e - \varepsilon)$ per cui $C_1 = (1 + \varepsilon)/(1/e - \varepsilon)$. Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - x) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k + (1 - x) \sum_{k=n}^{+\infty} A_k x^k < \\ &< (1 - x) A_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k + (1 - x) \sum_{k=n}^{+\infty} C_1 k x^k = (1 - x) A_n \frac{1 - x^n}{1 - x} + (1 - x) C_1 \left(\frac{n x^n}{1 - x} + \frac{x^{n+1}}{(1 - x)^2} \right) \end{aligned}$$

per cui definitivamente

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 - x} < f(x) < (1 - x) A_n \frac{1 - x^n}{1 - x} + (1 - x) C_1 \left(\frac{n x^n}{1 - x} + \frac{x^{n+1}}{(1 - x)^2} \right) < A_n + n C_1 x^n + \frac{C_1 x^{n+1}}{1 - x}$$

Ora prendiamo $x = 1 - a/n$ e otteniamo $(1 - a/n)^n \sim e^{-a}$ e possiamo maggiorare

$$\frac{n(1 - \varepsilon)}{a} < A_n + C_1 n e^{-a} + \frac{C_1 n e^{-a}}{a} \implies A_n > C_2 n$$

se a è grande abbastanza.

$f(x)$ è monotona per cui al massimo ha una quantità numerabile di discontinuità di salto.

Possiamo trovare due polinomi $p(x)$ e $P(x)$ tali che $p(x) \leq f(x) \leq P(x)$ e $\int_0^1 (g(x) - p(x)) dx < \varepsilon$

e $\int_0^1 (P(x) - g(x)) dx < \varepsilon$. Sia $P(x) = x^k$. Poi osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - x^{k+1}} \left((1 - x^{k+1}) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n(k+1)} \right) = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx = \\ &= \int_0^1 P(t) dt \implies \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n) = \int_0^1 g(t) dt \end{aligned}$$

Prendiamo ora $g(t) = 0$ per $0 \leq t < 1/e$ e $g(t) = 1/t$ per $1/e < t \leq 1$ per cui

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n) = \int_0^1 g(t) dt = 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n) = \sum_{n \leq 1/\ln(1/x)} a_n = \sum_{n=0}^N a_n = A_N$$

e quindi $A_N \sim 1/(1 - x) \sim N$ e questo conclude la dimostrazione.

Se cade la condizione $a_n \geq 0$ non è più vero.

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 - x)} = (1 - x) \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) (x^{2k} - x^{2k+1})$$

da cui $A_{2m+1} = 0$ e $A_{2m} = m + 1$ per cui A_n oscilla ma $f(x) \sim 1/((1-x)4)$

314.8.2

$$S \doteq e^{-m} \sum_{k=0}^{+\infty} (s_k - s_m) \frac{m^k}{k!} = s - s_m + o(1)$$

Introduciamo le quantità $H < 1$, α dimodoché Hm , $\alpha\sqrt{m}$ non sono mai interi.

$$S = e^{-m} \left(\sum_{k=0}^{m-Hm} + \sum_{m-Hm}^{m-\alpha\sqrt{m}} + \sum_{m-\alpha\sqrt{m}}^{m+\alpha\sqrt{m}} + \sum_{m+\alpha\sqrt{m}}^{m+Hm} + \sum_{m+Hm}^{+\infty} \right) s_k \frac{m^k}{k!} \doteq S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

Sono necessarie alcune proprietà di $\{a_k\}$.

(a). $a_n = e^{o(\sqrt{n})}$, $s_n = e^{o(\sqrt{n})}$ e quindi definitivamente $e^{-\delta\sqrt{n}} \leq a_n \leq e^{\delta\sqrt{n}}$

Dimostrazione di (a)

Per ogni ε esiste p tale che se $n \geq p$ è vero $a_{n+1} = a_n + o(a_n/\sqrt{n}) = a_n \left(1 - \frac{\eta_n}{\sqrt{n}}\right)$, $|\eta_n| < \varepsilon$ definitivamente.

$$a_{p+r} = a_{p+r-1} \left(1 - \frac{\eta_{p+r-1}}{\sqrt{p+r-1}}\right) = a_{p+r-2} \left(1 - \frac{\eta_{p+r-1}}{\sqrt{p+r-1}}\right) \left(1 - \frac{\eta_{p+r-2}}{\sqrt{p+r-2}}\right)$$

e quindi

$$a_n = a_{p+r} = a_p \overbrace{\prod_{k=0}^{r-1} \left(1 - \frac{\eta_{p+k}}{\sqrt{p+k}}\right)}^{\chi(p,r)} \leq a_p e^{\frac{\eta_p}{\sqrt{p}} + \dots + \frac{\eta_{p+r-1}}{\sqrt{p+r-1}}} \leq a_p e^{\sum_{k=1}^n \varepsilon/\sqrt{k}} \leq a_p e^{K\varepsilon\sqrt{n}}$$

e se $\varepsilon < 1$

$$a_n = a_{p+r} = a_p \prod_{k=0}^{r-1} \left(1 - \frac{\eta_{p+k}}{\sqrt{p+k}}\right) \geq a_p e^{\sum_{k=1}^n -k\varepsilon/\sqrt{k}}$$

E quindi $|a_n| = e^{o(\sqrt{n})}$ e quindi $s_n = e^{o(\sqrt{n})}$. Ne segue pure che $|s_n - s_m| \leq K e^{\max\{m,n\}}$

(b). $|s_n - s_m| < K\sqrt{m}|a_m|e^{Kr/\sqrt{m}}$, $r = |n - m| < Hm$

Dimostrazione di (b)

$a_n = a_{m+r} = \chi(m, r)a_m$ dove

$$\begin{aligned} \chi(m, r) &= \prod_{k=m}^{m+r-1} \left(1 + \frac{K}{\sqrt{k}}\right) \leq \exp \left\{ K \int_{m-1}^{m+r-1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right\} = \exp \left\{ \frac{K}{2} \frac{m+r-1-m+1}{\sqrt{m+r-1} + \sqrt{m-1}} \right\} = \\ &\leq \exp \left\{ \frac{K}{2} \frac{r}{2\sqrt{m-1}} \right\} \leq e^{\frac{Kr}{\sqrt{m}}} \end{aligned}$$

$$|s_n - s_m| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| \leq |a_m| \sum_{k=1}^{n-m} e^{\frac{Kr}{\sqrt{m}}} = |a_m| \frac{e^{K(r+1)/\sqrt{m}} - 1}{e^{K/\sqrt{m}} - 1} \leq |a_m| K\sqrt{m} e^{Kr/\sqrt{m}}$$

Si è usato che se x è abbastanza piccolo $e^x/(e^x - 1) \leq 2/x$. Se $n < m$ la dimostrazione è la stessa. Non si capisce dove venga usata $|m - n| < Hm$.

(c). $s_n - s_m = (n - m)a_m(1 + \varepsilon_m)$ e $r = |n - m| < \alpha\sqrt{m}$.

Dimostrazione di (c)

Sia $0 < r < \alpha/\sqrt{m}$. $a_n = \chi(r, m)a_m$ e quindi $|a_n/a_m| \leq e^{Kr/\sqrt{m}} \leq e^{K\alpha}$ e quindi $a_n = O(a_m)$.
Ne consegue $a_{n+1} = a_n + o(a_n/\sqrt{n}) = a_n + o(a_m/\sqrt{n})$ ed anche

$$a_{m+r} = a_m \left(1 + o \left(\sum_{k=m}^{m+r-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) = a_m (1 + o(r/\sqrt{m})) = a_m (1 + o(1))$$

e quindi $s_n - s_m = a_{m+1} + \dots + a_{m+r} = ra_m(1 + o(1))$.

