§8.1 Integrali curvilinei, doppi, tripli e superficiali, equazioni differenziali

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

1.8.1 Si calcoli la porzione di semisuperficie sferica $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$, che si proietta sul piano (x,y) nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$, $b\leq a$

2.8.1 Si consideri un filo avente massa disposto lungo il grafico della funzione $y=ax^2$ con $-b\leq x\leq b$. Supponendo la densità costante $(\delta(x,y)=\delta_o)$ calcolare le coordinate (b_x,b_y) del baricentro. Eseguire lo stesso calcolo supponendo che la densità sia data dalla funzione $\delta(x,y)=c|x|$.

3.8.1 Si consideri un filo diposto lungo il perimetro del triangolo rettangolo isoscele i cui vertici sono $A\equiv(0,0)$, $B\equiv(L,0)$, $C\equiv(L,L)$. La densità del filo è data dalla seguente funzione

$$\delta(x,y)=\begin{cases} ax & 0\leq x\leq L,\quad y=0\\ by & x=L,\quad 0\leq y\leq L\\ \frac{c}{2}[(x-\frac{L}{2})^2+(y-\frac{L}{2})^2]^{\frac12} & y=x\end{cases}$$

a, b e c hanno le dimensioni di una massa diviso una lunghezza al quadrato. Si immagini che il filo è sul piano (x,y) ma in $\mathbf{R}^3$.
Si calcolino le coordinate del baricentro del filo. Si calcolino inoltre: 1) i momenti di inerzia rispetto agli assi cartesiani, 2) i momenti di inerzia rispetto ad assi passanti per i lati del triangolo, 3) i momenti di inerzia rispetto ad assi baricentrali e paralleli agli assi coordinati, 4) i momenti di inerzia rispetto ad assi baricentrali e paralleli ai lati

4.8.1 Data la forma differenziale in $\mathbf{R}^2$ $\omega(x,y)=4x^3ydx+(2y+x^4)dy$ calcolare $\int_\varphi\omega$ dove φ è la curva $\varphi\colon[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbf{R}^2$ $\varphi(t)=\begin{cases} t\\ \arctan(\sin t)\end{cases}$

5.8.1 Calcolare la massa della semisuperficie sferica $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$ avente come densità rispettivamente le funzioni $\delta_1(x,y,z)=\delta_o z$, $\delta_2(x,y,z)=\delta_o\sqrt{x^2+y^2}$, $\delta_3(x,y,z)=\delta_o|x|$, δ_o ha dimensioni di una massa diviso un volume

6.8.1 Sia C la circonferenza di raggio R e centro nell'origine del piano (x,y) e sia data inoltre la seguente forma differenziale $\omega(x,y,z)=\frac{1}{2}xy^2dx+dy+zdz$. Si calcoli $\int_{C^+}\omega$ (C^+ vuol dire percorsa in senso antiorario) sia direttamente sia attraverso il Teorema di Stokes. È esatta ω?

7.8.1 Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z)=\frac{xy^2}{2R^2}\underline{i}+\underline{j}+z\underline{k}$ verso l'esterno della superficie $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$ e verso l'esterno della superficie $x^2+y^2+z^2=R^2$; (R è una costante)

8.8.1 Si calcoli l'area della superficie laterale dell'ellissoide di rotazione $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$

9.8.1 Attraverso l'uso delle coordinate polari si risolva l'esercizio **4.1** pag.99 del libro: R.Ferretti, T.Isola, G.Tarantello "Analisi Matematica 2 – Esercizi" edito da ARACNE. Calcolare $\int\int_D\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy$ dove D è la regione delimitata dal semipiano $y\geq 0$ e dalle parabole $y^2=4(1-x)$, $y^2=4(1+x)$.

10.8.1 Si consideri un disco elettricamente carico con una densità di carica σ uniforme. Il disco ha raggio R. Si determini il potenziale lungo un punto dell'asse del disco ed in un punto del bordo del disco.

11.8.1 Un filo avente massa è disposto lungo il grafico della funzione $y = L\ln(\frac{x}{L})$ con $0 < x \le L$. La densità del filo è $\delta(x, y) = ax^2$. Si vuole sapere la massa del filo (integrare la funzione densità lungo il grafico dato) ed il baricentro

12.8.1 Si determini l'area della figura piana ottenuta proiettando sul piano (x, y) l'intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ con il piano di equazione $x + y + z = 0$. Inoltre si trovi quel valore ε_o tale che per $|\varepsilon| \le \varepsilon_o$ il piano di equazione $x + y + z = \varepsilon$ interseca la sfera data e si trovi l'area della figura intercetta

13.8.1 È data la forma differenziale $\omega(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$. Se ne trovi il dominio e si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\int_\gamma \omega$ dove γ, orientata in senso antiorario, è nell'ordine
$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, $\quad\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1\}$,
$\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + (y - 1)^2 = 4\}$,
1) Detto A l'insieme di definizione della forma ω è possibile trovare una funzione $f \in C^1(A)$ (continua con derivate parziali continue) per cui $\omega = df$? Se si dare un esempio
2) È possibile trovare un sottoinsieme B di A, aperto ed illimitato, ed una funzione $f \in C^1(B)$ tale che $\omega = df$? Se si dare un esempio di insieme B e funzione f

14.8.1 Si calcoli l'integrale doppio $\int\int_D dxdy \sin(x - y)$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x + y \ge 0,\ x \le \frac{\pi}{2},\ y \le \frac{\pi}{2}\}$

15.8.1 Si calcoli l'area della superficie definita dalle condizioni $az = xy$, $a > 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le b^2$.

16.8.1 Si calcoli il volume definito da $0 \le az \le xy$, $a > 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le b^2$.

17.8.1 Si determini l'area della porzione di semisuperficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2 = 3$ che si proietta sul piano (x, y) nella curva di equazione $x^2 + \frac{5}{3}y^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}xy = 2$

18.8.1 Calcolare l'area dell'insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ z = -x^2 + 1\ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

19.8.1 Calcolare l'area dell'insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2 + y^2 - ry \le 0\ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

20.8.1 Calcolare l'area della superficie del solido definito da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 - ry \le 0\ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$

21.8.1 Calcolare il volume definito dalle equazioni $x^2 + y^2 \le r^2$ e $x^2 + z^2 \le r^2$

Calcolare l'area dell'insieme definito da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \le r^2\ \wedge\ x^2 + z^2 = r^2\} \cup \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = r^2\ \wedge\ x^2 + z^2 \le r^2\}$

22.8.1 Senza usare il teorema della divergenza risolvere l'esercizio numero **15** pag.195 del libro S.Salsa–A.Squellati "Esercizi di Analisi Matematica 2"– Integrazione, Zanichelli. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x\underline{i} + x^2y\underline{j} + y^2z\underline{k}$ uscente dalla supeficie definita da $2\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1 + x^2 + y^2$

23.8.1 Risolvere l'esercizio numero **11** pag.166 del libro S.Salsa–A.Squellati "Esercizi di Analisi Matematica 2"– Integrazione, Zanichelli attraverso il Teorema di Gauss. C alcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = y\underline{i} + x\underline{j}$ uscente dalla supeficie definita da $1 \le z \le \sqrt{2 - z^2}$

24.8.1 Calcolare $\int\int_E \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$ dove $E=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\colon\ y\le -1,\ x\ge 0,\ x^2+y^2\le 2\}$

25.8.1 Calcolare l'area della figura definita da $E=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\colon\ y\ge -x,\ \ x^2+y^2-2x\le 0,\ x^2+y^2\ge 1\}$

26.8.1 Calcolare in almeno due modi il flusso del campo vettoriale $\underline{V}(x,y,z)=(x+y)\underline{i}+(y+z)\underline{j}-2z\underline{k}$ verso l'esterno della superficie,detta Σ, definita da $x^2+y^2=1$, $|z|\le 1$

27.8.1 Si risolva l'esercizio numero **11** pag.184 del libro S.Salsa–A.Squellati "Esercizi di Analisi Matematica 2"– Integrazione, Zanichelli. Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\omega=(y+z)dx+(z+x)dy+(x-y)dz$ dove γ è la circonferenza intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ ed il piano $z=y$. [1.8.1]

28.8.1 Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z)=xy^2\underline{i}+yx^2\underline{j}-(z+c)(x^2+y^2)\underline{k}$ attraverso la superficie data da $\frac{z}{c}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, $z\ge 0$ e la cui orientazione è quella della normale diretta verso l'esterno (a, b e c sono costanti positive)

29.8.1 Si calcoli $\int_\varphi \omega$ dove $\omega=yzdx+\alpha zdy+\alpha ydz$ e φ è la curva, il cui sostegno è dato da $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon z=0,\ x^2+y^2=r^2,\ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}\cup\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x=0,\ z^2+y^2=r^2,\ z\ge 0,\ \ y\ge 0\}\cup\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon y=0,\ x^2+z^2=r^2,\ z\ge 0,\ \ x\ge 0\}$ (α è una costante) e ciascuna delle componenti della curva è orientata in senso antiorario.

