§1.0 Disequazioni[1.1.0]

1.1.0 $x-2>\sqrt{1-4x-5x^2}$, $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-3x}}{x^4-19x^2+90}>0$, $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}>1$

2.1.0 $\frac{x^3}{x^2+5x+1}>\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$, $x^{1/3}-(x+1)^{1/3}<x^2+5x+7$, $\sqrt{x}>\sqrt{1-x^2}$

3.1.0 $\frac{2-\sin x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}>0$, $\sqrt{x^2+5x+4}<2x+2$, $\cos x\le\sqrt{x}+1$

4.1.0 Risolvere i sistemi di disequazioni (il terzo per $\alpha\in\mathbf{R}$)

$$\begin{cases}\sqrt{2x+4}>2+x\\ 2-\sqrt{x}-x>0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt{5x+4}>2+x\\ \dfrac{1}{2}(x^2+1)-\dfrac{1}{3}(x+1)-1<0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt{|\alpha|x+4}>2+x\\ 2-\sqrt{x}-x>0\end{cases}$$

5.1.0 Risolvere la disequazione al variare di $\alpha\neq 0$ $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\alpha}\ge 1$

6.1.0 $x\ge 2|x|-2$, $x^2-2|x|-3>0$, $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$

7.1.0 $\frac{4|x|}{x^2-2|x|-3}<-1$, $2|x^2-x|>|x|$, $|x|\sqrt{1-2x^2}>2x^2-1$

8.1.0 $(x+1)^2<|x^2-1|$, $|2x^2-16x+31|<1$ $x\sqrt{1-2x^2}>2x^2-1$

9.1.0 Senza fare calcoli si stabilisca quale delle seguenti disequazioni non è equivalente alla disequazione $|2x-3|>5$

i) $|6-4x|>10$, ii) $\sqrt{4x^2-12x+9}>5$, iii) $|10x-15|>25$
iv) $x<-1\vee x>4$, v) $(2x-3)^2>5(2x-3)$

10.1.0 Sia $q\in\mathbf{R}^+$ ed $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Risolvere la disequazione al variare di a : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{q-x}}{a}\ge 1$

11.1.0 Risolvere le seguenti disequazioni: $\ln(x+2)+\ln(x+1)<\ln(5x+2)$, $\ln(x^2-6x+9)<\ln x-\ln 4$, $3^{1+x}+(\frac{1}{3})^{-x}<36$,
$(3^{1+x})^{x-1}-3^{2x^2-1}\cdot 3^{2-x^2}+216>0$, $7\cdot 49^x-50\cdot 7^x+7>0$, $\log_2(x+1)-\log_4(2|x|+2)>0$

12.1.0 Si discuta al variare di $a\in\mathbf{R}$ la disequazione $|1-|x^2-1||\le ax^2$

13.1.0 Si trovi l'insieme della forma $(-a,0)\cup(0,a)$ $(a>0)$ tale che $x\in(-a,0)\cup(a,0)\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{x^2}>r$ al variare di $r>0$.

14.1.0 Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt{|x-1|-\alpha|x|}<|x|-\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Per un determinato intervallo di valori di α non si è potuto evitare di usare i `Teoremi 6.6` e `6.8` del libro di testo citato nella introduzione e conseguentemente le *derivate*; tale argomento sarà oggetto di studio successivo ma molti studenti lo conoscono alquanto bene dalle scuole superiori così come i Teoremi citati [2.1.0].

[1.1.0] Per la soluzione degli esercizi è necessario conoscere bene i seguenti argomenti: disequazioni di primo grado, disequazioni di secondo grado (argomento questo che nei libri di testo delle scuole superiori a volte va sotto il nome di "segno del trinomio di secondo grado"), i radicali, il modulo di un numero o di una espressione numerica, scomposizione di un polinomio in fattori primi reali

[2.1.0] Il primo di tali Teoremi dice che se una funzione derivabile ha in un punto interno un massimo oppure un minimo allora la derivata è nulla (Teorema di Fermat). Il secondo dice che se una funzione derivabile assume lo stesso valore in due punti diversi allora esiste all'interno dei valori in questione un terzo punto in cui la derivata è nulla (Teorema di Rolle).

SOLUZIONI

§1.0

1.1.0 $\emptyset$, $\sqrt{10} < x < 4$, $0 \leq x \leq 2$,

2.1.0 $\frac{-5-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{-11-\sqrt{65}}{14} \vee \frac{-11+\sqrt{65}}{14} < x < \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$, $x \in \mathbf{R}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x \leq 1$,

3.1.0 $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$, $x > 0$, $x \in \mathbf{R}^+$,

4.1.0 $\emptyset$, $0 < x < 1$, $\emptyset$ se $|\alpha| = 0$, $\emptyset$ se $|\alpha| \leq 4$, $0 < x < 1$ se $|\alpha| \geq 5$, $0 < x \leq |\alpha| - 4$ se $4 < |\alpha| < 5$. Sinteticamente si può scrivere: $0 < x < \min\{1, |\alpha| - 4\}$.

5.1.0 $\emptyset$ se $\alpha < 0$, $0 < x \leq 1$ se $0 < \alpha < 1$, $\frac{1-\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{2} \leq x \leq \frac{1+\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$ se $1 \leq \alpha \leq \sqrt{2}$, $x = 1/2$ se $\alpha = \sqrt{2}$, $\emptyset$ se $\alpha > \sqrt{2}$

6.1.0 $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$, $x < -3 \vee x > 3$, $1 \leq x \leq \frac{4+\sqrt{13}}{2}$

7.1.0 $-3 < x < -1 \vee 1 < x < 3$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$,

8.1.0 $x < 0 \wedge x \neq -1$, $3 < x < 5 \wedge x \neq 4$ $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

9.1.0 la v)

10.1.0 Per $a < -\sqrt{q}$ non esistono soluzioni; per $-\sqrt{q} \leq a < 0$ la soluzione è l'intervallo $[0, \frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2}]$ (per $a = -\sqrt{q}$ l'intervallo si riduce a 0). Se $a > \sqrt{q}$ non esistono soluzioni. Se $0 < a \leq \sqrt{q}$ le soluzioni sono $[\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2}, q]$.