Ora riprendiamo la dimostrazione del risultato. Usiamo (a) in S_1 e S_5 .

$$|S_1| \leq e^{-m} \sum_{k=0}^{m-Hm} |s_k - s_m| \frac{m^k}{k!}$$

$$m^k e^{-am} \leq \frac{e^{-k} k^k}{a^k} \implies e^{am} \frac{m^k}{k!} e^{-am} \leq e^{am} e^{-k} \frac{k^k}{k! a^k} \leq C e^{am} e^{-k} \frac{k! e^k}{k! a^k \sqrt{2\pi k}}$$

$$\begin{aligned} 0 < a < 1, \quad |S_1| &\leq K e^{K\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m(1-H)} \frac{C e^{m(-1+a)}}{a^k \sqrt{2\pi k}} \leq C_1 e^{K\sqrt{m}} e^{m(-1+a)} a^{Hm-m} = \\ &= C_1 e^{K\sqrt{m}} e^{m(-1+a-\ln a + H \ln a)} \leq C_1 e^{-C_2 m} \quad m \text{ grande abbastanza} \end{aligned}$$

abbiamo usato H non troppo piccolo ossia $-1+a-\ln a + H \ln a < 0$ ossia $H > 1 + \frac{1-a}{\ln a} \in (0, 1)$ per $a \in (0, 1)$.

$$|S_5| < e^{-m} \sum_{k=m+Hm}^{+\infty} |s_k - s_m| \frac{m^k}{k!} \leq e^{-m} \sum_{k=m(1+H)}^{+\infty} K e^{K\sqrt{k}} \frac{m^k}{k!}$$

Sia $A \doteq 1 + H$

$$\begin{aligned} &\frac{m^{mA} e^{K\sqrt{mA}}}{(mA)!} + \frac{m^{mA+1} e^{K\sqrt{mA+1}}}{(mA+1)!} + \frac{m^{mA+2} e^{K\sqrt{mA+2}}}{(mA+2)!} + \dots \leq \\ &= \frac{m^{mA} e^{K\sqrt{mA}}}{(mA)!} \left[1 + \frac{m e^K}{mA+1} + \frac{m^2 e^{K\sqrt{2}}}{(mA+1)(mA+2)} + \dots \right] \leq \\ &\leq \frac{m^{mA}}{(mA)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m^k e^{K\sqrt{k}}}{(mA+1) \dots (mA+k)} \leq \frac{m^{mA} (mA+2)}{(mA+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m^k e^{K\sqrt{k}}}{(mA+2)^k} = \\ &= \frac{(mA)^{mA} (mA+2)}{(mA)! A^{mA} (mA+1)} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m^k e^{K\sqrt{k}}}{(mA+2)^k}}_{\text{converge}} \leq C \frac{e^{mA} A^{-mA}}{\sqrt{2\pi mA}} \end{aligned}$$

e quindi

$$|S_5| \leq C_1 e^{-m+m(1+H)-mA \ln(1+H)} = C_1 e^{m(H-(1+H) \ln(1+H))}$$

$H - (1+H) \ln(1+H) < 0$ se e solo se $Q(H) \doteq \ln(1+H) + \frac{1}{1+H} > 1$. $Q(0) = 1$, $Q'(H) = \frac{1}{1+H} - \frac{1}{(1+H)^2} > 0$ e quindi $Q(H) > 1$ e quindi $|S_5| \leq C'_1 e^{-C'_2 m}$.

Consideriamo

$$\begin{aligned}
 |S_4| &\leq e^{-m} \sum_{n=m+\alpha\sqrt{m}}^{m+Hm} |s_n - s_m| \frac{m^n}{n!} \leq e^{-m} \sum_{n=m+\alpha\sqrt{m}}^{m+Hm} K\sqrt{m}|a_m| e^{\frac{K|n-m|}{\sqrt{m}}} \frac{m^n}{n!} = \\
 &= e^{-m} \sum_{r=\alpha\sqrt{m}}^{Hm} K\sqrt{m}|a_m| e^{\frac{Kr}{\sqrt{m}}} \frac{m^{r+m}}{(r+m)!} \leq e^{-m} \sum_{r=\alpha\sqrt{m}}^{Hm} K\sqrt{m}|a_m| e^{\frac{Kr}{\sqrt{m}}} \frac{K_1}{\sqrt{m}} e^{m-\frac{r^2}{4m}} \leq \\
 &\leq K_2|a_m| \int_{\alpha\sqrt{m}}^{Hm} e^{\frac{Kr}{\sqrt{m}}} e^{-\frac{r^2}{4m}} dr \leq K_2|a_m|\sqrt{m} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{Kr-\frac{r^2}{4}} dr \underbrace{\leq}_{\alpha>4K} K_2|a_m|\sqrt{m} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{8}} dr \leq \\
 &\leq K_3|a_m|\sqrt{m}e^{-\alpha^2/8}
 \end{aligned}$$

Per S_2 si ha la stessa stima.

Usando (c) si ha

$$\begin{aligned}
 S_3 &= e^{-m}a_m \sum_{r=-\alpha\sqrt{m}}^{\alpha\sqrt{m}} r \frac{m^{m+r}}{(m+r)!} + e^{-m}a_m\epsilon_m \sum_{n=-\alpha\sqrt{m}}^{\alpha\sqrt{m}} r \frac{m^{m+r}}{(m+r)!} = S'_3 + S''_3 \\
 S'_3 &= e^{-m}a_m \sum_{r=-\alpha\sqrt{m}}^{-1} r \frac{m^{m+r}}{(m+r)!} + e^{-m}a_m \sum_{r=1}^{\alpha\sqrt{m}} r \frac{m^{m+r}}{(m+r)!} = e^{-m}a_m \sum_{r=1}^{\alpha\sqrt{m}} r \left[\frac{m^{m+r}}{(m+r)!} - \frac{m^{m-r}}{(m-r)!} \right] = \\
 &= \sum_{r=1}^{\alpha\sqrt{m}} r \frac{m^m}{m!} \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{m}) \cdots (1+\frac{r}{m})} - (1+\frac{1}{m}) \cdots (1-\frac{r-1}{m}) \right] = \\
 &\leq \sum_{r=1}^{\alpha\sqrt{m}} r \frac{m^m}{m!} \left[\frac{1 - (1+\frac{1}{m})^2 \cdots (1-\frac{r-1}{m})^2}{(1+\frac{1}{m}) \cdots (1+\frac{r}{m})} \right] \leq \sum_{r=1}^{\alpha\sqrt{m}} r \frac{m^m}{m!} \left[\frac{1 - (1+\frac{1}{m}) \cdots (1-\frac{(r-1)^2}{m^2})}{(1+\frac{1}{m}) \cdots (1+\frac{r}{m})} \right]
 \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}
 (1+\frac{1}{m}) \cdots (1+\frac{r}{m}) &\geq e^{\frac{1+\dots+r}{2m}} = e^{\frac{r(r+1)}{4m}} > e^{\frac{r^2}{4m}} \\
 1 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{r^2}{m^2}\right) &< \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{r^2}{m^2} < \frac{r^3}{m^2}
 \end{aligned}$$

Che segue da $f(x_1, \dots, x_n) \doteq x_1 + \dots + x_n + (1-x_1) \cdots (1-x_n) \geq 1$ con $0 \leq x_k \leq 1$. Basta supporre senza restrizioni che $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ e osservare $f_{x_n} = 1 - (1-x_2) \cdots (1-x_n) \geq 0$ e quindi $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_2, x_2, \dots, x_n) = 2x_2 + \dots + x_n + (1-x_2)^2(1-x_3) \cdots (1-x_n) \geq 1$. Facendo gli stessi calcoli per le altre variabili si arriva a $nx_n + (1-x_n)^n \geq 1$ che è vera dalla disuguaglianza di Bernoulli $nx_n + 1 - nx_n = 1 \geq 1$.

Maggioriamo come

$$e^{-m}a_m \sum_{r=1}^{\alpha\sqrt{m}} r \frac{m^m}{m!} \frac{r^3}{m^2} e^{\frac{-r^2}{4m}} \leq m^{-5/2}a_m \int_1^{\alpha\sqrt{m}} x^4 e^{\frac{-x^2}{4m}} dx \leq a_m \int_0^{+\infty} x^4 e^{\frac{-x^2}{4m}} dx = C_3a_m$$

e quindi

$$|S'_3| \leq C_3a_m = o(a_m\sqrt{m}) \implies |S_3| = o(a_m\sqrt{m})$$

$$|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| \leq C_1e^{-C_2m} + K_3|a_m|\sqrt{m}e^{\frac{-\alpha^2}{8}} + o(a_m\sqrt{m}) + K_3|a_m|\sqrt{m}e^{\frac{-\alpha^2}{8}} + C'_1e^{-C'_2m}$$

Sappiamo che $e^{-\varepsilon\sqrt{m}} \leq a_m \leq e^{\varepsilon\sqrt{m}}$ per cui $\frac{e^{-Cm}}{\sqrt{m}a_m} \leq \frac{e^{-Cm}}{e^{-\varepsilon\sqrt{m}}} \rightarrow 0$ dunque $e^{-Cm} = o(|a_m|\sqrt{m})$ e quindi

$$|S| = O(|a_m|\sqrt{m}e^{-\alpha^2/8}) + o(|a_m|\sqrt{m}) = s - s_m + o(1)$$

Le costanti in O e o sono indipendenti da α e O, o sono relativi a $m \rightarrow +\infty$.