30.8.1 Si dica quanto vale $y_1(e)$ dove $y_1(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=-\dfrac{y}{x}-y^2\dfrac{\ln x}{x} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

31.8.1 Trovare l'integrale generale della equazione differenziale $y''=\frac{y'}{x}+x$

32.8.1 Un filo pesante ha la forma $x=a(t-\sin t)$ $y=a(1-\cos t)$ $\qquad 0\le t\le 2\pi \qquad a>0$, $b>0$
La densità di massa del filo è $\delta(x,y)=b|y|$. Si calcoli la massa del filo
Suggerimento: si ricordi che $\sqrt{x^2}=|x|$ e che $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$

33.8.1 Si calcoli il volume del dominio da definito da: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y+z^2\le 1$

34.8.1 Sia Σ la superficie definita da $z=1-x^2-4y^2$, $z\ge 0$. Si calcoli il flusso attraverso Σ (orientata verso l'interno del paraboloide) del campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})=xz\underline{i}-yz\underline{j}-\underline{k}$

35.8.1 Risolvere il problema di Cauchy $y'(x)=e^x y^2$, $y(0)=1$

36.8.1 Si calcoli l'integrale $\int\int_E \arctan\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy$ dove $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ x^2+y^2\ge 1,\quad x^2+y^2\le 3,\quad y\ge\frac{1}{\sqrt{3}}x,\quad y\le\sqrt{3}x\}$

37.8.1 Si calcoli l'area della superficie definita da $x^2+y^2+z^2=3a^2$, $2az\ge x^2+y^2$, $a>0$

38.8.1 Si calcoli $\int_\gamma\omega_1$ e $\int_\gamma\omega_2$ dove $\gamma=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=3a^2,\ 2az=x^2+y^2\}$ (orientata in senso antiorario) $a>0$, $\omega_1=2x^2ydx+ydy+zdz$, $\omega_2=2xy^2dx+2x^2ydy+xdz$

[1.8.1] Gli autori risolvono l'esercizio con un calcolo diretto. Qui usiamo il Teorema di Stokes ed un terzo modo esplicitato nella risoluzione

39.8.1 Si trovino le soluzioni $y(x)$ della equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e non omogenea $y'' - 2y' + 2y = 5e^{-x}$ che soddisfano le condizioni $y(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$

40.8.1 Si immagini di lanciare in verticale verso l'alto, con velocità v_o, un sasso di massa m sottoposto alla forza di gravità e ad una forza di attrito proporzionale alla velocità v. Si calcoli a quale altezza giunge il sasso. Si calcoli inoltre la velocità a cui giunge il sasso nella caduta supponendo di aspettare un tempo infinito.

Successivamente si esegua la stessa operazione immaginando che l'attrito sia proporzionale al quadrato della velocità v per una costante. Calcolare la velocità con cui il sasso tocca il suolo.

41.8.1 Si calcoli l'integrale $\int\int_E \ln(x^2 + y^2) dx\, dy$ dove $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$

42.8.1 Si calcoli l'area della superficie definita da $z = x^2 + y^2, \quad z \leq 2$

43.8.1 Si calcoli $\int_\gamma (ydx + xdy + xydz)$ dove γ è il bordo del triangolo di vertici i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ orientato in uno dei due modi possibili

44.8.1 Si trovino le soluzioni $y(x)$ della equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e non omogenea $y'' + 2y' + 2y = 10e^{2x}$ che soddisfano la condizione $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$

45.8.1 Si trovi l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali 1) $y'' - y = \frac{1}{1+e^x}$ 2) $y'' - y = \frac{1}{1+e^x} + \cos x$

46.8.1 Si dimostri che la funzione $y(x) = c_1 e^x + c_2 \sinh x + c_3 \cosh x$ risolve l'equazione differenziale $y''' - y' = 0$. Si determini quindi quella soluzione particolare che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

47.8.1 Si dica quanto vale per $t = 3$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x' = -x^2 \\ x(1) = -1 \end{cases}$

48.8.1 Si considerino i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Nel primo caso si dica quanto vale la soluzione per $x = 2$, $x = 0$. Nel secondo si dica quanto vale la soluzione per $x = 1$

49.8.1 Sapendo che la funzione $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ è una soluzione della equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti variabili $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, si trovi un'altra soluzione della stessa equazione linearmente indipendente dalla prima.

50.8.1 Si dia la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y(2 - y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

51.8.1 Se esistono si dica per quali valori di ω sono limitate per ogni $t \in \mathbf{R}$ le soluzioni del problema di Cauchy (*oscillatore armonico forzato*) $\begin{cases} x'' + 4x = \cos(\omega t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$ (limitate vuol dire che esiste una costante positiva M tale che $|x(t)| \leq M$ per ogni t reale).

52.8.1 Se esistono si dica per quali coppie (x_o, y_o) la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x'' - 2x' + x = e^{-t} \\ x(0) = x_o, \quad x'(0) = y_o, \end{cases}$ è limitata per tutti i tempi positivi

53.8.1 Si valuti $\int_\gamma \omega$ dove $\omega = 2xz^3dx + xyzdy + 3x^2z^2dz$ e γ è la curva ottenuta come unione delle tre seguenti curve $\gamma_1 \colon [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^3 \begin{cases} \cos t \\ \sin t \\ t \end{cases}$ $\gamma_2 \colon [4\pi, 6\pi] \to \mathbf{R}^3 \begin{cases} t/(4\pi) \\ 0 \\ 3t^2 - t/(2\pi) \end{cases}$ $\gamma_3 \colon [6\pi, 6\pi + 1] \to \mathbf{R}^3 \begin{cases} -t/2 + 3/2 + 3\pi \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ γ_1 è un'elica avente come asse l'asse z. γ_2 è una parabola sul piano (x, z). γ_3 è un segmento che giace sull'asse delle x.

54.8.1 Si calcoli $\int_\varphi \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e φ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + y^2$, $z = x + y + 1$

55.8.1 Usando il Lemma di Gauss–Green si calcoli l'area del rombo di lato 1 (si esplicitino le parametrizzazioni dei lati del rombo).

56.8.1 Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} \dfrac{yy'}{1+y^2} = y^2 + (t + \dfrac{1}{t} + 1) \\ y(\sqrt{\ln 2}) = 0 \end{cases}$
si dica quanto vale $y((\ln(\frac{3}{2}\sqrt{\ln 2}))^{1/2})$.
Suggerimento: È opportuno eseguire una trasformazione sulla funzione $y(x)$ al fine di ridurre l'equazione ad una forma risolvibile. La trasformazione è dettata dal termine proporzionale a $y'(x)$.

57.8.1 Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} \dfrac{y'}{1+y} = y + \dfrac{1}{t} \\ y(\ln 2) = 1 \end{cases}$

58.8.1 Si trovi l'area della porzione di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ soggetta alla condizione $r^2 - z^2 \leq rx$

59.8.1 Si valuti l'integrale $\oint_\varphi \omega$ dove $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \frac{ydz-zdy}{y^2+z^2} + \frac{zdx-xdz}{z^2+x^2} +$ e la curva γ è data dall'intersezione fra la sfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$ e il piano $x+y+z = 0$ percorsa in senso antiorario.

60.8.1 Es: Calcolare i sequenti integrale tripli $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$, $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{1-xyz}$

61.8.1 Calcolare il volume della regione dello spazio definita da $(x^2+y^2+z^2+8)^2 \leq 36(x^2+y^2)$ (Putnam 2006, A1)

62.8.1 Calcolare il volume della regione dello spazio definita $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x+y$, $0 \leq z \leq 1$. [proposto da studente anonimo]

63.8.1 Sia R la regione $\{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 1, 3^x - x - 1 \leq y \leq x\}$. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di S attorno alla retta $y = x$.
[da http://www.math.purdue.edu/pow/fall2013/pdf/problem3.pdf]

64.8.1 Calcolare $\int\int\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+x^2}$ dove $A = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge z_0 \ge 0\}$

65.8.1 Sia data la forma differenziale
$\omega = \frac{-xy^2-x^3-2x^2-x+yx^2+y^3}{(x^2+y^2)(x^2+(y+1)^2)}dx + \frac{y^3+yx^2+2xy+y+x^3+xy^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)(x^2+(y+1)^2)}dy$. Si calcoli $\oint_{\gamma^+} \omega$ dove $\gamma_1 = \{x^2+y^2 = 1/4\}$, $\gamma_2 = \{x^2+(y+1)^2 = 1/4\}$, $\gamma_3 = \{x^2+y^2 = 9\}$.