11.1.0 $0 < x < 2$, $\dfrac{9}{4} < x < 4, \wedge x \neq 3$ $x < 2$, $-2 < x < 2$, $x < -1 \vee x > 1$, $x > 1$

12.1.0 $-\sqrt{\frac{2}{1-a}} \leq x \leq -\sqrt{\frac{2}{1+a}} \vee \sqrt{\frac{2}{1+a}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{1-a}} \vee x = 0$ se $0 \leq a < 1$, $x \in \mathbf{R}$ se $a \geq 1$

13.1.0 $\dfrac{\sqrt{4r-3}-1}{2(r-1)}$ se $r > 1$, 1 se $r = 1$, $\dfrac{1-\sqrt{4r-3}}{2(1-r)}$ se $\dfrac{3}{4} \leq r < 1$, $+\infty$ se $r < \dfrac{3}{4}$

14.1.0 R.: $\mathbf{R}$ se $\alpha \leq -\frac{5}{3}$, $(-\infty, 0) \cup (x_+(\alpha), +\infty)$ se $-\frac{5}{3} < \alpha \leq -1$ dove $x_+(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - 1 + \sqrt{-3\alpha^2 - 2\alpha + 5})$, $(-\infty, x'_\infty(\alpha)) \cup (x_+(\alpha), +\infty)$ se $-1 < \alpha \leq 0$ dove $x'_-(\alpha) = \frac{1}{2}(-\alpha - 1 - \sqrt{-3\alpha^2 + 2\alpha + 5})$ e $x_+(\alpha)$ come in precedenza, $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ se $\alpha = 0$, $(-\infty, x'_-(\alpha)) \cup (\alpha, +\infty)$ se $0 < \alpha < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $(-\infty, x'_-(\alpha)) \cup (x_+(\alpha), +\infty)$ se $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq \alpha < 1$, $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ se $\alpha = +1$, $(x'_-(\alpha), -\alpha)$ se $1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\emptyset$ se $\alpha \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

§1.0

1.1.0 - primo del gruppo - Realtà della radice: $5x^2 + 4x - 1 \leq 0$ e quindi $-1 \leq x \leq 1/5$. Del resto affinché la disequazione sia risolvibile è necessario che $x - 2 > 0$ in quanto deve essere maggiore di una quantità positiva od al più nulla ossia $\sqrt{1 - 4x - 5x^2}$. Dunque $x > 2$ e questo immediatamente implica che la disequazione non ha soluzioni in quanto non può essere $x > 2 \ \wedge \ -1 \leq x \leq 1/5$ Un altro modo di dire la stessa cosa consiste nel dire che $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1/5\} = \emptyset$. *Supponiamo ora di non accorgerci che deve essere $x - 2 > 0$. In tal modo passeremmo al quadrato avendo $x^2 - 4x + 4 > 1 - 4x - 5x^2$ ossia $6x^2 > -3$ che è sempre vera per ogni x. Saremmo indotti a dire quindi che la soluzione della disequazione è $-1 \leq x \leq \frac{1}{5}$. Che ciò è impossibile lo si vede sostituendo $x = 0$ nella disequazione . Si otterrebbe* $-2 > 1 \ldots.$

1.1.0 - secondo del gruppo - La realtà delle radici dà $x \geq 3$ mentre $\sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 3x} \geq 0$ dà (elevando al quadrato) $0 \leq x \leq 4$. La disequazione $x^4 - 19x^2 + 90 > 0$ si scrive come $(x^2 - 10)(x^2 - 9) = (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})(x - 3)(x + 3) > 0$ e quindi $x < -\sqrt{10} \ \vee -3 < x < 3 \ \vee x > \sqrt{10}$. Mettendo assieme i due risultati si ottiene $\sqrt{10} < x < 4$.

1.1.0 - terzo del gruppo - La realtà delle due radici implica che $0 \leq x \leq 2$. Elevando al quadrato si ottiene $2\sqrt{2x - x^2} > -1$ che certamente è vera qualunque sia la x.
Una procedura leggermente diversa, più lunga ma forse più istruttiva, prevede di scrivere la disequazione come $\sqrt{x} > 1 - \sqrt{2 - x}$. A questo punto bisogna distinguere due casi. Il primo caso è quello in cui $1 - \sqrt{2 - x} < 0$ ossia $0 \leq x < 1$. Per tali valori di x disequazione $\sqrt{x} > 1 - \sqrt{2 - x}$ è certamente verificata essendo il membro di destra negativo.
Il secondo caso è quello in cui $1 - \sqrt{2 - x} \geq 0$ ossia $1 \leq x \leq 2$. Per procedere oltre bisogna elevare al quadrato ottenendo $2\sqrt{2 - x} > 3 - 2x$ che è certamente verificata per $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$. Per $1 \leq x < \frac{3}{2}$ bisogna ulteriormente elevare al quadrato essendo il membro di destra dell'ultima disequazione positivo ottenendo $4x^2 - 8x + 1 < 0$ la quale è risolta per $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < x < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ora $[1, \frac{3}{2}) \subset (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ per cui $x \in [1, \frac{3}{2})$ soddisfa la disequazione. Facendo ora la unione tutti gli intervalli finora trovati si ottiene esattamente $0 \leq x \leq 2$.

2.1.0 - primo del gruppo - La disequazione può riscriversi come $\frac{x^3}{x^2+5x+1} > \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$ e quindi $\frac{x^3}{x^2+5x+1} > (x+2)$ ossia $\frac{7x^2+11x+2}{x^2+5x+1} < 0$. Il numeratore è positivo per $x < \frac{-11-\sqrt{65}}{14} \ \vee \ x > \frac{-11+\sqrt{65}}{14}$ ed il denominatore per $x < \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \ \vee \ x > \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$. Mettendo assieme le soluzioni si ottiene $\frac{-5-\sqrt{21}}{2} < x \leq \frac{-11-\sqrt{65}}{14} \ \vee \ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} < x \leq \frac{-11+\sqrt{65}}{14}$.

2.1.0 - secondo del gruppo - $x^2 + 5x + 7 > 0$ per ogni x essendo il discriminante negativo ed il primo coefficiente positivo. Di converso $x^{1/3} - (x+1)^{1/3} < 0$ in quanto $x^{1/3} < (x+1)^{1/3}$ ossia $x < x + 1$ (in questo caso non vi è bisogno di alcuna cautela nell'elevare al cubo in quanto tale operazione conserva il segno).

2.1.0 - terzo del gruppo - Esistenza delle radici: $0 \leq x \leq 1$. Il quadrato dei due termini dà $x^2 + x - 1 > 0$ ossia $x < -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \ \vee \ x > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

3.1.0 - primo del gruppo - $\frac{-2+\sin x+\sin^2 x}{\sin x \cos x} < 0$; essendo $|\sin x| \leq 1$ il numeratore è sempre negativo od al più nullo ed è nullo solo per $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Il denominatore si può riscrivere come $\frac{1}{2}\sin(2x)$ ed è positivo per $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ che è pure la soluzione.