Se α è grande abbastanza possiamo scrivere $s - s_m + o(1) = \delta|a_m|\sqrt{m}$ per $m > m_0$ e $\delta \sim e^{-\alpha^2/8}$. Poi sia n l'intero più vicino a $m + \sqrt{m}$ e scriviamo

$$s_n - s_m + o(1) = -s + s_n + s - s_m = \delta|a_n|\sqrt{n} + \delta|a_m|\sqrt{m} = \delta \frac{|a_n|}{|a_m|} |a_m| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} \sqrt{m} + \delta|a_m|\sqrt{m}$$

Ora è importante notare che $\sqrt{n}/\sqrt{m} \leq 2$ e soprattutto $|a_n/a_m| \leq e^{\alpha K}$ per cui $\delta|a_n/a_m| \leq C_3 e^{-\alpha^2/8}$. Ne segue

$$s_n - s_m + o(1) = C_4 \delta |a_m| \sqrt{m}$$

Ma sappiamo che $s_n - s_m = a_m(n - m)(1 + o(1)) = \sqrt{m}(1 + o(1))a_m$ e quindi

$$|\sqrt{m}(1 + o(1))a_m + o(1)| < C_4 \delta |a_m| \sqrt{m}$$

che è compatibile solo con $a_m \sqrt{m} = o(1)$. Supponiamo infatti che non sia vero e quindi esista una costante c ed una successione $m_r \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$ tale che $a_{m_r} \sqrt{m_r} \geq c$. Ne segue

$$\begin{aligned} C_4 \delta |a_{m_r}| \sqrt{m_r} &> |\sqrt{m_r}(1 + o(1))a_{m_r} + o(1)| \geq \sqrt{m_r}|a_{m_r}| - \sqrt{m_r}|a_{m_r}o(1)| - |o(1)| \geq \\ &\geq \delta |a_{m_r}| \sqrt{m_r}(1 - o(1)) - o(1) \end{aligned}$$

il che è impossibile essendo δ piccolo a piacere. Quindi si è dimostrato che $a_m \sqrt{m} = o(1)$ e insieme con la Borel-sommabilità, implica la convergenza della serie.

315.8.2 La funzione e^{iAt} è sviluppabile in serie di Fourier i cui coefficienti sono

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iAt} e^{-ikt} dt = \frac{\sin \pi(A - k)}{A - k}$$

Parseval ci dà

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |e^{iAt}|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi(A - k)}{A - k} \right)^2 \Big|_{A=x/\pi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{(x - k\pi)^2}$$

316.8.2 $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z)$. $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$

$$-z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{z}{z^2} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{-\frac{z}{k}} = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)^{-1}$$

Sappiamo che $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$

e quindi $-z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi / \sin(\pi z)$

317.8.2 Se $\lambda_n = 0$ la successione è non decrescente e quindi la serie diverge. Sia $\lambda_{N-1} > 0$ e quindi $f(N) > N$. Infatti

$$f(2) \geq f(1) + \lambda_1 + 1, \quad f(3) \geq f(2) + 2\lambda_2 + 1 \geq f(1) + 2\lambda_2 + 2 \geq f(1) + 2 \geq 3$$

Se $f(N) \geq f(N-1) + (N-1)\lambda_{N-1} + 1 > (N-1) + 1 = N$

Sia ora $f(n) < m < f(n+1)$.

$$\begin{aligned} a_m &\geq a_{m-1} - \lambda_{m-1}a_{f(m-1)} \geq a_{m-2} - \lambda_{m-2}a_{f(m-2)} - \lambda_{m-1}a_{f(m-1)} \geq \dots \geq \\ &\geq a_m - \sum_{k=f(n)}^{m-1} \lambda_k a_{f(k)} = a_m - \sum_{k=f(n)}^{f(n+1)-1} \lambda_k a_{f(k)} \end{aligned}$$

e quindi $a_m \geq \max\{a_m - \sum_{k=f(n)}^{f(n+1)-1} \lambda_k a_{f(k)}, 0\} \doteq b_n$

$$\sum_{k=f(n)}^{f(n+1)-1} a_k \geq a_{f(n)} + (f(n+1) - f(n) - 1)b_n \geq a_{f(n)} + n\lambda_n b_n \geq a_{f(n)} + \sum_{k=N}^n \lambda_k b_n$$

Sommiamo su n

$$\sum_{n=f(N)}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=N}^{+\infty} a_{f(n)} + \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k=N}^n \lambda_k b_n = \sum_{n=N}^{+\infty} a_{f(n)} + \sum_{k=N}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda_n b_n \quad (1)$$

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \lambda_n b_n \geq \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda_n a_{f(n)} - \sum_{n=k}^{+\infty} \sum_{r=f(n)}^{f(n+1)-1} \lambda_r a_{f(r)} \geq \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda_n a_{f(n)} - \sum_{r=f(k)}^{+\infty} \lambda_r a_{f(r)} = \sum_{r=k}^{f(k)-1} \lambda_r a_{f(r)}$$

e inoltre dalle ipotesi $\sum_{n=k}^{f(k)-1} \lambda_n a_{f(n)} \geq a_k - a_{f(k)}$. Ora riprendiamo (1) e scriviamo

$$\sum_{n=f(N)}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=N}^{+\infty} a_{f(n)} + \sum_{n=N}^{+\infty} (a_n - a_{f(n)}) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n \quad (f(N) > N)$$

ma questo è impossibile se $\sum a_k < +\infty$ quindi deve essere $\sum a_k = +\infty$.

Dimostriamo il secondo risultato. Le ipotesi sono: 1) $f(n+1) - f(n) \geq n\lambda_{n+1} + 1$, 2) $a_{n+1} \leq a_n$ e $0 < a_n \leq a_{n+1} + \lambda_n a_{f(n)}$.

Assumiamo $\lambda_{N-1} > 0$ cosicché $f(N) > N$ e inoltre $f(n) > n$. Da $N \leq n \leq M$ abbiamo

$$a_{f(n)} \leq a_n \leq a_{f(M)+1} + \sum_{k=f(n)}^{f(M)} \lambda_k a_{f(k)}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=N}^M (f(n) - f(n-1))a_{f(n)} &\leq \sum_{n=N}^M \left[(f(n) - f(n-1))a_{f(M)+1} + (f(n) - f(n-1)) \sum_{k=f(n)}^{f(M)} \lambda_k a_{f(k)} \right] \leq \\
 &\leq f(M)a_{f(M)+1} + \sum_{k=f(N)}^{f(M)} \lambda_k a_{f(k)} \sum_{n=N, f(n) \leq k} (f(n) - f(n-1)) \leq \\
 &\leq f(M)a_{f(M)+1} + \sum_{k=f(N)}^{f(M)} \lambda_k a_{f(k)} (k - f(N-1)) \leq f(M)a_{f(M)+1} + \sum_{k=f(N)}^{f(M)} a_{f(k)} \lambda_k (k-1) \leq \\
 &\leq f(M)a_{f(M)+1} + \sum_{k=f(N)}^{f(M)} a_{f(k)} (f(k) - f(k-1)) \leq
 \end{aligned}$$

Supponiamo $\sum a_k < +\infty$ convergente.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=N}^{+\infty} (f(n) - f(n-1))a_{f(n)} &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} (f(n) - f(n-1))a_{f(n)} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{r=f(n-1)}^{f(n)-1} a_{f(n)} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{r=f(n-1)}^{f(n)-1} a_r \\
 &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty
 \end{aligned}$$

Sappiamo che $na_n \rightarrow 0$ e otteniamo

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (f(n) - f(n-1))a_{f(n)} \leq \sum_{h=f(N)}^{+\infty} (f(k) - f(k-1))a_{f(k)}$$

e questo è impossibile a meno che $\sum a_k = +\infty$.

La condizione $f(n+1) - f(n) \geq \lambda_n f(n) + 1$ non può essere sostituita a $f(n+1) - f(n) \geq \lambda_{n+1} f(n) + 1$. Sia infatti $\{a_n\}$ una qualsiasi successione. $f(1) = 1$, $f(2) \geq 1 + \lambda_1 \cdot 1 \geq 2$ e prendiamo λ_1 tale che $a_1 \leq a_2 + \lambda_1 a_{f(1)} = a_2 + \lambda_1 a_1$. Poi si procede per induzione: fissati $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ e $f(2), \dots, f(m)$ si ricava prima λ_m in modo che $a_m \leq a_{m+1} + \lambda_m a_{f(m)}$ e poi $f(m)$ in modo che $f(m+1) - f(m) \geq \lambda_m f(m) + 1$.

Le condizioni del primo risultato $f(n+1) - f(n) \geq \lambda_n f(n) + 1$ e $a_n \leq a_{n+1} + \lambda_n a_{f(n)}$ non bastano alla divergenza della serie $\sum a_n$.

318.8.2 $\left| \sum_{k=p}^q \int_a^b g f_k dx \right| = \left| \int_a^b g \sum_{k=p}^q f_k dx \right| \leq \sup_{a < x < b} \left| \sum_{k=p}^q f_k \right| \int_a^b |g| dx < \varepsilon J$ per cui converge.