66.8.1 Sia data la forma differenziale
$\omega = \frac{2x(4x^2+4y^2-3z)}{(-z+x^2+y^2)(2x^2+2y^2-z)}dx + \frac{2y(4x^2+4y^2-3z)}{(-z+x^2+y^2)(2x^2+2y^2-z)}dy + \frac{3x^2+3y^2-2z}{(z-x^2-y^2)(2x^2+2y^2-z)}dz$ definita nell'insieme $x^2+y^2 < z < 2(x^2+y^2)$. Dire se è esatta.

67.8.1 Sia data la parabola $2ax = y^2$, $z = 0$ ed il punto $P \equiv (0,0,a)$. Sia inoltre C il cono di vertice P e direttrice la parabola e sia S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-az = 0$. 1) Calcolare l'area della porzione di cono interno alla sfera. 2) Calcolare l'area di quella parte di sfera, detta S' che è interna al cono C.

68.8.1 Dopo avere osservato che le formule $x = r\frac{u^2-r^2}{u^2+r^2}$ e $y = \frac{2ur^2}{u^2+r^2}$ soddisfano la relazione $x^2+y^2 = r^2$, si calcoli la lunghezza della circonferenza di raggio r.

69.8.1 (1). Si consideri la sfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$ elettricamente carica in modo omogeneo (densità superficiale costante δ). Si calcoli il potenziale in un punto esterno della sfera ed un punto interno. Successivamente si calcoli il potenziale generato dalla sfera piena $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ e densità di volume costante δ.

(2). Si consideri il guscio sferico definito da $r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$ e carico con densità volumetrica costante δ. Si calcoli il potenziale in un punto $\underline{x}$ tale che $\|\underline{x}\| \ge R$, $r < \|\underline{x}\| < R$ e $\|\underline{x}\| \le r$.

70.8.1 Si immagini di praticare un buco di larghezza trascurabile dal polo nord al polo sud della Terra e di lasciar cadere un punto materiale. Descrivere il moto del punto materiale.

71.8.1 Sia data curva $y = \sqrt{2ax}$, $z = 0$ ed il punto $P \equiv (0,0,a)$, $a > 0$. Sia inoltre C il cono di vertice P e direttrice la curva e e il semiasse positivo delle ascisse. Sia inoltre S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-az = 0$. 1) Calcolare l'area della porzione di cono interno alla sfera. 2) Calcolare l'area di quella parte di sfera, detta S' che è interna al cono C.

72.8.1 Sia data la "lemniscata di Bernoulli" $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. Sia M un punto di essa e sia C la circonferenza avente per diametro OM e giacente sul piano passante per il diametro e l'asse z. Calcolare la superficie, detta S, della figura che si ottiene come luogo delle circonferenze al variare di M sulla lemniscata. Detto V il volume racchiuso da S, si calcoli il baricentro della parte di V la cui proiezione sul piano (x,y) è situata nel primo quadrante.

73.8.1 Siano dati curva $y^2 = 2ax$, $z = 0$ ed il punto $P \equiv (0,0,a)$, $a > 0$. Sia C il cono di vertice P e direttrice la curva. Sia inoltre S_1 il piano di equazione $x+y+z = b$ e S_2 il piano di equazione $x-y+z = b$. (1) Al variare di $b \ge 0$, calcolare l'area della porzione di cono interno alla regione, detta R, individuata dai due piani S_1 e S_2, dal piano $z = 0$ e $x = 0$. (2) Calcolare il volume della porzione di cono descritta nella domanda precedente. (3) Si scriva poi il risultato per $(a,b) = (2,5/4)$, e $(a,b) = (1,4)$. (4) Della regione individuata dai due piani S_1 e S_2, dal piano $z = 0$ e $x = 0$, si calcoli l'area della porzione interna ad R.

74.8.1 Sappiamo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. Si dimostri se esiste o meno l'integrale
$$\int\int_{[0,+\infty)^2} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy$$

75.7 Si trovi il volume e l'area della superficie della porzione di spazio interna al cilindro $x^2+y^2=1$, ed alla sfera $(x-1)^2+y^2+z^2=4$ [da http://people.missouristate.edu/lesreid/Adv128.html]

76.7 Sia $\underline{\gamma}$ la curva data da $\{x^2+y^2+z^2=4\}\cap\{x+y+z=0\}$ e sia $\underline{\sigma}$ la curva data da $\{x^2+y^2+z^2=4\}\cap\{x+y+z=1\}$ e percorse nello stesso verso. Sia inoltre data la forma differenziale $\omega=xydz$. Calcolare $\oint_{\underline{\gamma}}\omega-\oint_{\underline{\sigma}}\omega$.

77.7 Calcolare l'area del cubo di lato 1 usando coordinate polari sferiche.

78.7 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt\,d\varphi}{\cos(a\cos t\cos\varphi)}$ con $|a|\le\pi/2$. [A.M.M. Vol.112, No. 6 (Jun.–Jul., 2005), p. 567, problema 11159 (George Lamb, Tucson (AZ), USA)]

SOLUZIONI

1.8.1 $2\pi a^2-4a^2\arctan\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ ed usando le formule trigonometriche del capitolo **1.2** che legano le funzioni arcotangente, arcoseno ed arcocoseno si può riscrivere come
$\pi a^2+2a^2\arcsin\frac{2b^2-a^2}{a^2}$, oppure $2\pi a^2-2a^2\arccos\frac{2b^2-a^2}{a^2}$,

2.8.1 Con densità costante la massa del filo è data da $m=\frac{\delta}{2a}\ln(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2})+\delta b\sqrt{1+4a^2b^2}$. Le coordinate (b_x,b_y) del baricentro invece sono date da
$b_x=0$ e $b_y=\frac{\delta}{16a^2m}\left[ab\sqrt{1+4a^2b^2}(1+8a^2b^2)-\frac{1}{2}\ln(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2})\right]$
Nel caso di densità non costante si ha $m=\frac{c}{6a^2}\Big((1+4a^2b^2)^{\frac{3}{2}}-1)\Big)$. Le coordinate del baricentro sono date da (b_x,b_y) con $b_x=0$ e $b_y=\frac{c}{6am}\Big\{b^2(1+4a^2b^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{10a^2}\big((1+4a^2b^2)^{\frac{5}{2}}-1\big)\Big\}$

3.8.1 La massa è $m=L^2\frac{2a+2b+c}{4}$. Le coordinate del baricentro sono date da $(b_x,b_y,b_z)=\left(\frac{L}{6}\frac{8a+12b+3c}{2a+2b+c},\frac{L}{6}\frac{8b+3c}{2a+2b+c},0\right)$ Il momento di inerzia rispetto all'asse z è $\frac{1}{4}L^4(a+3b+\frac{c}{4})$; rispetto all'asse x è $\frac{1}{4}L^4(b+\frac{c}{8})$; rispetto all'asse y è $\frac{L^4}{2}(b+\frac{a}{2}+\frac{c}{16})$; Il momento di inerzia rispetto all'asse $\overline{OB}$ è $\frac{L^4}{8}(a+\frac{b}{3})$; rispetto all'asse $\overline{OA}$ è $\frac{L^4}{4}(\frac{3}{8\sqrt{2}}c+b)$; rispetto all'asse $\overline{AB}$ è $\frac{L^4}{4}(\frac{3}{8\sqrt{2}}c+\frac{a}{3})$. Momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrale e parallelo all'asse z: $\frac{1}{4}L^4(a+3b+\frac{c}{4})-m(b_x^2+b_y^2)$; Momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrale e parallelo all'asse x oppure al lato $\overline{OA}$: $\frac{1}{4}L^4(b+\frac{c}{8})-mb_y^2$; Momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrale e parallelo all'asse y oppure al lato $\overline{AB}$: $\frac{L^4}{4}(\frac{3}{8\sqrt{2}}c+\frac{a}{3})-m(3-b_x)^2$; Momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrale e parallelo al lato $\overline{OB}$: $\frac{L^4}{8}(a+\frac{b}{3})-m(b_y-b_x)^2$;