3.1.0 - secondo del gruppo - $x^2 + 5x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4 \vee x \geq -1$. Inoltre deve aversi $2x + 2 > 0$ in quanto tale espressione deve essere più grande di una espressione positiva o nulla; dunque $2x+2 > 0 \Rightarrow x > -1$. Ora si può elevare tutto al quadrato e semplificando si ottiene $3x^2+3x > 0$ che dà come risultato $x < -1 \vee x > 0$. Mettendo assieme il tutto si ha il risultato $x > 0$. È molto importante notare il secondo passaggio ossia $2x + 2 > 0$ e quindi $x > -1$. Se non lo si fosse considerato ma si fosse passati direttamente all'elevamento al quadrato si sarebbe ottenuta la soluzione $x \leq -4 \vee x > 0$ che è chiaramente sbagliata (si sostituisca $x = -4$ e si perviene all'assurdo $0 < -6$; tale calcolo non implica che è giusto il risultato $x > 0$ trovato ma solo che

$x \le -4 \vee x > 0$ è certamente sbagliato).

3.1.0 - terzo del gruppo - È verificata per ogni x in quanto $\cos x \le 1$ per ogni x.

4.1.0 - primo del gruppo - Le radici quadrate impongono le relazioni $x > -\frac{4}{3} \wedge x \ge 0$ per cui rimane $x \ge 0$. Risolviamo ora la prima disequazione. $2+x > 0$ e quindi $x^2+2x > 0$ che è risolta da $-2 < x < 0$ e quindi è impossibile poiché le soluzioni devono essere positive od al più nulle.

4.1.0 - secondo del gruppo - Non negatività del radicando: $x > \frac{-4}{5}$. Per poterla risolvere deve essere $2+x > 0$ ossia $x > -2$ e quindi l'insieme delle x su cui cercare le soluzioni è dato da $x > -4/5$. Si eleva al quadrato ottenendo $x^2 - x < 0$. La soluzione di quest'ultima è data da $0 < x < 1$.
La seconda disequazione si può scrivere come $3x^2 - 2x - 5 < 0$ la cui soluzione è $-\frac{8}{3} < x < \frac{10}{3}$. Riunendo le due soluzioni si ha $0 < x < 1$.

4.1.0 - terzo del gruppo - Realtà delle radici $x \ge -4/|\alpha| \ \wedge \ x \ge 0$ e quindi risulta $x \ge 0$. Dalla seconda equazione si ha $2 - x > \sqrt{x}$ e quindi deve per forza essere $2 - x > 0$ ossia $x < 2$. Elevando al quadrato si ottiene $x^2 - 5x + 4 > 0$ ossia $x < 1$ e $x > 4$. Ne risulta che la soluzione della seconda equazione è $0 \le x < 1$ ed in questo intervallo bisogna cercare le soluzioni della prima. Se $\alpha = 0$ dalla prima equazione ottengo $x < 0$ e quindi non si hanno soluzioni. Se $\alpha \neq 0$ eleviamo al quadrato ottenendo $x^2 + x(4 - |\alpha|) < 0$. Se $|\alpha| \le 4$ la soluzione è $|\alpha| - 4 < x < 0$ e dovendo essere $x \ge 0$ non esiste soluzione come prima. Dunque per $|\alpha| \le 4$ non esiste mai soluzione. Se $|\alpha| > 4$ la soluzione è $0 < x < |\alpha| - 4$. Se $|\alpha| - 4 \ge 1$ ossia $|\alpha| \ge 5$ allora $[0,1) \cap (0, 4 - |\alpha|) = (0,1)$ che è la soluzione del problema mentre se $4 < |\alpha| < 5$ la soluzione è $(0, |\alpha| - 4)$. Riunendo la soluzione è: non esiste se $|\alpha| \le 4$, $0 < x < 1$ se $|\alpha| \ge 5$, $0 < x \le |\alpha| - 4$ se $4 < |\alpha| < 5$.

5.1.0 Essendo il numeratore sempre positivo, per α negativo la disequazione non è mai verificata. Per α positivo possiamo elevare tutto al quadrato ottenendo $2\sqrt{x - x^2} + 1 - \alpha^2 \ge 0$. Se $1 - \alpha^2 \ge 0$ ossia $\alpha \le 1$ allora la disequazione è sempre verificata. Se $\alpha > 1$ si eleva ancora al quadrato ottenendo $4x - 4x^2 - 1 + 2\alpha^2 - \alpha^4 > 0$ ossia $4x^2 - 4x + (\alpha^2 - 1)^2 < 0$. Il discriminante di tale disequazione è $4 - 4(\alpha^2 - 1)^2 = -4\alpha^4 + 8\alpha^2 = 4\alpha^2(2 - \alpha^2)$ e per $\alpha > \sqrt{2}$ è negativo comportando il fatto che la disequazione non è mai verificata. Se $\alpha = \sqrt{2}$ l'unica soluzione è $x = \frac{1}{2}$. Se $1 < \alpha < \sqrt{2}$ allora $x_- = \frac{1 - \alpha\sqrt{2 - \alpha^2}}{2} < x < \frac{1 + \alpha\sqrt{2 - \alpha^2}}{2} = x_+$. A questo punto bisogna chiedersi se $[x_-, x_+] \subset [0,1]$. Cominciamo da $x_+ \le 1$. Quest'ultima disequazione (in cui α è la variabile) è data da $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\sqrt{2 - \alpha^2} \le 1 \Rightarrow (2 - \alpha^2)\alpha^2 \le 1 \Rightarrow (\alpha^2 - 1)^2 \ge 0$ e ciò è vero per ogni valore di α ed in particolare per $1 < \alpha < \sqrt{2}$. La disequazione $0 \le x_-$ dà esattamente lo stesso risultato.

6.1.0 - primo del gruppo - Per $x \ge 0$ si ha $x \le 2$. Per $x < 0$ si ha $x \ge -2/3$ per cui il risultato è $-\frac{2}{3} \le x \le 2$.

6.1.0 - secondo del gruppo - Il modo più rapido consiste nello scrivere $|x|^2 = x^2$ e quindi la disequazione diventa $|x|^2 - 2|x| - 3 > 0$. La soluzione è $-1 \le |x| \le 3$ ossia $0 \le |x| \le 3$ e quindi $-3 \le x \le 3$. Un modo leggermente più lungo consiste nel risolvere una disequazione per $x \ge 0$ ed una per $x < 0$.

6.1.0 - terzo del gruppo - La realtà delle radici impone $x \ge 1$. Certamente $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1}$ deve essere positivo o nullo per cui $5x - 1 \ge x - 1$ e quindi $x \ge 0$ (condizione questa già implicata dalla realtà delle radici, in altra parole $x \ge 1 \Rightarrow x \ge 0$). A questo punto possiamo elevare al quadrato ottenendo (dopo un pò di algebra) $4x - 1 \ge 2\sqrt{5x^2 - 6x + 1}$. Ciò impone $x \ge 1/4$ ed anche questa condizione è implicata da $x \ge 1$. Elevando ancora al quadrato si ottiene

$4x^2 - 16x + 3 \le 0$ e quindi $\frac{4-\sqrt{13}}{2} \le x \le \frac{4+\sqrt{13}}{2}$. Da ciò segue il risultato $1 \le x \le \frac{4+\sqrt{13}}{2}$.