Inoltre

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=p}^{+\infty} \int_a^b g f_k dx \right| &\leq \overline{\lim}_{q \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=p}^q \int_a^b g f_k dx \right| \leq \varepsilon J \\
 \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b g f_k dx - \int_a^b g f dx \right| &= \left| \int_a^b g \left(\sum_{k=1}^N f_k - f \right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \int_a^b g f_k dx \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_a^b g \left(\sum_{k=1}^N f_k - f \right) \right| + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^n \left| \int_a^b g f_k dx \right| \leq \varepsilon J + \varepsilon J
 \end{aligned}$$

Applicazione

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x) \ln(1+x) dx &= \int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] = -\ln 2 - (\ln 2 - 1) - \left(\frac{\pi^2}{12} - 1 \right) = 2 - 2\ln 2 - \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

dopo avere osservato che $\int_0^1 |\ln x| dx < +\infty$ e la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$ converge uniformemente in $(a, 1]$ con $-1 < a < 1$.

319.8.2 La necessità è evidente. Se accade che $\int_a^b g \sum f_n dx = \sum \int_a^b g f_n dx$ vuol dire che le due serie esistono e quindi sono convergenti. Vediamo ora la sufficienza. Supponiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b g f_n dx < \infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^{b-\delta} g f_n dx = \int_a^{b-\delta} g \sum_{n=1}^{+\infty} f_n dx$$

per il teorema di prima e quindi

$$L \underbrace{\quad}_{\text{funzioni non negative}} \doteq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^{b-\delta} g f_n dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\delta} g \sum_{n=1}^{+\infty} f_n dx \doteq \int_a^b g \sum_{n=1}^{+\infty} f_n dx$$

$$\left| L - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^{b-\delta} g f_n dx \right| = \left| L - \sum_{n=1}^N \int_a^{b-\delta} g f_n dx - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_a^{b-\delta} g f_n dx \right| < \varepsilon, \quad \delta < \delta_\varepsilon$$

Se N è grande abbastanza e δ piccolo abbastanza, ricaviamo $\left| L - \sum_{n=1}^N \int_a^{b-\delta} g f_n dx \right| < 2\varepsilon$ e

siccome $\left| \sum_{n=1}^N \int_a^{b-\delta} g f_n dx - \sum_{n=1}^N \int_a^b g f_n dx \right| < \varepsilon$ otteniamo finalmente che

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\delta} g f_n dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b g f_n dx$$

Applicazioni.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x} \ln(1-x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} dx = 4\sqrt{1-x} \Big|_0^1 = -4$$

D'altra parte possiamo scrivere

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx = - \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k\sqrt{1-x}} dx = - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{k\sqrt{1-x}} dx$$

La serie è costituita da termini non negativi e converge uniformemente in $[-1, a]$ per ogni $a < 1$.

$1/\sqrt{1-x} > 0$ e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ converge e quindi si applicano le condizioni del Teorema. Inoltre

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{k} = \frac{\beta(k+1, 1/2)}{k} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)}{k\Gamma(k+3/2)} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)}{k(k+1/2)\Gamma(k+1/2)} = \frac{2(2k)!!}{k(2k+1)!!}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 x^k (1-x)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{k} &= \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \frac{2}{5} + \frac{4}{3} \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} + \frac{4}{3} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{2+2k}{5+2k} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} S \end{aligned}$$

Viene fuori $(5+2n)a_n = (2+2n)a_{n-1}$ e $5 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n-1} - a_n)n$

$$5(S - a_0) = 2S + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} ((n-1)a_{n-1} - a_n n) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} = 4S - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n$$

La serie $\sum a_n$ converge e $a_n > a_{n+1}$ da cui $n a_n \rightarrow 0$ e quindi $S = 2$ e quindi $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx = -4$

Un'altra applicazione è ($p > -1$) $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln x dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{k+p} \ln x dx = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+p)^2}$.

Il punto $x = 0$ è di divergenza per $\ln x$ ma $\int_0^a \ln x dx$ converge e vale il Teorema precedente. Il punto $x = 1$ è di non convergenza per la serie e vale il Teorema di codesto esercizio.

Un altro esempio è $\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x) dx}{x} = \frac{\zeta(3)}{4}$. Scriviamo l'integrale come

$$\int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x-1} = \int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x(1-1/x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x^{k+1}} = \frac{1}{2} \ln^3 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x^{k+1}}$$

L'uniforme convergenza si ha solo in $[\delta, 2]$ con $\delta > 1$. Integrando due volte per parti si arriva a

$$\int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x^{k+1}} = \frac{-\ln^2 2}{k2^k} - \frac{2 \ln 2}{k^2 2^k} - \frac{2}{k^3 2^k} + \frac{2}{k^3}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 2^k} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2} \boxed{\text{rich.47}}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 2^k} = \text{Li}_3(1) = \frac{7\zeta(3)}{8} - \frac{\pi^2 \ln 2}{12} + \frac{\ln^3 2}{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \ln^3 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^2 \frac{\ln^2 x dx}{x^{k+1}} &= \\ &= \frac{\ln^3 2}{3} - \ln^3 2 - 2 \ln 2 \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2} \right) - 2 \left(\frac{7\zeta(3)}{8} - \frac{\pi^2 \ln 2}{12} + \frac{\ln^3 2}{6} \right) + 2\zeta(3) = \frac{\zeta(3)}{4} \end{aligned}$$

320.8.2 Sia $g^+ = (g + |g|)/2$, e $g^- = (|g| - g)/2$ e ugualmente per f_n . $gf_n = (g^+ - g^-)(f_n^+ - f_n^-) = g^+f_n^+ - g^+f_n^- - g^-f_n^+ + g^-f_n^-$ e si applica il Teorema precedente a ciascuno dei termini. Le condizioni sono sufficienti ma non necessarie. Prendiamo le funzioni $f_n(x) = (-1)^n x^n$ e $g(x) = 1$, $(a, b) = (0, 1)$.

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 x^k dx$$

ma

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 |(-1)^k x^k| dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} |(-1)^k x^k| dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x} = +\infty$$

Come applicazione prendiamo $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x} \ln x dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k+p} \ln x dx$, $p > -1$. In questo caso $f_k(x) = (-1)^k x^k$ e $g(x) = x^p \ln x$ e osserviamo che $\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+p} \ln x dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(k+p)^2}$ per cui il teorema può applicarsi.

Applicazione. Consideriamo $\int_0^1 \frac{x^p \ln x}{(1+x)^2} dx$ Se definissimo $g(x) = x^p \ln x$, e $f_n(x) = (-1)^n (n+1)$ avremmo

$$\int_0^1 |x^p \ln x| \sum_{k=0}^{+\infty} |(-1)^k (k+1)| x^k dx = \int_0^1 \frac{x^p |\ln x|}{(1-x)^2} dx = +\infty$$

Ugualmente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^p |\ln x| |(-1)^k (k+1)| x^k dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^p x^k |\ln x| dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{(k+p+1)^2} = +\infty$$

e il Teorema non si applica. Allora prendiamo $g(x) = \frac{x^p \ln x}{1+x}$ $f_k(x) = (-1)^k$

$$\int_0^1 \frac{x^p |\ln x|}{1+x} \sum_{k=0}^{+\infty} |(-1)^k| x^k = \int_0^1 \frac{x^p |\ln x|}{(1+x)(1-x)} < +\infty$$

e il Teorema vale. Possiamo quindi dire che

$$\int_0^1 \frac{x^p \ln x}{(1+x)^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) \int_0^1 x^{k+p} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{-(k+p+1)^2} \underbrace{=}_{p=0} -\ln 2$$

Solo la condizione $\int_a^b |g(x) \sum f_n| dx < +\infty$ non basta. Sia $g \equiv 1$ e $f \equiv 0$. Scriviamo $f(x) =$

$\sum f_n \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} 2k^2 x e^{-k^2 x^2} - 2(k+1)^2 x e^{-(k+1)^2 x^2}$, $a = 0$, $b = 1$. Chiaramente $\int_0^1 g \sum f_n dx = 0$ ma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (2k^2 x e^{-k^2 x^2} - 2(k+1)^2 x e^{-(k+1)^2 x^2}) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - e^{-k^2}) = +\infty$$

e quello che manca è la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g|f_k(x)|dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 |2k^2xe^{-k^2x^2} - 2(k+1)^2xe^{-(k+1)^2x^2}|dx$$

$$2k^2xe^{-k^2x^2} - 2(k+1)^2xe^{-(k+1)^2x^2} \geq 0 \iff x \geq x_k \doteq \left(\frac{\ln(1+1/k)}{k+1/2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e $x_k < 1/k$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 |2k^2xe^{-k^2x^2} - 2(k+1)^2xe^{-(k+1)^2x^2}|dx \geq \sum_{k=0}^N \int_{\frac{1}{k}}^1 (2k^2xe^{-k^2x^2} - 2(k+1)^2xe^{-(k+1)^2x^2})dx =$$

$$= \sum_{k=0}^N e^{-1} - e^{-k^2} - e^{-\frac{(k+1)^2}{k^2}} + e^{-(k+1)^2} \geq C \ln N$$

con C indipendente da N .