4.8.1 $\frac{\pi^2}{16}(1+\frac{\pi^3}{4})$ **5.8.1** $\pi\delta_oR^3$, $\delta_oR^3\frac{\pi^2}{2}$, $\pi\delta_oR^3$ **6.8.1** $R.:0$ **7.8.1** $\frac{11}{5}\pi R^3$

8.8.1 Se $a>b$ si ha $S=2a\pi(a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}))$, se $a<b$ si ha $S=2\pi b^2(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b})$

10.8.1 Sull'asse è $2\pi\sigma(\sqrt{z^2+R^2}-|z|)$ mentre sul bordo è $4\sigma R$.

11.8.1 La massa del filo è $aL^3(\frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3})$; la ascissa del baricentro è $L\frac{5(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))}{(2^{3/2}-1)8}$ e la ordinata è $-L\frac{1}{2^{3/2}-1}(\frac{4}{3}\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7-2\sqrt{2}}})$

12.8.1 $\pi\frac{a^2}{\sqrt{3}}$ **13.8.1** $\int_{\gamma_1}\omega=2\pi$, $\int_{\gamma_2}\omega=0$, $\int_{\gamma_3}\omega=2\pi$ **14.8.1** $R.:0$

15.8.1 $\frac{\pi}{6}a^2\left((1+\frac{b^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}-1\right)$ **16.8.1** $\frac{b^4}{8a}$ **17.8.1** $6\pi-12\arctan\sqrt{2}$

18.8.1 $\frac{3}{8}+\frac{25}{16}\arctan 2$ **19.8.1** $2r^2(\pi-2)$ **20.8.1** $2r^2\pi$ **21.8.1** $\frac{16}{3}r^3$ $16r^2$

22.8.1 $\frac{\pi}{30}$ **23.8.1** $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}$ **24.8.1** $-1+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$ **25.8.1** $\frac{\sqrt{3}+2}{4}+\frac{7}{24}\pi$

26.8.1 4π **27.8.1** 0 **28.8.1** $-abc\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$ **29.8.1** 0 **30.8.1** $\frac{1}{2e-2}$

31.8.1 $y(x)=c\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c_1$ **32.8.1** $\frac{32}{3}ab^2$ **33.8.1** $\frac{4}{15}$ **34.8.1** $\frac{\pi}{2}$

35.8.1 $\frac{1}{2-e^x}$ **36.8.1** $\frac{\pi}{12}(\frac{5}{6}\pi+1-\sqrt{3})$ **37.8.1** $2\pi\sqrt{3}a^2(\sqrt{3}-1)$

38.8.1 $-2\pi a^4, 0$ **39.8.1** e^{-x} **40.8.1** $\frac{mg}{k}t_o+\frac{m}{k}v_o\frac{v_ok-mg}{v_ok+mg}$ dove $t_o=-\frac{m}{k}\ln\frac{mg}{v_ok+mg}$, $-\frac{mg}{k}$, $-\sqrt{\frac{mgv_o^2}{mg+kv_o^2}}$

41.8.1 $2\pi\ln 2-\frac{3}{4}\pi$ **42.8.1** $\frac{13}{3}\pi$ **43.8.1** 0 **44.8.1** e^{2x}

45.8.1 1) $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}xe^x+\ln(1+e^x)\sinh x$ 2) $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}xe^x+\ln(1+e^x)\sinh x-\frac{1}{2}\cos x$

46.8.1 Non esiste **47.8.1** Non esiste **48.8.1** $\frac{1}{5}$, non esiste, -1 **49.8.1** $\frac{\cos x}{x}$

50.8.1 $y(t)\equiv 2$ **51.8.1** Se $\omega\neq\pm 2$ (viceversa si realizza un fenomeno che in fisica è detto *risonanza*) e la soluzione è $x(t)=a\cos 2t+b\sin 2t+\frac{1}{4}(\frac{\cos(2t+\omega t)}{2+\omega}+\frac{\cos(2t-\omega t)}{2-\omega})\cos 2t+\frac{1}{4}(\frac{\sin(2t+\omega t)}{2+\omega}+\frac{\sin(2t-\omega t)}{2-\omega})\sin 2t$ con $b=0$ e $a=\frac{1}{\omega^2-4}$. Notare che per $\omega\to+\infty$ la soluzione tende a diventare quella del sistema $\begin{cases} x''+4x=0 \\ x(0)=x_o, \quad x'(0)=y_o \end{cases}$ con x_o e y_o opportuni. Ciò significa che quando la frequenza del *termine forzante* tende a diventare grande, il sistema descritto dall'equazione $x''+4x=\cos(\omega t)$, *oscillatore armonico forzato*, si comporta come se tale termine non ci fosse.

52.8.1 $x_o=\frac{1}{4}$, $y_o=-\frac{1}{4}$, **53.8.1** $-\frac{4}{3}\pi$ **54.8.1** $\frac{15}{8}\pi$ **55.8.1** 1 ovviamente
56.8.1 $3((\ln(\frac{3}{2}\sqrt{\ln 2}))^{1/2})$ **57.8.1** $y(x)=\frac{-1-ce^t}{1+t+ce^t}$ e $c=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{2}$ **58.8.1** $r^2(\pi-2)$ **59.8.1** 6π

60.8.1 Il primo è $\pi^2/32$ ed il secondo è $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$ **61.8.1** $6\pi^2$, **62.8.1** $\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}$

63.8.1 $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\frac{13\ln^2 3+24-36\ln 3}{\ln^2 3}$

65.8.1 2π, 0, 2π. **66.8.1** è esatta, **67.8.1** $\frac{3\pi\sqrt{2}a^2}{26}$ $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.8.1 Detta E l'ellisse in questione, abbiamo $E\subset\{x^2+y^2\le a^2\}$ e l'integrale che cerchiamo è dato da $\int\int_E dx\,dy\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ che in coordinate "polari ellittiche" diventa
$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 d\rho\, ab\rho\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}$. Il 4 di fronte all'integrale è dipende dal fatto che le quattro porzioni in cui l'ellisse è divisa dagli assi cartesiani danno lo stesso contributo alla superficie della semisfera e ciò è dovuto alla parità sia rispetto ad x che y dell'integrando.
L'integrale rispetto a ρ si può eseguire ottenendo
$4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\frac{\sqrt{a^2-\rho^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}{-(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}\Big|_0^1=$

$= 4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{a}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi} - \frac{\sqrt{a^2-(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}\right]$

La sostituzione $\varphi = \arctan t$, ricordando che $\cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin(\arctan t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, trasforma gli integrali in $4a^2b\int_0^\infty dt\,\left[\frac{a}{a^2+b^2t^2} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2t^2}\right]$.

Il primo integrale diventa $4a^3b\frac{1}{ab}\arctan\frac{bt}{a}\,|_0^\infty = 2\pi a^2$. Nel secondo integrale bisogna eseguire l'ulteriore sostituzione $\sqrt{1+t^2} = z$ avendone

$-4a^2b\sqrt{a^2-b^2}\int_1^\infty \frac{dz}{a^2-b^2+b^2z^2} = -4a^2b\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{bz}{\sqrt{a^2-b^2}}\,|_1^\infty = -4a^2(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}) = -4a^2\arctan\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

È opportuno notare che se non si fosse scritto l'integrale come 4 volte l'integrale esteso fra $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ ma si fosse lasciato $0 \le \varphi \le 2\pi$, non si sarebbe potuto cambiare variabile $\varphi = \arctan t$ in quanto $\arctan t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si sarebbe potuto scrivere $2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ldots$ e cambiare la variabile nello stesso modo. Volendo lasciare $0 \le \varphi \le 2\pi$ si sarebbe dovuto invertire la tangente anche in intervalli diversi da quello per il quale si definisce la funzione arcotangente. Lo studente/ssa può eseguire il conto e verificare l'uguaglianza del risultato.