7.1.0 - primo del gruppo - Anche in questo caso conviene scrivere $|x|^2 = x^2$ e con un pò di algebra si ottiene $\frac{|x|^2+2|x|-3}{|x|^2-2|x|-3} < 0$. Il numeratore positivo o nullo dà $-3 \le |x| \le 1$ e quindi $0 \le |x| \le 1$ mentre il denominatore positivo e basta dà $-1 < |x| < 3$ e quindi $0 \le |x| < 3$. Mettendo assieme i due risultati la disequazione è verificata per $1 < |x| < 3$ e quindi $-3 < x < -1 \ \vee \ 1 < x < 3$.

7.1.0 - secondo del gruppo - Si può considerevolmente semplificare l'espressione osservando che $|x^2 - x| = |x|\ |x-1|$ e quindi se $x \neq 0$ $2|x^2 - x| > |x| \iff 2|x-1| > 1$ (3.1.0) Ora si separano i due casi $x > 1$ e $x < 1$. Nel primo caso la disequazione diventa $2x - 2 > 1$ e quindi $x > \frac{3}{2}$ mentre nel secondo caso diventa $-2x + 2 > 1$ e quindi $x < \frac{1}{2} \wedge x \neq 0$. Riunendo il tutto si ottiene come soluzione $x < 0 \vee 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2}$.

7.1.0 - terzo del gruppo - Realtà delle radici: $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. È evidente che essendo $|x| \ge 0$ tutte le x tranne $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono soluzioni e pertanto la disequazione è verificata per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.1.0 - primo del gruppo - Per $x \le -1 \ \vee \ x \ge 1$ si ha $x^2 + 2x + 1 < x^2 - 1$ ossia $x < -1$. Per $-1 < x \ \wedge \ x < 1$ si ha $x^2 + 2x + 1 < 1 - x^2$ ossia $2x^2 + 2x < 0$ e quindi $-1 < x < 0$. La soluzione è dunque $x < 0 \ \wedge \ x \neq -1$.

8.1.0 - secondo del gruppo - Per $x \le 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ x \ge 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ la disequazione diventa $2x^2 - 16x + 30 < 0$ e quindi $3 < x \ \wedge \ x < 5$. Unendo le due condizioni si ottiene $3 < x < 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 5$. Viceversa per $3 < x < 5$ la disequazione diventa $2x^2 - 16x + 32 = 2(x-4)^2 > 0$ certamente purché $x \neq 4$. Alla fine la soluzione è $3 < x < 5 \ \wedge \ x \neq 4$.

8.1.0 -terzo del gruppo - Realtà delle radici: $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. È evidente che l'insieme dei reali tali che $0 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ è costituito da soluzioni del problema. Per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$ entrambe i membri della disequazione sono negativi e pertanto si può riscrivere come $1 - 2x^2 > -x\sqrt{1-2x^2}$ dove stavolta i membri sono positivi. Elevando al quadrato si ha $1 - 4x^2 + 4x^4 > x^2 - 2x^4 \Rightarrow 6x^4 - 5x^2 + 1 > 0$ ossia $x^2 < \frac{1}{3} \ \vee \ x^2 > \frac{1}{2}$ e quindi, tenendo conto che si è interessati solamente alle x negative, $x < -1/\sqrt{2} \ \vee \ -1/\sqrt{3} < x < 0$. Poiché il punto di partenza era di considerare le x tali che $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$ si conclude che la soluzione è $-1/\sqrt{3} < x < 0$. Riunendo i due risultati si ottiene $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{2}$.

9.1.0 Con semplici manipolazioni algebriche oppure risolvendola, la disequazione si dimostra essere equivalente alle i)-iv). La v) invece è equivalente alla disequazione solo se $2x - 3 > 0$ perché se invece $2x - 3 < 0$ si può semplificare cambiando verso alla disequazione .

10.1.0 Realtà delle radici $0 \le x \le q$. Sia $a < 0$. La disequazione diventa $\sqrt{x} - \sqrt{q-x} \le a$. Se $\sqrt{x} \ge \sqrt{q-x}$ non vi sono soluzioni e ciò accade per $x \ge \frac{q}{2}$. Sia dunque $a < 0$ e $0 \le x < \frac{q}{2}$. La disequazione diventa $-a \le \sqrt{q-x} - \sqrt{x} \Rightarrow$ (potendo ora elevare al quadrato)$a^2 - q \le -2\sqrt{x(q-x)}$ Ora se $a^2 - q > 0$ ossia $a < -\sqrt{q} \ \vee \ a > \sqrt{q}$ la disequazione non ha soluzioni ed essendo in considerazione solo i valori negativi di a si può dire che per $a < -\sqrt{q}$ non si hanno

(3.1.0) È molto importante notare come la semplificazione della disequazione sia avvenuta senza cambiarne il verso in quanto la quantità eliminata è positiva (un errore frequente consiste, infatti, nel dimenticare che quando si esamina una disequazione, se si divide o si moltiplica per una quantità negativa, la disequazione cambia verso). Inoltre bisogna notare come sia stato eliminato il valore x=0 in quanto non si può dividere per lo stesso.

soluzioni. Sia dunque $-\sqrt{q} \le a < 0$. Elevando al quadrato la disequazione diventa $4x(q-x) \le (q-a^2)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4qx + (q-a^2)^2 \ge 0$ che è verificata per $x < x_- = \frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2} \vee x > x_+ = \frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2}$. Ora $x_+ > \frac{q}{2}$ mentre $0 < x_-$ ($x_- = 0$ per $a = \sqrt{q}$) per cui la soluzione è data da $x \in [0, x_-] \subset [0, \frac{q}{2}]$. Riassumendo per $a < -\sqrt{q}$ non esistono soluzioni; per $-\sqrt{q} \le a < 0$ la soluzione è l'intervallo $[0, \frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2}]$ (per $a = \sqrt{q}$ l'intervallo si riduce a 0).
Sia ora $a > 0$. La disequazione diventa $\sqrt{x} - \sqrt{q-x} \ge a$.