321.8.2 $\left| \sum_{k=p}^q \int_a^{+\infty} g f_k dx \right| = \left| \int_a^{+\infty} g \sum_{k=p}^q f_k dx \right| \leq \sup_{x>a} \left| \sum_{k=p}^q f_k \right| \int_a^{+\infty} |g| dx < \varepsilon J$ per cui converge.

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^{+\infty} g f_k dx - \int_a^b g f dx \right| = \left| \int_a^{+\infty} g \left(\sum_{k=1}^N f_k - f \right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \int_a^{+\infty} g f_k dx \right| \leq \varepsilon J + \varepsilon J$$

322.8.2 Definiamo Sia $g^+ = (g + |g|)/2$, e $g^- = (|g| - g)/2$ e ugualmente per f_n . $g f_n = (g^+ - g^-)(f_n^+ - f_n^-) = g^+ f_n^+ - g^+ f_n^- - g^- f_n^+ + g^- f_n^-$ e possiamo prendere nonnegative sia g che f_n .

Primo caso. Esiste $\sum \int_a^{+\infty} g f_n dx$. Ne segue che per nonnegatività esiste $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sum \int_a^A g f_n dx$ e inoltre

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sum \int_a^A g f_n dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A g \sum f_n dx = \int_a^{+\infty} g \sum f_n dx$$

Secondo caso. Esiste $\int_a^{+\infty} g \sum f_n dx$.

$$\int_a^{+\infty} g \sum f_n dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A g \sum f_n dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sum \int_a^A g f_n dx$$

L'ultima espressione è crescente per $A \rightarrow +\infty$ e quindi essendo limitata da $\int_a^{+\infty} g \sum f_n dx$ ammette limite che è $\sum \int_a^{+\infty} g f_n dx$ e la dimostrazione è conclusa.

Applicazione (sta anche nel file sui numeri complessi)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx) dx}{e^{ax} - 1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x} \frac{x}{e^{ax} - 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} \sum_{k=0}^{+\infty} x e^{-akx}$$

Osserviamo che $\sup_{x \geq 0} \sum_{k=N-1}^{+\infty} x e^{-akx} = \sup_{x \geq 0} \frac{x e^{-aNx}}{1 - e^{-ax}}$ non è piccolo e quindi non converge uniformemente in $(0, +\infty)$ ma $\sup_{x \geq a} \sum_{k=N-1}^{+\infty} x e^{-akx} = \sup_{x \geq a} \frac{x e^{-aNx}}{1 - e^{-ax}}$ è tanto più piccolo quanto più N è grande e quindi la serie converge uniformemente in $[a, +\infty)$ con $a > 0$ e lo stesso argomento del Teorema ci permetterebbe di formularne un altro con la serie $\sum f_k$ convergente uniformemente in $[a, +\infty)$, per ogni $a > 0$. Inoltre la condizione $\int_0^{+\infty} |g| \cdot \left| \sum f_k \right| dx < +\infty$ diventa $\int_0^{+\infty} |\sin x| \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ax(k+1)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} |\sin x|}{1 - e^{-ax}} dx$ che chiaramente converge. Possiamo applicare questa seconda versione del Teorema e scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{e^{ax} - 1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(bx) e^{-ax(k+1)} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b}{(ka)^2 + b^2}$$

Con $a = 2\pi$ abbiamo $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b}{(2\pi k)^2 + b^2}$ e ricordiamo che $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + (2\pi k)^2}$ per cui

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b}{(2\pi k)^2 + b^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b}{(ka)^2 + b^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{e^b - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{b} \right]$$

323.8.2 Se $x = k_0\pi$ per qualche k , non c'è nulla da dimostrare e quindi sia $x \neq 0 \pmod{\pi}$ con la condizione $\sum |a_k| |\cos kx| < +\infty$. Sia $r_k \doteq |a_k|$. $r_{k+1} \leq C r_k$ e supponiamo $C \geq 1$.

$$\begin{aligned} r_{k-1} |\cos(k-1)x| + r_k |\cos kx| &\geq \frac{r_k |\cos(k-1)x|}{C} + \frac{r_k}{C} |\cos kx| \geq \frac{r_k |\cos(k-1)x|^2}{C} + \frac{r_k}{C} |\cos kx|^2 = \\ &= \frac{r_k}{C} \left[1 + \frac{\cos 2(k-1)x}{2} + \frac{\cos 2kx}{2} \right] = \\ &= \frac{r_k}{C} \left[1 + \frac{\cos(2k-1)x \cos x + \sin(2k-1)x \sin x + \cos(2k-1)x \cos x - \sin(2k-1)x \sin x}{2} \right] = \\ &= \frac{r_k}{C} (1 - \cos x \cos(2k-1)x) \geq \frac{r_k}{C} (1 - |\cos x|) \implies r_k \leq \frac{C}{1 - |\cos x|} (r_{k-1} |\cos(k-1)x| + r_k |\cos kx|) \end{aligned}$$

e quindi la serie $\sum r_k$ converge per il teorema del confronto. Per la serie col seno l'argomento è lo stesso usando $\sin^2(k-1)x + \sin^2 kx = 1 - \cos x \cos(2k-1)x > 1 - |\cos x|$.

324.8.2 Assumiamo come la solito $C > 1$.

$$\begin{aligned} r_{n-1} |\cos l_{n-1}x| + r_n |\cos l_nx| &\geq \frac{1}{C} r_n (|\cos l_{n-1}x| + |\cos l_nx|) \geq r_n C^{-1} (\cos^2 l_{n-1}x + \cos^2 l_nx) = \\ &= C^{-1} r_n \left[1 + \frac{\cos(2l_{n-1}x) + \cos(2l_nx)}{2} \right] = \\ &= C^{-1} r_n \left[1 + \frac{\cos((l_n + l_{n-1})x + (l_n - l_{n-1})x) + \cos((l_n + l_{n-1})x - (l_n - l_{n-1})x)}{2} \right] = \\ &= C^{-1} r_n (1 + \cos(l_n + l_{n-1})x \cos(l_n - l_{n-1})x) \geq C^{-1} r_n (1 - |\cos(l_n - l_{n-1})x|) \end{aligned}$$

da cui

$$r_n \leq \frac{C}{1 - |\cos(l_n - l_{n-1})x|} (r_{n-1} |\cos l_{n-1}x| + r_n |\cos l_nx|)$$

e la condizione imposta $0 < \alpha \leq (l_n - l_{n-1})x_0 \leq \beta < \pi$ implica che $1 - |\cos(l_n - l_{n-1})x_0| \geq C_1 > 0$. La convergenza della serie $\sum r_k$ è evidente.

Una condizione più generale di $0 < \alpha \leq (l_n - l_{n-1})x_0 \leq \beta < \pi$ è $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n-k}^n \cos l_p x_0 > 0$ per un certo k . Ad esempio prendiamo $k = 0$ da cui $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos l_n x_0 \geq \alpha > 0$ definitivamente. Quindi definitivamente $r_n |\cos l_n x_0| \geq r_n \alpha$ da cui la convergenza della serie $\sum r_k$ assumendo che converge la serie $\sum r_k |\cos l_k x_0|$.

Prendiamo la serie $\sum r_n \cos(2n-1)x$ con $\sum r_k = +\infty$. La serie converge per $x = \pi/2$ ed infatti fallisce la condizione $0 < \alpha \leq (l_n - l_{n-1})x_0 \leq \beta < \pi$ essendo $(l_n - l_{n-1})x_0 = \pi$ quando d'altra parte si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\cos(2n+1)\frac{\pi}{4}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per k generico abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{p=n_0}^{+\infty} r_p |\cos l_p x_0| &= \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=n_0+k(q-1)}^{n_0+qk} r_p |\cos l_p x_0| \geq \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=n_0+k(q-1)}^{n_0+qk} \frac{r_{n_0+kq}}{C^{n_0+kq-p}} |\cos l_p x_0| \geq \\ &\geq \alpha \sum_{q=1}^{+\infty} r_{n_0+kq} \sum_{p=0}^k \frac{1}{C^p} = K \sum_{q=1}^{+\infty} r_{n_0+kq} \implies \text{convergenza di } \sum r_k \end{aligned}$$

Chiaramente se $l_k - l_{k-1} \rightarrow l \neq 0$ e $0 < l\pi < \pi$ il teorema vale.