2.8.1 Cominciamo dalla massa con densità costante. $m = \delta\int_{-b}^b dt\sqrt{1+4a^2t^2}$ la sostituzione $t = \frac{1}{2a}\sinh(y)$ trasforma l'integrale in $\frac{\delta}{a}\int_0^{y_o} dy\cosh^2(y)$ dove y_o è *l'unica* (perché) soluzione della equazione $\sinh(y_o) = 2ab$. Integrando per parti si ha

$\frac{\delta}{a}\int_0^{y_o}\cosh^2(y)dy = \frac{\delta}{a}\int_0^{y_o}\cosh(y)d(\sinh(y)) = \frac{\delta}{a}\cosh(y)\sinh(y)\,|_0^{y_o} - \frac{\delta}{a}\int_0^{y_o}\sinh^2(y)dy$

Ora usiamo la relazione $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ed otteniamo

$2\frac{\delta}{a}\int_0^{y_o}\cosh^2(y)dy = \frac{\delta}{a}\cosh(y)\sinh(y)\,|_0^{y_o} + \frac{\delta}{a}y_o$ da cui il risultato (y_o è ottenuto invertendo la funzione $y = \sinh(x)$ ed è uguale a $\ln(y + \sqrt{1+y^2})$. Si può notare come

$m(a,b,\delta) = 2\delta\frac{2ab+o(a)}{2a}$ e quindi $m \to 2\delta b$ per $a \to 0$ che è quanto ci aspettavamo essendo nel limite il filo disposto lungo l'asse delle x.

Sempre con densità costante calcoliamo ora $\frac{\delta}{m}\int_{-b}^b dt\sqrt{1+4a^2t^2}\,t$ e $\frac{\delta}{m}\int_{-b}^b dt\sqrt{1+4a^2t^2}\,at^2$ che danno le coordinate del baricentro. Il primo integrale è nullo in quanto si integra una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Il secondo integrale è dato da $\frac{2\delta}{m}\int_0^b dt\sqrt{1+4a^2t^2}at^2$. Tramite la stessa sostituzione di prima si ottiene

$b_y = \frac{\delta}{32a^2m}\int_0^{2y_o} dx\sinh^2(x) = \frac{\delta}{64a^2m}\sinh(2y_o)\cosh(2y_o) - \frac{\delta}{32a^2m}y_o$ ossia $b_y = \frac{\delta}{64a^2m}4ab(4a^2b^2 + 1+4a^2b^2) - \frac{\delta}{32a^2m}\ln(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2}))$ da cui il risultato. In questo caso abbiamo che $b_y \to \frac{o(a^2)}{32ba^2}$ per $a \to 0$ e quindi $b_y \to 0$.

Nel caso di densità non costante la massa è data dall'integrale $m(a,b,c) = 2c\int_0^b dt\,t\sqrt{1+4a^2t^2} = \frac{c}{6a^2}\big((1+4a^2b^2)^{\frac{3}{2}} - 1\big)$ e $\lim_{a\to0} m(a,b,c) = cb^2$

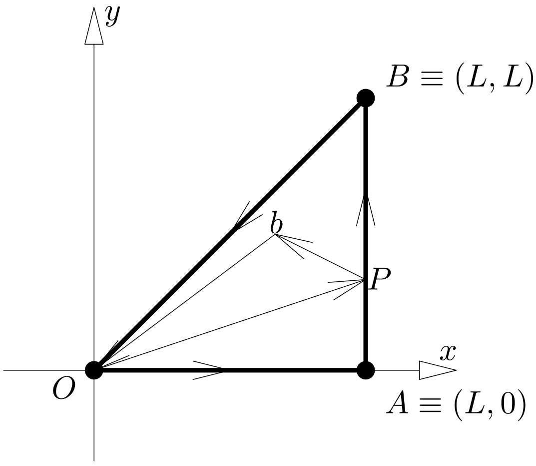
Per quel che riguarda il baricentro al solito $b_x = 0$ dovendo eseguire l'integrale esteso ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine di una funzione dispari.

Integrando per parti si ha

$b_y = 2ac\int_0^b dt\,t^3\sqrt{1+4a^2t^2} = 2ac\int_0^b \left[\frac{t^2}{12a^2}d\big((1+4a^2t^2)^{\frac{3}{2}})\big)\right]$ e quindi si arriva a

$\frac{c}{6am}\left\{b^2(1+4a^2b^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10a^2}\big((1+4a^2b^2)^{\frac{5}{2}} - 1\big)\right\}$ e si può notare come $\lim_{a\to0} b_y = 0$

3.8.1 Cominciamo dal calcolare la massa del filo e per fare questo seguiamo il disegno



Assegnamo una curva al sostegno $\overline{OA}$ $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \begin{cases} t & 0 \le t \le L \\ 0 \end{cases}$ e quindi la massa è data da $\int_0^L dt\, at = \frac{1}{2}aL^2$. Si tratta di un integrale del tipo $\int_\gamma f ds$ ossia rispetto alla lunghezza d'arco e quindi si ottiene $ds = \sqrt{(\dot\varphi_1)^2 + (\dot\varphi_2)^2}dt$ e la f va calcolata sulla curva. Nel nostro caso la f è la densità del filo.

Parametrizziamo il segmento $\overline{AB}$ secondo la curva $\gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} L \\ t & 0 \le t \le L \end{cases}$ e quindi la massa è data da $\int_0^L dt\, bt = \frac{1}{2}bL^2$.

Parametrizziamo il segmento $\overline{BO}$ secondo la curva $\sigma(t) = (\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} t & 0 \le t \le L \\ t \end{cases}$ e quindi la massa è data da $\int_0^L dt\, \sqrt{2}\frac{c}{2}\sqrt{2}|t - \frac{L}{2}|$ da cui $\frac{c}{4}L^2$. Va osservato che la parametrizzazione scelta per la curva il cui sostegno è il segmento $\overline{BO}$ non corrisponde al verso di percorrenza disegnato. Del resto essendo integrali rispetto alla lunghezza d'arco non ha alcuna importanza il verso di percorrenza di un sostegno di curva. Ad ogni modo per essere fedeli con quanto disegnato bisognerebbe scrivere $\varphi(t) = \begin{cases} -t & -L \le t \le 0 \\ -t \end{cases}$ e l'integrale diverrebbe $\int_{-L}^0 dt\, \sqrt{2}\frac{c}{2}\sqrt{2}|-t-\frac{L}{2}|$ da cui, eseguendo la sostituzione $\tau = -t$ si ottiene $\int_0^L dt\, \sqrt{2}\frac{c}{2}\sqrt{2}|t - \frac{L}{2}|$ esattamente come prima. Del resto che si ottenesse lo stesso risultato lo si evinceva anche dal fatto che la curva $\psi(\tau) \doteq \varphi(-\tau)$ altri non è che una nuova parametrizzazione della curva e sappiamo che rispetto ad un cambio regolare di parametro (quale è quello introdotto) qualsiasi integrale curvilineo conserva il suo valore.

Baricentro Sia $m = L^2\frac{2a+2b+4c}{4}$. Se con b_x indichiamo la ascissa del baricentro abbiamo $mb_x = \int_0^L dt\, at\, \varphi_1(t) + \int_0^L dt\, bt\, \gamma_1(t) + \int_0^L dt\, \frac{c}{2}\sqrt{(\dot{\sigma_1}(t))^2 + (\dot{\sigma_2}(t))^2}\sigma_1(t)$ e si ottiene $L^3(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{8})$. D'altro canto si ha
$mb_y = \int_0^L dt\, at\, \varphi_2(t) + \int_0^L dt\, bt\, \gamma_2(t) + \int_0^L dt\, \frac{c}{2}\sqrt{(\dot{\sigma_1}(t))^2 + (\dot{\sigma_2}(t))^2}\sigma_2(t)$ e si ottiene $L^3(\frac{b}{3} + \frac{c}{8})$. Il risultato segue.

È opportuno fare alcune semplici osservazioni. Se $a = c = 0$ si ha $b_x = L$. Se $a = b = 0$ allora, essendo la densità dell'ipotenusa del triangolo una funzione simmetrica della distanza dal punto medio dell'ipotenusa stessa, segue che $b_x = \frac{L}{2} = b_y$.

Momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati

asse z; La formula generale del momento di inerzia rispetto ad un asse I, qualora il filo sia disposto lungo un sostegno S di una curva $\gamma(t)$, è dato da $\int_\gamma (dist(I, \gamma(t)))^2|\dot\gamma|\delta(\gamma/t))dt$

Per il segmento $\overline{OA}$ abbiamo $\int_0^L at\, t^2\, dt = \frac{a}{4}L^4$. Per il segmento $\overline{AB}$ abbiamo $\int_0^L bt\,(L^2+t^2)\, dt = \frac{b}{4}L^4 + \frac{b}{2}L^4 = bL^4\frac{3}{4}$. Per il segmento $\overline{OB}$ abbiamo $\int_0^L \frac{c}{2}\sqrt{2}|t-\frac{L}{2}|\,(2t^2)\,\sqrt{2}dt = 2c\int_0^{\frac{L}{2}} dt\, t^2(\frac{L}{2}-t) + 2c\int_{\frac{L}{2}}^L dt\, t^2(t-\frac{L}{2}) = \frac{c}{16}L^4$. Il momento di inerzia rispetto all'asse z è dunque $\frac{1}{4}L^4(a+3b+\frac{c}{4})$

asse x; Il contributo del segmento $\overline{OA}$ è nullo in quanto la distanza dall'asse è zero. Il contributo del segmento $\overline{AB}$ è $\int_0^L dt\, bt\, t^2 = \frac{b}{4}L^4$ mentre quello del segmento obliquo è $\int_0^L dt\, c|t-\frac{L}{2}|t^2 = \frac{c}{32}L^4$ per cui alla fine si ha $\frac{1}{4}L^4(b+\frac{c}{8})$

asse y; abbiamo i seguenti risultati: il momento del segmento $\overline{OB}$ è uguale al momento rispetto all'asse x e quindi è $\frac{c}{32}L^4$; Il momento del segmento $\overline{OA}$ è uguale al momento rispetto all'asse z ossia $\frac{a}{4}L^4$; il momento del segmento $\overline{AB}$ è dato da $\int_0^L dt\, bt\, t^2 = \frac{b}{2}L^4$. La somma dà $\frac{L^4}{2}(b+\frac{a}{2}+\frac{c}{16})$

Momenti di inerzia rispetto ad assi passanti per i lati del triangolo

Asse passante per il segmento $\overline{OB}$; Si hanno due contributi. Il primo è dovuto al segmento $\overline{OA}$ ed è $\int_0^L(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 axdx = a\frac{L^4}{8}$. Il secondo contributo è dovuto al segmento $\overline{AB}$ ossia $\int_0^L(\frac{L-y}{\sqrt{2}})^2 bydy = b\frac{L^4}{24}$. Il terzo contributo (quello del segmento $\overline{OB}$) è nullo poiché è zero la distanza fra l'asse ed il segmento che giace sull'asse stesso. La somma dà $\frac{L^4}{8}(a+\frac{b}{3})$

Asse passante per il segmento $\overline{OA}$; Anche qui si hanno due contributi. Il primo è quello del segmento $\overline{OB}$ ed è dato da $\int_0^L \frac{c}{2}x^2\sqrt{2}|x-\frac{L}{2}|dx = c\frac{3L^4}{\sqrt{2}32}$. Il secondo contributo è dato dal segmento $\overline{AB}$ ossia $\int_0^L dyby^2 = b\frac{L^4}{4}$. La somma è $\frac{L^4}{4}(\frac{3}{8\sqrt{2}}c+b)$

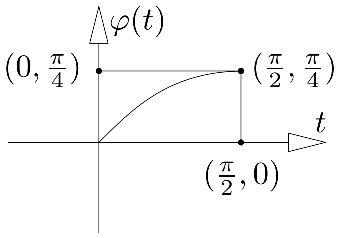
Asse passante per il segmento $\overline{AB}$; Il contributo del segmento $\overline{OB}$ è lo stesso del precedente per cui si ha $c\frac{3L^4}{\sqrt{2}32}$ mentre il contributo del segmento $\overline{OA}$ è dato da $\int_0^L dxax(L-x)^2 = a\frac{L}{12}$ e la somma è $\frac{L^4}{4}(\frac{3}{8\sqrt{2}}c+\frac{a}{3})$

Calcoliamo ora i momenti di inerzia rispetto ad assi passanti per il baricentro del triangolo e paralleli ai lati. In teoria si potrebbe ripetere il calcolo di prima. In realtà ci viene in aiuto una osservazione nota come *Teorema di Huygens–Steiner*. Facciamo l'esempio di un asse, detto I_z, parallelo all'asse z (detto e_z) e passante per il baricentro del triangolo che chiamiamo b. Dobbiamo calcolare $\int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(dist(\underline{x}, I_z))^2$. Nella figura $dist(\underline{x}, I_z))$ è data dalla lunghezza del vettore $\overline{OP}$. Abbiamo $\overline{OP}+\overline{Pb}=\overline{Ob}$ per cui $\overline{Pb}=\overline{Ob}-\overline{OP}$ e $|\overline{OP}| = dist(\underline{x}, I_z)$ se il punto $\underline{x}$ coincide con P. Inoltre si ha $|\overline{OP}| = dist(\underline{x}, e_z)$. Dalla relazione vettoriale $\underline{a}^2 = \underline{b}^2 + \underline{c}^2 + 2\underline{b}\cdot\underline{c}$ valida per tre qualsiasi vettori tali che $\underline{a} = \underline{b}+\underline{c}$, dalla *linearità dell'integrale*, $\int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(dist(\underline{x}, e_z))^2 = \int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(dist(\underline{x}, I_z))^2 - 2\int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(\overline{Ob}\cdot\overline{Pb}) + \int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(\overline{Ob})^2$. Il secondo integrale è nullo in quanto $\overline{Ob}$ è un vettore costante e l'integrale da calcolare è $\int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))\overline{Pb})$ che è nullo in quanto è il calcolo del baricentro misurando le distanze a partire dal baricentro stesso. Dunque otteniamo $\int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(dist(\underline{x}, e_z))^2 = \int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(dist(\underline{x}, I_z))^2 + \int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(\overline{Ob})^2$ e quindi $\int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(dist(\underline{x}, e_z))^2 - (\overline{Ob})^2\int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t)) = \int_\gamma |\gamma'|\delta(\gamma(t))(dist(\underline{x}, I_z))^2$

Il ragionamento è analogo per qualsiasi coppia di assi paralleli purché uno dei due sia baricentrale.

4.8.1 $\dot\varphi(t) = (1, \frac{\cos t}{1+\sin^2 t})$ e quindi $\int_\varphi \omega$ per definizione è uguale a

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(4t^3\arctan(\sin t)dt + \big[2\arctan(\sin t)+t^4\big]\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\Big)dt$; il sostegno della curva è dato dal seguente grafico



Certamente non è il caso di calcolare il precedente integrale (ove anche fosse possibile). Conviene osservare che la forma è chiusa ed essendo definita in tutto il piano che è stellato ne segue che è esatta. Dunque possiamo procedere in due modi sostanzialmente equivalenti.
1) a $\varphi(0) = (0,0)$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ e quindi scegliamo la curva più idonea all'integrazione per congiungere i due punti. La curva più idonea è $\varphi_1(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \pi/2 \\ 0 \end{cases}$ e $\varphi_2(t) = \begin{cases} \pi/2 \\ t & 0 \le t \le \pi/4 \end{cases}$. $\int_{\varphi_1}\omega = 0$ in quanto la forma va calcolata sulla curva e quindi il primo termine è nullo essendovi y che è identicamente nullo. Il secondo termine di $\int_{\varphi_1}\omega$ pure è nullo in quanto $dy \equiv 0$. Di $\int_{\varphi_2}\omega = 0$ il primo termine è ancora nullo perché $dx \equiv 0$. Rimane $\int_{\varphi_2}(2y + x^4)dy$ che diventa $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt(2t + (\frac{\pi}{2})^4) = (\frac{\pi}{4})^2 + \frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2})^4$.
Il secondo modo consiste nel trovare quella funzione $f(x,y)$ tale che $df = \omega$ e si vede subito che $f(x,y) = yx^4 + y^2$. Quindi si ha $f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}) - f(0,0)$.

5.8.1 $\delta_1(x,y,z,)$: l'integrale della massa è dato da $\int\int_D dudv\delta_o\sqrt{R^2-u^2-v^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}$ dove D è il disco di raggio R. Dunque $m_1 = \int\int_D dudv\delta_o R = \delta_o\pi R^3$.
$\delta_2(x,y,z)$: $\int\int_D dudv\delta_o\sqrt{u^2+v^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R d\rho\,\rho\frac{\delta_o R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2\pi\delta_o R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}\delta_o R^3$.
$\delta_3(x,y,z)$: $2\int\int_{D^+} dudv\delta_o|u|\frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R d\rho\,\rho\frac{\delta_o R\rho\cos\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 4\delta_o R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt = \pi\delta_o R^3$.