Se $\sqrt{x} - \sqrt{q-x} \le 0$ ossia $x \le \frac{q}{2}$ allora la disequazione non è verificata essendo il primo membro negativo o al più nullo. Sia dunque $x > \frac{q}{2}$. Elevando al quadrato si ottiene $q - a^2 \ge 2\sqrt{x(q-x)}$ e per $a > \sqrt{q}$ non può avere soluzioni. Dunque consideriamo solo valori di a tali che $0 < a \le \sqrt{q}$. Rielevando tutto al quadrato si ottiene $4x^2 - 4xq + (q-a^2)^2 \ge 0$ ossia $x < x_- = \frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2} \quad \vee \quad x > x_+ = \frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2}$ ed essendo $x_+ < q$ il risultato è $x \in [x_+, q]$.
Ora riassumiamo tutti i risultati parziali ottenuti: $a < -\sqrt{q}$ non esistono soluzioni; per $-\sqrt{q} \le a < 0$ la soluzione è l'intervallo $[0, \frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2}]$ e per $a = \sqrt{q}$ l'intervallo si riduce a 0. $a > \sqrt{q}$ non esistono soluzioni. Se $0 < a \le \sqrt{q}$ la soluzione è $[\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2-(a^2-q)^2}}{2}, q]$.

11.1.0 - Primo del gruppo - Trattandosi di logaritmi bisogna imporre che l'argomento sia positivo e quindi abbiamo tre intervalli dell'asse reale, $x > -2$, $x > -1$, $x > -\frac{2}{5}$, di cui dobbiamo prendere l'intersezione ossia $x > -\frac{2}{5}$. La disequazione si può riscrivere come $\ln(x+2)(x+1) < \ln(5x+2)$ ossia $\ln \frac{(x+2)(x+1)}{5x+2} < 0$ e quindi $\frac{(x+2)(x+1)}{5x+2} < 1$. Quest'ultima diventa $x^2 - 2x < 0$ la cui soluzione è $0 \le x \le 2$ e poiché $[0,2] \subset (-\frac{2}{5}, +\infty)$ tutti i valori della x sono accettabili.

11.1.0 - Secondo del gruppo - $x^2 - 6x + 9 > 0 \ \wedge \ x > 0$ sono le condizioni sulla x e quindi si ha $(x-3)^2 > 0 \ \wedge \ x > 0$. Dunque l'insieme di definizione delle x è dato da $x > 0 \ \wedge \ x \ne 3$. La disequazione è equivalente a $(x-3)^2 < \frac{x}{4}$ ossia $4x^2 - 25x + 36 < 0$ ossia $\frac{9}{4} < x < 4$ e tenendo conto del dominio di definizione il risultato è $\frac{9}{4} < x < 4 \ \wedge \ x \ne 3$

11.1.0 - Terzo del gruppo - Chiaramente la disequazione è riscrivibile come $4z < 36$ dove $z = 3^x$ e quindi $z < 9$ da cui $3^x < 9$ ossia $x < \ln_3 9 = 2$

11.1.0 - Quarto del gruppo - La disequazione si riscrive come $3^{x^2-1} - 3^{x^2+1} + 216 > 0$. Ponendo $3^{x^2} = t$ si ha $\frac{t}{3} - 3t + 216 > 0$ ossia $t < 81$ e quindi $x^2 < 4$ ossia $-2 < x < 2$.

11.1.0 - Quinto del gruppo - Ponendo $7^x = z$ la disequazione è $7z^2 - 50z + 7 > 0$ da cui $z < \frac{1}{7} \ \vee \ z > 7$. nella variabile x il risultato si legge come $x < -1 \vee \ x > 1$

11.1.0 - Sesto del gruppo - Il dominio è $x > -1$ e la disequazione equivale a $(x+1)^2 > 2|x| + 2$. Se $x > 0$ essa diventa $x^2 > 1$ ossia $x > 1$. Se $-1 < x < 0$ allora si ottiene $x^2 + 4x - 1 > 0$ che non è mai verificata per $x \in (-1, 0)$.

12.1.0 Se $a < 0$ non esistono soluzioni chiaramente. Sia quindi $a > 0$. Bisogna studiare quattro casi.
Primo caso : $x^2 - 1 \ge 0 \ \wedge \ 1 - (x^2-1) \ge 0$ che danno luogo a $-\sqrt{2} \le x \le 1 \ \vee \ 1 \le x \le \sqrt{2}$. La disequazione diventa $2 \le x^2(a+1)$ che è risolta da $x \le -\sqrt{\frac{2}{a+1}} \vee x \ge \sqrt{\frac{2}{a+1}}$. Ora se $a \le 1$ segue che $\sqrt{\frac{2}{a+1}} \ge 1$ e quindi per $a \le 1$ la soluzione finora è $-\sqrt{2} \le x \le -\sqrt{\frac{2}{a+1}} \ \vee \ \sqrt{\frac{2}{a+1}} \le x \le \sqrt{2}$.
Se invece $a > 1$ allora abbiamo $\sqrt{\frac{2}{a+1}} < 1$ e quindi la soluzione è $-\sqrt{2} \le x < -1 \ \vee \ 1 < x \le \sqrt{2}$
Il secondo caso da studiare è $x^2 - 1 \ge 0 \ \wedge \ 1 - (x^2-1) < 0$ per cui abbiamo $x < -\sqrt{2} \ \vee \ x > \sqrt{2}$

come insieme in cui andare a cercare le soluzioni. La disequazione diventa $2 \geq x^2(1-a)$. Se $a \geq 1$ è sempre vera per cui la soluzione è $(-\infty, -\sqrt{2}) \ \cup \ (\sqrt{2}, +\infty)$ mentre se $a < 1$ allora la soluzione è $-\sqrt{\frac{2}{1-a}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{1-a}}$ e tenendo conto della limitazione su x e del fatto che $a < 1$ si ottiene $-\sqrt{\frac{2}{1-a}} \leq x < -\sqrt{2} \ \vee \ \sqrt{2} < x \leq \sqrt{\frac{2}{1-a}}$. Riassumendo quanto fino ad ora ottenuto possiamo dire che le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} 0 < a < 1 & -\sqrt{\dfrac{2}{1-a}} \leq x \leq -\sqrt{\dfrac{2}{1+a}} \ \vee \ \sqrt{\dfrac{2}{1+a}} \leq x \leq \sqrt{\dfrac{2}{1-a}} \\ a \geq 1 & x < -1 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

Il terzo caso è quello in cui $x^2 - 1 < 0 \ \vee \ 1 - (1 - x^2) \geq 0$ ossia $x^2 \geq 0$. La disequazione diventa $x^2 \leq ax^2$ che è sempre vera per $a \geq 1$ mentre per $a < 1$ è vera solamente per $x = 0$. Dunque se $a \geq 1$ la soluzione è $-1 < x < 1$ mentre se $a < 1$ la soluzione è $x = 0$.
Il quarto caso è quello in cui $x^2 - 1 < 0 \ \vee \ 1 - (1 - x^2) < 0$ ossia $x^2 < 0$ che non è mai vera. Riassumendo si ha $\begin{cases} 0 \leq a < 1 & -\sqrt{\dfrac{2}{1-a}} \leq x \leq -\sqrt{\dfrac{2}{1+a}} \ \vee \ \sqrt{\dfrac{2}{1+a}} \leq x \leq \sqrt{\dfrac{2}{1-a}} \ \vee \ x = 0 \\ a \geq 1 & x \in \mathbf{R} \end{cases}$