325.8.2

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k_n} \sum_{p=n-k_n}^n u_p &= \frac{1}{1+k_1} (u_{1-k_1} + u_{2-k_1} + \dots + u_1) + \frac{1}{1+k_2} (u_{2-k_2} + u_{3-k_2} + \dots + u_2) + \\ &+ \frac{1}{1+k_3} (u_{3-k_3} + u_{4-k_3} + \dots + u_3) + \frac{1}{1+k_4} (u_{4-k_4} + u_{5-k_4} + \dots + u_4) + \dots = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q u_q \end{aligned}$$

$b_q = \frac{1}{1+k_q} + \frac{1}{1+k_{q+1}} + \dots + \frac{1}{1+k_p}$ con $p - k_p \leq q$ (si è usata a)). Da b) $p \leq q + k_p \leq q + C_1 p$ ossia $p \leq q/(1 - C_1)$. Prendiamo ora $C_1 = 1/2$ e $m = \min\{k_j\}$ con $q \leq j \leq p$ e otteniamo

$$b_q = \frac{1}{1+k_q} + \frac{1}{1+k_{q+1}} + \dots + \frac{1}{1+k_p} \leq \frac{p-q+1}{1+m} \leq \frac{1+k_p}{1+m}$$

Ora a me serve k_j monotona per dire $k_p \leq k_{2q} \leq C_2 k_q$ e $m = k_q$ altrimenti mi sembra difficile.

Quindi $b_q \leq \frac{1+C_2 k_q}{1+k_q} \leq C_3$ e quindi si ha la convergenza di $\sum_{q=1}^{+\infty} b_q u_q$

326.8.2 Assumiamo $C > 1$. Dalla V) abbiamo

$$\sum_{p=n-k_n}^n r_p |\cos l_p x| > \frac{r_n}{C} \sum_{p=n-k_n}^n |\cos l_p x| \iff r_n < \frac{C}{k_n} \sum_{p=n-k_n}^n r_p |\cos l_p x| \left[k_n \left(\sum_{p=n-k_n}^n r_p |\cos l_p x| \right)^{-1} \right]$$

e per VI) $r_n < \frac{C'}{k_n} \sum_{p=n-k_n}^n r_p |\cos l_p x|$. Applicando il risultato precedente si ha la convergenza di $\sum r_k$.

327.8.2 Cominciamo da r_k monotona decrescente. Sia $x_1 - x_2 = \delta$.

$$|\sin l_n \delta| = |\sin((l_n x_1 - \alpha_n) - (l_n x_2 - \alpha_n))| \leq |\cos(l_n x_1 - \alpha_n)| + |\cos(l_n x_2 - \alpha_n)|$$

per cui $\sum r_n |\sin l_n \delta| < +\infty$ e quindi $\sum r_n \sin^2 l_n \delta < +\infty$ e quindi $\sum_{n=1}^m r_n \sin^2 l_n \delta < A$. Supponiamo che $\sum r_n = +\infty$. Ne segue

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^m r_n \sin^2 l_n \delta}{\sum_{n=1}^m r_n} = 0 \implies \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^m r_n \cos(2l_n \delta)}{\sum_{n=1}^m r_n} = 1$$

$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \cos(2k_n \delta) < 1$ implica che per $m > m_0$ si ha $\frac{1}{m} \left| \sum_{n=1}^m \cos(2l_n \delta) \right| \doteq \frac{|v_m|}{m} < \alpha$ con $0 < \alpha < 1$. Da Abel

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m r_n \cos(2l_n \delta) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{m_0} r_n \cos(2l_n \delta) + \sum_{n=m_0}^m r_n \cos(2l_n \delta) \right| = \left| \sum_{n=1}^{m_0} r_n \cos(2l_n \delta) + \sum_{n=m_0}^m r_n (v_n - v_{n-1}) \right| = \\ &\leq \sum_{n=1}^{m_0} r_n + \left| \sum_{n=m_0}^m (r_n v_n - r_{n-1} v_{n-1}) + \sum_{n=m_0}^m (r_{n-1} - r_n) v_{n-1} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{m_0} r_n + (r_m v_m - r_{m_0-1} v_{m_0-1}) + \sum_{n=m_0}^m |v_{n-1}| \underbrace{(r_{n-1} - r_n)}_{\geq 0} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{m_0} r_n + |r_m v_m - r_{m_0-1} v_{m_0-1}| + \alpha \sum_{n=m_0}^m (n-1)(r_{n-1} - r_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{m_0} r_n + (r_m v_m + r_{m_0-1} v_{m_0-1}) + \alpha(m_0 - 1)r_{m_0-1} - \alpha m r_m + \alpha \sum_{n=m_0}^m r_n \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^m r_n + (\alpha r_m m + r_{m_0-1} v_{m_0-1}) + \alpha(m_0 - 1)r_{m_0-1} - \alpha m r_m = \\ &= \sum_{n=1}^m r_n + r_{m_0-1} v_{m_0-1} + \alpha(m_0 - 1)r_{m_0-1} \leq C_1 \sum_{n=1}^m r_n \end{aligned}$$

tenendo conto del fatto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m r_n = +\infty$. Ma allora $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{|\sum_{n=1}^m r_n \cos(2l_n \delta)|}{\sum_{n=1}^m r_n} = 0$ il che è falso.

Ora analizziamo la seconda condizione ossia $r_{n+p} \leq C r_n$ per ogni $n, p \geq 0$. Definiamo $R_n = [\max(r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, \dots)]/C$ e chiaramente $R_n \geq R_{n+1}$. Inoltre $R_n \leq C r_n$. $R_n \leq \frac{r_n}{C} \max(1, \frac{r_{n+1}}{r_n}, \frac{r_{n+p}}{r_n}, \dots)$ e da $r_{n+p}/r_n \leq C$ abbiamo $r_n \leq C R_n$. Dunque $\sum r_n$ converge se e solo se converge $\sum R_n$. Essendo R_n monotona, possiamo applicare il ragionamento precedente e dire che $\sum R_k$ converge. ■

Dai risultati precedenti segue: supponiamo

$$\begin{aligned} I) \quad & k_{n+1} - k_n \leq 1, \quad II) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} k_n/n < 1, \quad III) \quad k_{2n}/k_n = O(1), \quad V) \quad r_n \leq C r_{n-p} \quad p = 1, 2, \dots, k_n \\ VI) \quad & \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} k_n^{-1} \sum_{p=n-k_n}^n |\sin l_p \delta| > 0, \quad \delta \neq \pi \quad \sum r_k = +\infty, \end{aligned}$$

Allora la serie $\sum r_n \cos(l_n x - \alpha_n)$ non può convergere per due punti x_0, x_1 tali che $x_1 - x_0 \not\equiv \delta \pmod{2\pi}$

Per dimostrarlo prendiamo partiamo da [\[rich.49\]](#) *coi seni al posto dei coseni* e vediamo che sono verificate le ipotesi I), II), III), V), VI) e $\sum r_k = +\infty$. Vuol dire che IV) con δ al posto di x_0 è falsa ma allora, dalla prima parte della presente dimostrazione, segue che $\sum r_k |\cos(l_n x - \alpha_n)|$ non può convergere per due punti x_1 e x_2 tali che $x_1 - x_2 \equiv \delta \pmod{\pi}$

328.8.2 $\cos 2^{n+1}x = 2(\cos 2^n x)^2 - 1$, $|\cos 2^n x| + |\cos 2^{n+1}x| \geq (\cos 2^n x)^2 + (\cos 2^{n+1}x)^2 \geq 7/16$ e vale [\[rich.46\]](#)

329.8.2

$$r_n > r_{n-1}(1 + c/n)^{-1} > r_{n-1}e^{-c/n} \implies r_{n-k} > r_n e^{-c(\frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k})} > r_n e^{\frac{-ck}{n-k}}$$

e ($k = \lfloor n/2 \rfloor$)

$$\begin{aligned} \sum_{p=n-k_n}^n r_p |f(px)| &> r_n \sum_{p=n-k_n}^n |f(px)| e^{\frac{-ck_n}{n-k_n}} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{p=n-k_n}^n r_p |f(px)| e^{\frac{-ck_n}{n-k_n}} &> \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{k_n} \sum_{p=n-k_n}^n |f(px)| e^{\frac{-ck_n}{n-k_n}} \end{aligned}$$

Sappiamo che $px - [px]$ è uniformemente distribuita in $[0, 1]$ e quindi se x è irrazionale, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(kx)|$ tende a $\int_0^1 |f(x)| dx$

$$\frac{1}{k_n} \sum_{p=n-k_n}^n |f(px)| e^{\frac{-ck_n}{n-k_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f(x)| dx$$

mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k_n} \sum_{p=n-k_n}^n r_p |f(px)| e^{\frac{-ck_n}{n-k_n}}$ converge per [\[rich.48\]](#) e segue dalla convergenza di $\sum r_n |f(nx)|$.