6.8.1 IL calcolo diretto dà (si parametrizza la circonferenza nel solito modo usando coordinate polari di raggio uguale ad R).
$\int_0^{2\pi}d\theta\frac{R^4}{2}\cos\theta\sin^2\theta(-\sin\theta) + \int_0^{2\pi}d\theta R\cos\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\frac{1}{2}\cos\theta\sin^2\theta(-\sin\theta) = -\frac{1}{8}(\sin^4\theta)\,\big|_0^{2\pi} = 0$
Volendo usare il Teorema di Stokes bisogna individuare una superficie di cui C è il bordo. La più ovvia è la semisfera positiva ossia $\Sigma = \{x^2+y^2+z^2 = R^2, \quad z \ge 0\}$. Si ottiene $\int\int_\Sigma(rot\underline{F},\underline{n})d\sigma$ dove abbiamo definito $\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$ e $rot\underline{F} = (0,0,-xy)$. Inoltre $\underline{n}$ è quella normale che per $z = 0$ deve coincidere con la normale esterna alla curva C che essendo percorsa in senso antiorario, è diretta parallelamente al vettore $\underline{k}$ ossia la normale esterna alla superficie e calcolata sulla circonferenza è un vettore ortogonale al piano (x,y) e diretto verso l'alto. Parametrizzando Σ in coordinate cartesiane si ha $\varphi(x,y,z) = (x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2})$, $-R \le x \le R$, $-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$ e la normale esterna è data da $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_x \wedge \varphi_y$ ossia $\underline{n} = \underline{i}\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \underline{j}\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \underline{k}$ per $x^2+y^2 \ne R^2$. Se $x^2+y^2 = R^2$ si ha $\varphi(x,y,z) = (x,y,0)$ $-R \le x \le R$, $y = \sqrt{R^2-x^2}$ (si è scelta la radice positiva) e $\varphi_x \wedge \varphi_y = \underline{k}$. Ora la semicirconferenza C_+ percorsa in senso antiorario è parametrizzata come $(-x,\sqrt{R^2-x^2},0)$, $-R \le x \le R$ per cui il suo vettore tangente è $\underline{T} = (-1,\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},0)$ mentre quello normale e giacente sul piano (x,y) è $\underline{N} = (\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},1,0)$ (non sono normalizzati ad 1). Il prodotto vettoriale $\underline{N} \wedge \underline{T}$ deve dare luogo ad un vettore proporzionale a $\underline{k}$ con un termine positivo ed è esattamente quanto accade. Nel caso avessimo preso la semicirconferenza negativa ($y \le 0$) avremmo avuto $(x,-\sqrt{R^2-x^2},0)$, $-R \le x \le R$ i cui vettori tangenti e normale sarebbero $\underline{T} = (1,\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},0)$ e $\underline{N} = (\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},-1,0)$ avendo

sempre che $\underline{N} \wedge \underline{T}$ è un vettore proporzionale a $\underline{k}$ attraverso una quantità positiva.
Parametrizzando l'interno di C con le coordinate polari si ottiene
$\int\int_\Sigma (rot\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho\, \rho\, \rho^2 \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0$
La forma non è esatta in quanto il rotore di $\underline{F}$ non è nullo e questo significa che esiste almeno una curva chiusa γ lungo la quale $\int_\gamma \omega$ non è nullo. Si verifichi che lungo la curva, percorsa in senso orario od antiorario, il cui sostegno è dato dall'insieme $|x|+|y|=1$ l'integrale non è nullo.
Va sottolineato che la scelta della semisfera quale superficie su cui applicare il Teorema di Stokes è alquanto arbitraria. Infatti avremmo potuto scegliere un'altra superficie che avesse la curva C come bordo. Se infatti si prendesse come $\Sigma = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le R^2,\, z=a\}$ si avrebbe $\int\int_\Sigma (rot\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho\, \rho\, \rho^2 \sin\theta\cos\theta = 0$ da cui il risultato.
Un'altra superficie, un pò piú complicata, è data da $\Sigma = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = R^2,\, 0 \le z \le a,\, a>0\} \cup \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le R^2,\, z=a\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ si ottiene lo stesso risultato. È solo un pò più complicato giungervi. Parametrizziamo prima Σ_1 con le solite coordinate (θ, u) $\varphi(\theta,u) = (\cos\theta, \sin\theta, u)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le u \le a$ ed otteniamo che $\underline{n} = \cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}$ per cui $\int\int_{\Sigma_1} (rot\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = 0$ non avendo il rotore componenti lungo gli assi x ed y. $\int\int_{\Sigma_2} (rot\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho\, \rho\, \rho^2 \sin\theta\cos\theta = 0$ da cui il risultato.

7.8.1 Applichiamo il Teorema di Gauss ed otteniamo $\int\int\int_V (\frac{1}{2R^2} y^2 + 1) dx\, dy\, dz =$
$= R^3 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^2 \sin\theta + R^3 \frac{1}{2} \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^4 \sin^3\theta \sin^2\varphi = R^3 \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{5} R^3 \pi \frac{2}{3} = \frac{11}{15}\pi R^3$

Applicando la definizione si ha un calcolo più lungo. Le superfici da parametrizzare sono due. La prima è la semisfera con $z \ge 0$. Usando la parametrizzazione $(x, y, \sqrt{R^2-x^2-y^2}) \doteq (r_1, r_2, r_3) \doteq \underline{r}$, $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2+y^2 \le R^2\}$ si ha che la normale esterna $\underline{r}_x \wedge \underline{r}_y = (\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1)$ ed il cui modulo è $\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. L'integrale $\int\int_\Sigma (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma$ è uguale a $\int\int_D (\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}})^{-1} (\frac{1}{2R^2} \frac{x^2y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \sqrt{R^2-x^2-y^2}) \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy$. Passando a coordinate polari nell'insieme $x^2+y^2 \le R^2$ l'integrale diventa $\int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho\, d\theta\, \rho\, (\frac{1}{2R^2} \frac{\rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}})$ (l'integrale di mezzo è nullo). Ora $\int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho\, d\theta\, \rho \frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}) = 2\pi \frac{1}{3} (R^2-\rho^2)^{3/2} \big|_R^0 = \frac{2}{3}\pi R^3$. Nel primo integrale vi è $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{1}{3} d(\sin^3\theta) = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin^4\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta (1-\cos^2\theta) d\theta = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$ da cui $\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{3}$ e quindi $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$. Il secondo integrale del primo contributo è $\int_0^R d\rho\, \frac{\rho^5}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$ ed integrando per parti si arriva a $\frac{8}{15}\pi R^5$.

La seconda superficie da parametrizzare è $x^2+y^2 \le R^2$, $z=0$ e la normale esterna è $(0,0,-1)$ per cui l'integrale da calcolare è $\int\int_{x^2+y^2 \le R^2} z dx\, dy$ che vale zero essendo zero il valore di z. Mettendo assieme i vari contributi otteniamo $\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{1}{2R^2}\frac{\pi}{4}\frac{8}{15} R^5 = \frac{11}{15}\pi R^3$

Un'altra possibile parametrizzazione ("angolare") è la seguente seguente $(x,y,z) = \underline{r}(\vartheta, \varphi) = (r_1(\vartheta,\varphi), r_2(\vartheta,\varphi), r_3(\vartheta,\varphi))$ $r_1 = R\sin\vartheta\cos\varphi$, $r_2 = R\sin\vartheta\sin\varphi$, $r_3 = \cos\vartheta$ si avrebbe $\underline{r}_\vartheta \wedge \underline{r}_\varphi = \underline{i}(R^2\sin^2\vartheta\cos\varphi) + \underline{j}(R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi) + \underline{k}(\sin\vartheta\cos\vartheta)$. Il dominio di variazione delle variabili (ϑ, φ) è il rettangolo $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \doteq D$
$\int\int_\Sigma (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = \int\int_D (\underline{F}, \underline{r}_\vartheta \wedge \underline{r}_\varphi) d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, d\varphi\, (\frac{R^3}{2}\sin^5\vartheta \sin^2\varphi\cos^2\varphi + R^3\sin^2\vartheta\cos\varphi + R^3\sin\vartheta\cos^2\vartheta)$.
$\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$ per cui il secondo integrale vale zero. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, d\varphi\, R^3 \sin\vartheta\cos^2\vartheta = R^2 2\pi \frac{1}{3}$,
$I \doteq \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi d(\frac{1}{3}\sin^3\varphi) = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^4\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi (1-\cos^2\varphi) d\varphi$ e quindi $\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{3}$ da cui $I = \frac{\pi}{4}$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, \sin^5\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, \sin^3\vartheta(1-\cos^2\vartheta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, \cos\vartheta \frac{1}{4} d(\sin^4\vartheta) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, \sin^5\vartheta$ da cui $\frac{5}{4}I = \frac{2}{3}$ e quindi $I = \frac{8}{15}$. Sommando i due contributi otteniamo il risultato.