13.1.0 La disequazione $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2} > r$ è equivalente a $x^2(1-r) + x + 1 > 0$. Se $r < \frac{3}{4}$ si ha $\Delta = 4r - 3 < 0$ e $1 - r > 0$ per cui la disequazione è vera per qualsiasi valore di r e quindi $a = +\infty$. Se $r = \dfrac{3}{4}$ la disequazione è $(x+2)^2 > 0$ per cui $a = 2$. Se $\dfrac{3}{4} < r < 1$ allora $x < x_-$ oppure $x > x_+$ dove $x_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{4r-3}}{2(1-r)}$ ed essendo $x_- > 0$ per $r > 1$ sia ha $a = x_-$. Se $r = 1$ allora la disequazione è $x + 1 > 0$ e quindi $a = 1$. Da ultimo, se $r > 1$ la disequzione è verificata per $\dfrac{\sqrt{4r-3} - 1}{2(r-1)} < x < \dfrac{\sqrt{4r-3} + 1}{2(r-1)}$ e quindi $a = \dfrac{\sqrt{4r-3} - 1}{2(r-1)}$.

14.1.0 Una parte della disequazione è risolta facendo uso di due teoremi (elementari) sulle derivate delle funzioni ed il cui enunciato si trova anche nei libri delle scuole medie superiori che trattano lo studio (elementare) di funzioni. Nel libro di testo i teoremi usati sono il `Teorema 6.6` ed il `Teorema 6.8`
La disequazione è riscritta come $\sqrt{P(x;\alpha)} < Q(x;\alpha)$. Le soluzioni dipendono ovviamente da α e sono date dalla intersezione degli insiemi che verificano contemporaneamente le tre condizioni: 1) $P \geq 0$, 2) $Q > 0$, 3) $P - Q^2 < 0$. Sia $D(\alpha) = \{x \in \mathbf{R} \ t.c. \ P(x;\alpha) \geq 0\}$. La prima (altri non è che la positività del radicando) è $P(x;\alpha) = |x-1| - \alpha|x| \geq 0$. Se $\alpha \leq 0$ P è una somma di quantità positive o nulle e quindi $D(\alpha) = \mathbf{R}$ se $\alpha \leq 0$. Se $\alpha > 0$ $P(x;\alpha) \geq 0$ diventa $|1 - \frac{1}{x}| \geq \alpha$ ossia i due seguenti sottocasi

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} \geq \alpha & \text{se} \quad 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ -1 + \dfrac{1}{x} \geq \alpha & \text{se} \quad 1 - \dfrac{1}{x} < 0 \end{cases}$$

Dal primo sottocaso abbiamo $\begin{cases} A) & x(1-\alpha) \geq 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ B) & x(1-\alpha) \leq 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

Da A) segue che se $0 < \alpha < 1$ ossia $1 - \alpha > 0$ allora la soluzione è $x \geq \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow [\frac{1}{1-\alpha}, +\infty)$. Se invece $1 - \alpha < 0$ ossia $\alpha > 1$ allora si ha $x \leq \frac{1}{1-\alpha}$ ma dovendo essere $x > 0$ non si ha nessuna x. Se $\alpha = 1$ nessuna x.
Da B segue che se $1 - \alpha \geq 0$ ogni $x < 0$ va bene. Se $1 - \alpha < 0$ si ha $x \geq \frac{1}{1-\alpha}$ e dovendo essere $x < 0$ si ha $[\frac{1}{1-\alpha}, 0)$. Se $\alpha = 1$ ogni $x < 0$ va bene.
Da secondo sottocaso di prima abbiamo: $\frac{1}{x} \geq 1 + \alpha$ ed essendo $\alpha > 0$ si ha che solo $0 < x \leq \frac{1}{1+\alpha}$

va bene.
Le varie conclusioni portano al seguente risultato: $D(\alpha)=\mathbf{R}$ se $\alpha\le 0$, $D(\alpha)=(-\infty,\frac{1}{1+\alpha}]\cup[\frac{1}{1-\alpha},+\infty)$ se $0<\alpha<1$, $D(1)=(-\infty,\frac12]$, $D(\alpha)=[\frac{1}{1-\alpha},\frac{1}{1+\alpha}]$ se $\alpha>1$.
Ora risolviamo la disequazione $Q>0$ e l'insieme delle x così ottenuto, intersecato con $D(\alpha)$, verrà chiamato $\tilde D(\alpha)$.
Se $\alpha\le 0$ allora $Q(x;\alpha)>0$ per ogni x e quindi $\tilde D(\alpha)=\mathbf{R}$.
Se $\alpha=0$ escludiamo $x=0$ e quindi $\tilde D(0)=\mathbf{R}\backslash\{0\}$.
Se $0<\alpha<1$ escludiamo le x tali che $-\alpha\le x\le\alpha$; inoltre $\frac{1}{1+\alpha}<\frac{1}{1-\alpha}$ e $-\alpha<\frac{1}{1+\alpha}$ $\forall\, 0<\alpha<1$ mentre $\frac{1}{1-\alpha}\le\alpha$ solo se $\frac{1-\sqrt5}{2}\le\alpha\le\frac{1+\sqrt5}{2}$. Essendo $\frac{1-\sqrt5}{2}<0$ e $\frac{1+\sqrt5}{2}>1$ ne segue che se $0<\alpha<1$ allora $\tilde D(\alpha)=(-\infty,-\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$. Se $\alpha=1$ $\tilde D(1)=(-\infty,-1)$.
Sia ora $\alpha>1$; $\frac{1}{1+\alpha}<\alpha$ mentre $\frac{1}{1-\alpha}\ge-\alpha$ per $\alpha\le\frac{1-\sqrt5}{2}$ oppure $\alpha\ge\frac{1+\sqrt5}{2}$. Quindi per $\alpha>\frac{1+\sqrt5}{2}$ la situazione è $-\alpha\le\frac{1}{1-\alpha}\le\frac{1}{1+\alpha}\le\alpha$ e $\tilde D(\alpha)=\emptyset$. Se invece $1<\alpha<\frac{1+\sqrt5}{2}$ allora la situazione è data da $\frac{1}{1-\alpha}\le-\alpha\le\frac{1}{1+\alpha}\le\alpha$ e quindi $\tilde D(\alpha)=[\frac{1}{1-\alpha},-\alpha)$. Riassumendo

$$\tilde D(\alpha)=\begin{cases}\mathbf{R} & \text{se } \alpha<0\\ \mathbf{R}\backslash\{0\} & \text{se } \alpha=0\\ (-\infty,-\alpha)\cup(\alpha,+\infty) & \text{se } 0<\alpha<1\\ (-\infty,-1) & \text{se } \alpha=1\\ [\dfrac{1}{1-\alpha},-\alpha) & \text{se } 1<\alpha<\dfrac{1+\sqrt5}{2}\\ \emptyset & \text{se } \alpha\ge\dfrac{1+\sqrt5}{2}\end{cases}$$

Eseguiamo ora l'ultimo passaggio che consiste in $P-Q^2<0$ ed indichiamo con $S(\alpha)$ l'insieme delle soluzioni per quel dato α.