330.8.2 Vedi [\[rich.36\]](#) del capitolo sui numeri complessi

331.8.2 L'autore utilizza il Teorema 4 per dimostrare che la serie non converge assolutamente in due punti x_0, x_1 tali che $x_1 - x_0 \not\equiv k\pi$ ma a me sembra più semplice.

$$\sum \frac{|\cos(kx + \alpha \ln k)|}{k \ln k} \geq \sum \frac{|\cos(kx + \alpha \ln k)|^2}{k \ln k} = \sum \frac{1}{2k \ln k} + \sum \frac{\cos(2kx + 2\alpha \ln k)}{2k \ln k}$$

ma $\sum_{+\infty} \frac{\cos(2kx + 2\alpha \ln k)}{2k \ln k} = \operatorname{Re} \sum \frac{e^{2ikx} k^{2i\alpha}}{2k \ln k}$ sappiamo essere convergente per cui $\sum \frac{|\cos(kx + \alpha \ln k)|}{k \ln k} = +\infty$.

332.8.2

333.8.2

334.8.2 $a_{n-1} \geq (1 + \alpha/(n-1))^{-1} a_n$,

$$a_{n-2} \geq \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n-2}} a_{n-1} > \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n-2}} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n-1}} a_n > \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{n-2}\right)^2} a_n \implies \sum_{\nu=1}^k a_{n-\nu} \geq \frac{k a_n}{\left(1 + \frac{\alpha}{n-k}\right)^k}, \quad k < n$$

$$ka_n \leq \left[1 + \frac{\alpha}{n-k}\right]^k \sum_{\nu=1}^k a_{n-\nu} < e^{\frac{k\alpha}{n-k}} \sum_{\nu=1}^k a_{n-\nu} \quad (1)$$

Poi osserviamo

$$\sum_{k=1}^n (p_{k+1} - p_k) = \sum_{k=1}^n O(1)(p_k - p_{k-1}) \implies p_{n+1} - p_1 = O(1)(p_n - p_0) \implies \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{p_1 + O(1)p_0}{p_n} = O(1)$$

Dalla (1) abbiamo

$$(p_n - p_{n-1})a_{p_n} \leq e^{\frac{p_n - p_{n-1}}{\alpha p_n}} \sum_{\nu=1}^{p_n - p_{n-1}} a_{p_n - \nu} < e^{\frac{p_n - p_{n-1}}{\alpha p_{n-1}}} \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n - 1} a_k = O(1) \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n - 1} a_k$$

$$\text{e quindi } \sum_{n=n_0}^{+\infty} (p_n - p_{n-1})a_{p_n} \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n.$$

Ora vediamo l'altro verso del Teorema. $a_{n+\nu} \leq (1+\alpha/n)^\nu a_n$ per cui $\sum_{\nu=1}^k a_{n+\nu} \leq ka_n(1+\alpha/n)^k < ka_n e^{k\alpha/n}$ da cui

$$(p_{n+1} - p_n)a_{p_n} > e^{\frac{-\alpha(p_{n+1} - p_n)}{p_n}} \sum_{\nu=1}^{p_{n+1} - p_n} a_{p_n + \nu} = O(1) \sum_{k=p_{n+1}}^{p_{n+1}} a_k \implies \sum_{n=n_0}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)a_{p_n} > \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_k$$

Dimostrazione del corollario. Se $\sum a_n$ converge, converge pure $\sum (p_n - p_{n-1})a_{p_n}$ converge e quindi converge pure $\sum (p_n - p_{n-1})b_{p_n}$ per confronto. Dal risultato precedente converge pure $\sum b_n$

335.8.2

$$\int_k^{k+1} a(x)dx = \int_0^1 a(k+t)dt \leq a_k(1+\alpha/k) \leq (1+\alpha)a_k$$

$$a_{k+1} = a(k+1) = (a(k+t+(1-t))) \leq a(k+t)(1+\alpha/(k+t)) < a(k+t)(1+\alpha) \implies a_{k+1} \leq (1+\alpha) \int_0^1 a(k+t)dt$$

$$\frac{1}{1+\alpha} \int_1^{n+1} a(x)dx \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq a_1 + (1+\alpha) \int_1^n a(x)dx$$

Ne segue che la serie converge se e solo se l'integrale converge. Inoltre possiamo dire che $xa(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$. Infatti se $a(x)$ è quasi monotona e $\int^{+\infty} a(x)dx < +\infty$ allora $\sum a_k < +\infty$ e inoltre $ka_k \rightarrow 0$ per quanto visto in [\[rich.51\]](#). Ora $ka(k+t) \leq ka(k)(1+\alpha/k) = (k+\alpha)a_k$ per cui $ka(k+t) \rightarrow 0$. Se $x = k+t$, $xa(x) = (k+t)a(k+t) \leq 2ka(k+t) \leq 2(k+\alpha)a_k \rightarrow 0$ e quindi $xa(x) \rightarrow 0$.

336.8.2 Sia $0 < h < 1$.

$$\int_{kh}^{(k+1)h} a(x)dx = \int_0^h a(kh+y)dy \leq \int_0^h a(kh)(1+\alpha/(kh))dy = a(kh)(h+\alpha/k)$$

$$\int_{mh}^{(n+1)h} a(x)dx \leq h \sum_{k=m}^n a(kh) + \alpha \sum_{k=m}^n a(kh)/k \quad (1)$$

Inoltre se $0 < y < h < 1$,

$$a(kh + h) = a(kh + y + (h - y)) \leq a(kh + y)(1 + \frac{\alpha}{kh + y}) \leq a(kh + y)(1 + \frac{\alpha}{kh})$$

$$ha(kh + h) = \int_0^h ha(kh + h)dx \leq \int_0^h \left[a(kh + y)(1 + \frac{\alpha}{kh}) \right] dy = \int_{kh}^{(k+1)h} \left[a(y)(1 + \frac{\alpha}{kh}) \right] dy$$

da cui

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} ha(kh) \leq \sum_{k=m}^n \int_{kh}^{(k+1)h} \left[a(y)(1 + \frac{\alpha}{kh}) \right] dy$$

per cui da (1)

$$\begin{aligned} \int_{mh}^{(n+1)h} a(x)dx &\leq h \sum_{k=m}^n a(kh) + \alpha \sum_{k=m}^n \frac{a(kh)}{k} \leq \sum_{k=m+1}^{n+1} \int_{kh}^{(k+1)h} \left[a(y)(1 + \frac{\alpha}{kh}) \right] dy + \alpha \sum_{k=m}^n \frac{a(kh)}{k} = \\ &= \sum_{k=m+1}^{n+1} \int_{kh}^{(k+1)h} a(y)dy + \sum_{k=m+1}^{n+1} \int_{kh}^{(k+1)h} a(y) \frac{\alpha}{kh} dy + \alpha \sum_{k=m}^n \frac{a(kh)}{k} \end{aligned}$$

Sia $\lambda > 1$, $m_h = 1 + \lfloor h^{-1} \rfloor$, $n_h = \lfloor \lambda/h \rfloor$

$$\begin{aligned} h \sum_{k=m_h}^{n_h} a(kh) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_1^\lambda a(x)dx, \quad \sum_{k=m+1}^{n+1} \int_{kh}^{(k+1)h} a(y)dy \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_1^\lambda a(x)dx \\ \int_{mh}^{(n+1)h} a(x)dx &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_1^\lambda a(x)dx \end{aligned}$$

337.8.2 Definiamo una successione $\{p_n\}$ tale che 1) $p_n \nearrow +\infty$, 2) $p_n \leq q_n$, 3) $p_{n+1} - p_n$ decresce. Per questo definiamo $r_n \doteq \min_{m \geq n} q_m - 1/n$ che è strettamente crescente e illimitata ossia $r_n \nearrow +\infty$. I punti (n, r_n) sono indicati con P_n .

L_1 , è la retta passante per $(1, r_1)$ e $(2, r_2)$ e sia n_2 il più piccolo valore di n tale che P_{n_2} sta non sopra la retta L_1 ; $P_{n_2} = (n_2, r_{n_2})$

L_2 è la retta passante per P_2 e P_{n_2} e sia n_3 il più piccolo valore di n tale che P_{n_3} sta non sopra a L_2 . Il poligono P_1, P_{n_2}, P_{n_3} è concavo. Se il valore n_k non dovesse esistere, da $P_{n_{k-1}}$ in poi si prende la retta L_{k-1} .