$\alpha=0$ $\quad|x-1|<x^2$; se $x\ge1$ la disequazione diventa x^2-x+1 che è sempre vera. Se $x<1$ la disequazione diventa $x^2+x-1>0$ e quindi $x<-\frac{1+\sqrt5}{2}\ \vee\ x>\frac{-1+\sqrt5}{2}$ ed essendo $\frac{-1+\sqrt5}{2}<1$ ne segue che che la soluzione è $(-\infty,-\frac{1+\sqrt5}{2})\cup(\frac{-1+\sqrt5}{2},+\infty)$.

$\alpha<0\ \wedge\ x\ge1$. L'equazione è $x^2-x(1+\alpha)+1+\alpha^2>0$. Poiché $\Delta=3\alpha^2-2\alpha+3>0$ per ogni valore di α ne segue che $x^2-x(1+\alpha)+1+\alpha^2>0$ per ogni valore di x. Dunque se $\alpha<0$ ogni valore $x\ge1$ va bene.

$\alpha<0\ \wedge\ 0\le x<1$. L'equazione è $x^2+x(1-\alpha)+\alpha^2-1>0$. $\Delta=-3\alpha^2-2\alpha+5\ge0$ per $-\frac53\le\alpha\le1$. Quindi se $\alpha<-\frac53$ $0\le x<1$ è soluzione. Se $\alpha=-\frac53$ il polinomio diventa $(x+\frac43)^2>0$ che per $0\le x<1$ è sempre vera. Se $-\frac53<\alpha<0$ la soluzione è data da $x<x_-(\alpha)\ \vee\ x>x_+(\alpha)$. Considerando però solamente $0\le x<1$ dobbiamo vedere la posizione relativa delle radici rispetto a 0 ed 1. Certamente $x_-(\alpha)<0$; la equazione $x_+(\alpha)<1$ diventa $4\alpha^2-4\alpha+4>0$ che è vera per ogni α essendo il suo discriminante negativo. La equazione $x_+(\alpha)\ge0$ è soddisfatta per $-1\le\alpha\le1$ e quindi se $-1\le\alpha<0$ la soluzione è $x_+(\alpha)<x<1$ mentre se $-\frac53<\alpha<-1]$ la soluzione è data da $[0,1)$. Notare che $x_+(-1)=0$.

$\alpha<0\wedge x<0$. L'equazione da risolvere diventa $x^2+x(\alpha+1)+\alpha^2-1>0$. Se $3\alpha^2-2\alpha-5>0$ ossia $\alpha<-1\ \vee\ \alpha>\frac53$ allora ogni $x<0$ va bene. Se $\alpha=-1$ è la stessa cosa.
Se $-1<\alpha<0$ ho $x<x'_-(\alpha)\ \vee\ x>x'_+(\alpha)$. Ora $x'_-(\alpha)<0$ per ogni valore di α mentre $x'_+(\alpha)>0$ se $\alpha^2-1<0$ ossia $-1<\alpha<1$ e quindi $x'_+(\alpha)>0$ per $-1<\alpha<0$. Quindi se $-1<\alpha<0$ la soluzione è data da $x<x'_-(\alpha)=\frac12(-\alpha-1-\sqrt{-3\alpha^2+2\alpha+5})$.
Riunendo gli ultimi tre paragrafi possiamo dare la soluzione della disequazione per $\alpha\le0$.

$S(\alpha)=\mathbf{R}$ se $\alpha<-1$, $S(\alpha)=(-\infty,x'_-(\alpha))\cup(x_+(\alpha),+\infty)$ se $-1\le\alpha\le 0$ e $x_+(\alpha)=\frac12(\alpha-1+\sqrt{-3\alpha^2-2\alpha+5})$ mentre $x'_-(\alpha)=\frac12(-\alpha-1+\sqrt{-3\alpha^2+2\alpha+5})$. È da notare che $x'_-(-1)=x_+(-1)=0$

Ora esaminiamo il caso $0<\alpha<1$. $\tilde D(\alpha)=(-\infty,-\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$. Anche qui ci sono tre sottocasi.

$0<\alpha<1.\ \wedge\ x\ge 1$. Rifacendo i conti del caso $\alpha\le 0$ si ottiene, esattamente come prima, che tutte le $x\ge 1$ costituiscono soluzioni.

$0<\alpha<1\ \wedge\ 0\le x<1$ e l'equazione $P<Q^2$ diventa $x^2+x(1-\alpha)+\alpha^2-1>0$ ossia $x<x_-(\alpha)\ \vee\ x>x_+(\alpha)$ le quali sono ambedue reali in quanto il discriminante è dato da $-3\alpha^2-2\alpha+5$ che è positivo per $-\frac53<\alpha<1$. Vediamo se $x_+(\alpha)>\alpha$ ossia $\sqrt{5-2\alpha-3\alpha^2}>\alpha+1$ ossia $\alpha^2+\alpha-1>0$ che è vera se $\alpha<\alpha_-\ \vee\ \alpha>\alpha_+$ con i soliti valori dati ad $\alpha_-=-\frac{1+\sqrt5}{2}$ e $\alpha_+=\frac{-1+\sqrt5}{2}$. Ne segue che se $\alpha>\alpha_+$ allora $x_+(\alpha)>\alpha$ e quindi la soluzione è $x_+(\alpha)<x<1$. Se $\alpha=\alpha_+$, essendo $x_+(\alpha_+)=\alpha_+$ la soluzione è data da $x_+(\alpha_+)=\alpha_+<x<1$. Se $0<\alpha<\alpha_+$ allora $x_+(\alpha)<\alpha$ e quindi la soluzione è data da $\alpha\le x<1$.

$0<\alpha<1.\ \wedge\ x<0$ La equazione da risolvere è $x^2+x(1+\alpha)+\alpha^2-1>0$ e quindi $x<x'_-(\alpha)\ \vee\ x>x'_+(\alpha)$. La equazione $x'_-(\alpha)<-\alpha$ implica $\sqrt{-3\alpha^2+2\alpha+5}>\alpha-1$ che è sempre vera in quanto $0<\alpha<1$ e quindi $1-\alpha<0$. $x'_+(\alpha)<-\alpha$ ossia $\alpha^2-\alpha-1>0$ ossia $\alpha<\alpha'_-=\frac{1-\sqrt5}{2}\ \vee\ \alpha>\alpha'_+=\frac{1+\sqrt5}{2}$ e quindi per $0<\alpha<1$ si ha $x'_+(\alpha)>-\alpha$. La soluzione quindi per $0<\alpha<1$ è $(-\infty,x'_-(\alpha))$.

Riassumendo se $\frac{-1+\sqrt5}{2}\le\alpha<1$ la soluzione è data da $(-\infty,x'_-(\alpha))\cup(x_+(\alpha),+\infty)$. Se $0<\alpha<a_+$ la soluzione è data da $(-\infty,x'_-(\alpha))\cup(\alpha,+\infty)$, $(x_+(\alpha_+)=\alpha_+)$. Se $\alpha=1$ la soluzione è $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Da ultimo è rimasto il caso $1<\alpha<\frac{1+\sqrt5}{2}$ e $\tilde D(\alpha)=[\frac{1}{1-\alpha},-\alpha)\subset(-\infty,0)$.
L'equazione $P^2<Q$ è $x^2+x(1+\alpha)+\alpha^2-1>0$ Il discriminante è $5+2\alpha-3\alpha^2$ ed è positivo per $-1<\alpha<\frac53$. ed essendo $\frac{1+\sqrt5}{2}<\frac53$ entrambe le radici, che chiamiamo $x'_\pm(\alpha)$, sono reali. La equazione $x'_+(\alpha)>-\alpha$ è sempre verificata in quanto $\sqrt{-3\alpha^2+2\alpha+5}>-\alpha+1$ per ogni $1<\alpha<\frac{1+\sqrt5}{2}$. Vediamo ora se $x'_-(\alpha)>\frac{1}{1-\alpha}$ ossia $\frac{\alpha^3-3}{1-\alpha}>\sqrt{-3\alpha^2+2\alpha+5}$. Essendo $\frac{\alpha^3-3}{1-\alpha}>0$ per i valori di α interessati eleviamo al quadrato, raccogliamo i termini simili ed otteniamo $\frac{\alpha^4-2\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+1}{(1-\alpha)^2}>0$. Chiamiamo $N(\alpha)$ il numeratore ed osserviamo che $N(1)=1$, $N(\frac{1+\sqrt5}{2})=0$, $N'(1)=-2$, $N'(\frac{1+\sqrt5}{2})=0$, $N(\alpha)>0$ per $\alpha\in(\frac{1+\sqrt5}{2}-\delta,\frac{1+\sqrt5}{2})$ per ogni $0<\delta\le\delta_o$ e δ_o abbastanza piccolo (dimostrata dopo). La derivata seconda $N''(\alpha)=2(6\alpha^2-6\alpha-1)>0$ per $\alpha<\frac{3-\sqrt{15}}{6}$ oppure $\alpha>\frac{3+\sqrt{15}}{6}$ ed essendo $1<\alpha<\frac{3+\sqrt{15}}{6}<\frac{1+\sqrt5}{2}$ segue che la funzione $N(\alpha)$ ha un flesso nel punto $\frac{3+\sqrt{15}}{6}$ in cui la concavità da negativa diventa positiva. Queste considerazioni automaticamente implicano che $N(\alpha)>0$ per $\alpha\ne\frac{1+\sqrt5}{2}$. Infatti se diventasse negativa in un punto, poiché deve essere positiva in $(\frac{1+\sqrt5}{2}-\delta,\frac{1+\sqrt5}{2})$, si avrebbe che la funzione $N(\alpha)$ ha un minimo ed un massimo. Per il `Teorema 6.6` nei punti di minimo e di massimo la derivata sarebbe nulla. Quindi nell'intervallo $(1,\frac{1+\sqrt5}{2}]$ si avrebbero tre punti in cui la derivata prima si annulla (assume lo stesso valore) e per il `Teorema 6.8` la derivata seconda si annullerebbe in due distinti punti entrando in contraddizione con lo studio del segno della derivata seconda. Contraddizione da cui si esce dicendo che $N(\alpha)>0$ per $1<\alpha<\frac{1+\sqrt5}{2}$. A titolo di curiosità è disegnato il grafico della funzione (un concetto questo non ancora affrontato ma che molti studenti conoscono; tra l'altro il grafico è riportato per valori di α che vanno da 0 a 2.2 e si può verificare che per $\alpha=0,1,2$ l'ordinata vale sempre 1. Per il `Teorema 6.8` devono esservi due

punti in cui la derivata prima si annulla e quindi due punti in cui la funzione ha un massimo oppure un minimo. In questo caso è un massimo ed un minimo).

Mostriamo ora che $N(\alpha) > 0$ per $\alpha \in (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ con $0 < \delta \leq \delta_o$. $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta)$ è un polinomio di quarto grado nella variabile δ il cui termine noto ed il cui termine di ordine uno sono entrambi nulli a causa della relazione $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = 0$ e $N'(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = 0$. Dunque $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta) = c_2\delta^2 + c_3\delta^3 + c_4\delta^4 + c_5\delta^5$. Ora se $0 < \delta < 1$ si ha $|N(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta) - c_2\delta^2| \leq |c_3|\delta^3 + |c_4|\delta^4 + |c_5|\delta^5 < \delta^3(|c_3| + |c_4| + |c_5|) \doteq \delta^3 C$. Imponiamo che $\delta^3 C < \frac{1}{2}c_2\delta^2$ ossia $\delta < \frac{1}{2}\frac{c_2}{C} \doteq \delta_o$ e quindi $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta) - c_2\delta^2 > -\frac{1}{2}c_2\delta^2$ ossia $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta) > \frac{1}{2}c_2\delta^2$. La relazione $\delta^3 C < \frac{1}{2}c_2\delta^2$ può essere soddisfatta solamente se $c_2 > 0$ per cui l'ultima e più importante cosa da verificare è che $c_2 > 0$. c_2 è il termine che moltiplica δ^2 in $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta)$ e quindi è dato da $6(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - 6\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 5 > 0$.

Si può verificare viceversa che la somma $4(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^3 - 6(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - 2(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + 2$, corrispondente al coefficiente di ordine uno in δ di $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta)$, vale zero e ciò riflette il fatto che la derivata prima di N calcolata in $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vale zero. Peraltro il coefficiente di ordine zero in δ, dato da $N(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, vale anch'esso zero.

$\alpha^4 - 2\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha + 1$

A B D E

α

O C

$$\boxed{\begin{array}{l} A \equiv (0,1), \quad B \equiv (1,1), \quad C \equiv (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0) \\ D \equiv (2,1), \quad E \equiv \big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{6}, N(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{6})\big) \end{array}}$$