Il poligono è costituito da segmenti ma “arrotondando i vertici” possiamo definire una funzione derivabile $s(x)$ crescente tale che $s(x) \leq r(x)$, $s'(x)$ è continua e decrescente. Sia $p(x) \doteq s(\ln x)$ e $p_n = p(n)$. Per costruzione $p_n \leq r_n$ e $x p'(x)$ decresce. Sia

$$\begin{aligned} \gamma_n \doteq c_n^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{p_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{p_n}} \quad \sum c_n^{-1} < +\infty, \quad \delta_n \doteq d_n^{-1} = \sqrt{p_n} - \sqrt{p_{n-1}} \quad \sum \delta_n^{-1} = +\infty \\ c_n &= \frac{\sqrt{p_n p_{n-1}}(\sqrt{p_n} + \sqrt{p_{n-1}})}{p_n - p_{n-1}} \text{ (crescente)} \quad \frac{c_n}{d_n} = \sqrt{p_n p_{n-1}} \leq p_n \leq r_n \end{aligned}$$

Per dimostrare che d_n/n decresce facciamo vedere che $n\delta_n$ cresce e $\delta_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{2} \frac{x p'(x)}{\sqrt{p(x)}} \frac{dx}{x} \doteq$

$\int_{n-1}^n f(x) \frac{dx}{x}$. Essendo f decrescente

$$\frac{(n+1)\delta_{n+1}}{n\delta_n} \leq \frac{(n+1) \int_n^{n+1} f(x) \frac{dx}{x}}{n \int_{n-1}^n f(x) \frac{dx}{x}} = \frac{(n+1) \ln \frac{n+1}{n}}{n \ln \frac{n}{n-1}} \leq 1$$

338.8.2 Consideriamo l'integrale $\int_0^{+\infty} \sin(px) \Phi(x; \alpha) dx = \int_0^{+\infty} \sin(px/\alpha) \Phi(x/\alpha; \alpha) dx/\alpha$ dove $\Phi(x; \alpha) = \frac{f(x; \alpha)}{1+x^2}$ e $f(x; \alpha)$, fissato n , x è tale che $-\pi \leq f(x; \alpha) = \alpha x - (2n+1)\pi \leq \pi$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{px}{\alpha}\right) \Phi\left(\frac{x}{\alpha}; \alpha\right) \frac{dx}{\alpha} &= \alpha \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{px}{\alpha}\right) \frac{f\left(\frac{x}{\alpha}; \alpha\right)}{\alpha^2 + x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{(x - (2n+1)\pi) \sin \frac{px}{\alpha}}{\alpha^2 + x^2} dx = \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{x \sin \frac{px}{\alpha}}{\alpha^2 + x^2} dx - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\pi \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin \frac{px}{\alpha}}{\alpha^2 + x^2} dx = \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \frac{px}{\alpha}}{\alpha^2 + x^2} dx - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\pi \int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin \frac{px}{\alpha}}{\alpha^2 + x^2} dx = \pi \sinh p \ln(1 - e^{-\alpha}) = \\ &= \int_0^{+\infty} \sin(px) \Phi(x; \alpha) dx \end{aligned}$$

(esercizio v12) di quelli sul valor principale ed inoltre si ha $-1 < p/\alpha < 1$). Ora usiamo l'esercizio **112.8** sugli integrali. La funzione $x = X(y)$ nell'esercizio è $x = (2n\pi)/\alpha$ e deriviamo rispetto ad α . Inoltre $\lim_{x \rightarrow (2n\pi)^-} f(x; \alpha) = \pi$ e $\lim_{x \rightarrow (2n\pi)^+} f(x; \alpha) = -\pi$. Quindi $(f(X(y_0) - 0, y_0) - f(X(y_0) + 0, y_0))X'(\alpha)$ diventa

$$\left[\pi \frac{\sin \frac{2n\pi p}{\alpha}}{1 + \left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)^2} - (-\pi) \frac{\sin \frac{2n\pi p}{\alpha}}{1 + \left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)^2} \right] \frac{-2n\pi}{\alpha^2}$$

e quindi

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^{+\infty} \sin(px) \Phi(x; \alpha) dx = \pi \sinh p \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(px) dx}{1 + x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi p}{\alpha}}{1 + \left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)^2} \frac{4n\pi^2}{\alpha^2}$$

da cui

$$\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin \frac{2n\pi p}{\alpha}}{\frac{\alpha^2}{4} + (n\pi)^2} = \frac{\pi e^{-p}}{2} - \pi \sinh p \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \underset{\beta = \frac{\alpha}{2}, p = \beta\kappa, \kappa < 2}{=} \frac{\sinh(1 - \kappa)\beta}{2\pi \sinh \beta}$$

$-2 < \kappa = 2p/\alpha < 2$ ma Hardy dice solo $\kappa < 2$ in quanto prende $p, \alpha > 0$.

339.8.2 $x = 2 \arctan t$, $y = 2 \arctan s$, ci dà

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt \int_0^1 ds \frac{\ln(1+s^2) - \ln(1+t^2)}{2(s^2 - t^2)} &= \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^1 ds \frac{\ln(1+s) - \ln(1+t)}{(s-t)\sqrt{st}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^1 ds \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{s^k - t^k}{(s-t)\sqrt{st}} = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^1 ds \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{p=0}^{k-1} s^p t^{k-p-1} \frac{1}{\sqrt{st}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{2}{2p+1} \frac{2}{2k-2p-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sum_{p=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2k-2p-1} \right) = \end{aligned}$$

Referenze

- [B] T.J.I'A Bromwich *An Introduction to the Theory of Infinite Series* Mac Millan and CO., Limited, second edition revised, reprinted 1947
 [Ba1] N.K.Bary *A Treatise on Trigonometric Series, Vol.1* Pergamon Press F

- [Ba2] N.K.Bary *A Treatise on Trigonometric Series, Vol.2* Pergamon Press
- [G] R.B.Gelbaum *Problems in Real and Complex Analysis, 1992* Springer-Verlag
- [BM] G.Boros, V.H.Moll *Sums of arctangent and some formulas of Ramanujan* **SCIENTIA, Series A: Mathematical Sciences**, vol.11 (2005), pp.13–24
- [H] G.H.Hardy *Divergent series*, AMS Chelsea Publishing (second edition 1991)
- [HA] Hata Masayoshi *Problems and solutions in real analysis*, World Scientific, second edition
- [HLP] Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G.: *Inequalities*, Cambridge University Press, second edition 1952
- [H1] Einar Hille: *Analytic Function Theory* Vol.1, Chelsea Publishing Company, 1959
- [K] Konrad Knopp: *Theory and Application of Infinite Series* Hafner Publishing Company New York, 1971
- [K1] Konrad Knopp: *Problem book in the theory of functions. Vol.1, Problems in Elementary Theory of Functions* Dover Publications, Inc.,1948
- [K2] Konrad Knopp: *Problem book in the theory of functions. Vol.2, Problems in Advanced Theory of Functions* Dover Publications, Inc.,1952
- [KN] W.J.Kaczor, M.T.Novak: *Problems in Mathematical Analysis* Vol.1, AMS pub., 2000
- [LC] M. Lavrentiev, E.T.B. Chabat: *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complex* Edizioni Mir, 1972
- [M] A.I Markushevich: *Theory of functions of a complex variable* vol.I, Prentice Hall (1965);
- [MGLP] B.M. Makarov, M.G.Goluzina, A.A. Lodkin, A.N. Podkorytov: *Selected Problems in Real Analysis*, American Mathematical Society, 1991
- [RRA] Teodora-Liliana T.Rădulescu, Vicențiu Rădulescu, Titu Andreescu **Problems in Real Analysis, Advanced Calculus on the Real Axis**, Springer
- [S] K.R.-Stromberg: *An Introduction to Classical Real Analysis* Chapman & Hall (1981)
- [Sy] G.E.Šilov *Analisi Matematica, funzioni di una variabile* edizioni Mir 1978, pag.215
- [T] E.C.Titchmarsh: *The Theory of Functions* Second Edition (1939), Oxford Univ.Press,
- [VLA] L.Volkovysky, G.Lunts, L.Aramanovich: *Problems in the Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir Publishers, 1972
- [WW] E.T. Whittaker & G.N.Watson: *A course of modern analysis* Cambridge University Press, Ristampa del 1992 della quarta edizione del 1927 (prima edizione nel 1902)

340.8.2 Dalla decrescenza $\sum_{k=n_p}^{n_q} a_k \geq C \sum_{k=p}^{q-1} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1}} \geq \frac{C}{n_q} \sum_{k=p}^{q-1} (n_{k+1} - n_k) = C(1 - \frac{n_p}{n_q}) \geq C/2$