Vi è una terza possibile parametrizzazione che è quella ottenuta "affettando" la sfera con un piano orizzontale. Le coordinate sono (u,θ) $(x,y,z) = \underline{r}(\vartheta,\varphi) = (r_1(\vartheta,\varphi), r_2(\vartheta,\varphi), r_3(\vartheta,\varphi))$ $r_1(u,\theta) = \sqrt{R^2-u^2}\cos\theta$, $r_2(u,\theta) = \sqrt{R^2-u^2}\sin\theta$, $r_3(u,\theta) = u$ e $\underline{r}_u \wedge \underline{r}_\theta = \underline{i}\cos\theta\sqrt{R^2-u^2} + \underline{j}\sin\theta\sqrt{R^2-u^2} + \underline{k}u$. $(u,\theta) \in D = \{(u,\theta) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le u \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$
$\int\int_\Sigma (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = \int\int_D (\underline{F}, \underline{r}_u \ \wedge\ \underline{r}_\theta) d\theta\, du =$
$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R du\, (\frac{1}{2R^2}\cos^2\theta\sin^2\theta(R^2-u^2)^2 + \sin\theta\sqrt{R^2-u^2} + u^2) = \frac{11}{15}\pi R^3$
si può verificare che $\frac{22}{15}\pi R^3$ è il flusso uscente se calcolato su tutta la sfera.

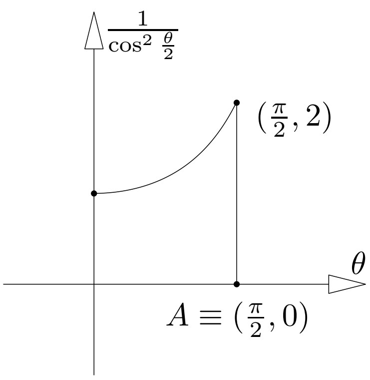
8.8.1 Sia dato l'insieme $D = \{(u,\theta) \in \mathbf{R}^2 \!:\ -b \le u \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ e la superficie $\underline{\varphi}(u,v) \doteq (x,y,z) = (a\cos\theta\sqrt{1-\frac{u^2}{b^2}}, a\sin\theta\sqrt{1-\frac{u^2}{b^2}}, u)$, $-b \le u \le b$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ($\underline{\varphi}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$). La parametrizzazione dell'ellissoide corrisponde a fissare una ordinata $z = u$ e poi a parametrizzare la circonferenza di raggio $a\sqrt{1-\frac{u^2}{b^2}}$. La matrice delle derivate è data da
$$\begin{pmatrix} -a\sin\theta\sqrt{f(u)} & \frac{a}{b^2}\cos\theta\frac{-u}{\sqrt{f(u)}} \\ a\cos\theta\sqrt{f(u)} & \frac{a}{b^2}\sin\theta\frac{-u}{\sqrt{f(u)}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(u) = 1 - \frac{u^2}{b^2}$$
La radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine 2 dà luogo a $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2}-1)+a^2}$. La superficie dell'ellissoide diventa dunque
$\int\int_D du\, d\theta \sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2}-1)+a^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-b}^b du\, \sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2}-1)+a^2} =$
$= 4\pi a\int_0^1 dz\, \sqrt{b^2+(a^2-b^2)z^2}$. A questo punto bisogna sapere se $a > b$ oppure $a < b$. Se $a > b$ l'integrale si risolve facilmente sostituendo $u = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sinh t$ e si ottiene $4\pi\frac{b^2 a}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{t_o} dt\, \cosh^2 t$ dove t_o è l'unica soluzione della equazione $\sinh t = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. La primitiva della funzione $\cosh^2 t$ è $\frac{1}{2}\cosh t\sinh t + \frac{1}{2}t$ e $t_o = \ln(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} + \sqrt{1+(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b})^2})$. Riunendo il tutto si ottiene $S = 2a\pi(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}))$
Se invece $a < b$, sostituendo $z = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\sin t$ si ottiene $S = 2\pi b^2(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b})$

Volendo si poteva usare un'altra superficie ossia un'altra terna di funzioni per descrivere il sostegno costituito dalla "superficie" dell'ellissoide di rotazione. Precisamente si poteva fare $D = \{(\theta,\psi)) \in \mathbf{R}^2 \!:\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \psi \le 2\pi\}$
$\varphi(\theta,\psi) \doteq (x,y,z) = (a\sin\theta\cos\psi, a\sin\theta\sin\psi, b\cos\theta)$, ($\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$). La matrice delle derivate stavolta è $\begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\psi & -a\sin\theta\sin\psi \\ a\cos\theta\sin\psi & a\sin\theta\cos\psi \\ -b\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$
ed il modulo al quadrato della normale esterna alla superficie è dato da $a^4\cos^2\theta\sin^2\theta + a^2b^2\sin^4\theta$. L'area cercata è data da $\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta\, a\sin\theta\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2\theta + a^2}$ ed eseguendo la sostituzione $\cos\theta = z$ si ottengono gli integrali di prima.
Due parole vanno dette sulla regolarità delle parametrizzazioni scelte. Nel primo caso, facendo riferimento alla *Definizione 3.1* pag. 290 del libro di E.Giusti, si ha $K = D$, φ è quella data. Le condizioni b e c sono verificate in quanto la terza componente è $z = u$. Infatti l'iniettività è immediata ed il fatto che la matrice delle derivate abbia rango 2 segue dal fatto che la grandezza $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2}-1)+a^2}$ è sempre non nulla per $-b \le u \le b$. La condizione non verificata è la prima.

Infatti $\frac{-u}{\sqrt{f(u)}}$ è singolare per $u = \pm b$. Ad ogni modo la singolarità si riferisce ad un insieme di misura nulla e quindi si può eseguire l'integrazione senza problemi.
Nel caso dell'altra parametrizzazione si ha di nuovo $K = D$, ma la condizione non verificata è quella della iniettività in quanto per $\psi = 0$ e $\psi = 2\pi$ si ottengono gli stessi punti. Anche in questo caso non si hanno problemi in quanto gli insiemi interessati hanno misura nulla.

Un terzo modo consiste nell'usare il teorema di Pappo–Guldino. Parametrizzando l'ellisse $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ nel primo quadrante come $y = \gamma_1(t) = a\cos t$, $z = \gamma(2) = b\sin t$. La superficie che cerchiamo è $2\pi \cdot 2\int_0^{\pi/2} \gamma_1 \|\underline{\gamma}'\| dt$ ossia $2\pi 2\int_0^{\pi/2} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$. Sostituiamo $z = \sin t$ da cui $4\pi\int_0^1 a\, dz\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}$ ossia uno degli integrali precedenti.

9.8.1 L'integrale in questione può scriversi (perché ?) come $2\int\int_{D^+} dxdy\sqrt{x^2+y^2}$ dove $D^+ = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \;|y \geq 0 \;\wedge\; 0 \leq x \leq 1 - \frac{y^2}{4}\}$. L'insieme $x = 1 - \frac{y^2}{4}$, in coordinate polari diventa $\rho = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e quindi si ottiene (il dominio nello spazio (ρ,θ) è normale rispetto a θ) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} d\rho\rho^2 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^6 x}$ e sostituendo $x = \arctan t$ si arriva a all'integrale $\frac{2}{3}\int_0^1 dt\,(1+t)^2 = \frac{112}{45}$.

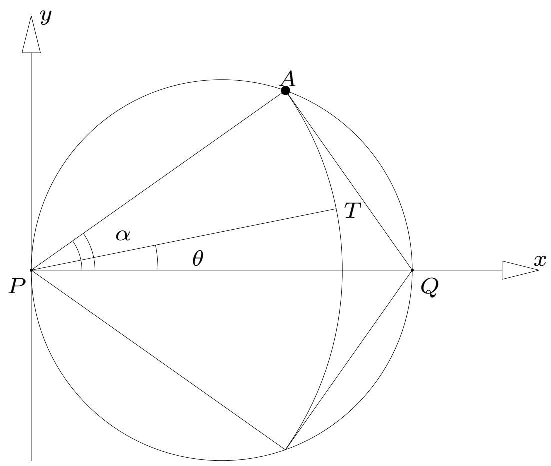


Il cambio di variabili operato nel libro non sembra essere appropriato. Infatti se indichiamo con $\varphi(u,v,) = (x,y) = (u^2 - v^2, 2uv)$ e con D l'insieme nello spazio (x,y) su cui si deve integrare si ha (per definizione di cambiamento di variabili in un integrale doppio) $\int\int_D f(x^2+y^2)dxdy = \int\int_{\varphi^{-1}(D)} f(x^2(u,v) + y^2(u,v))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$. Ora $\varphi^{-1}(D) = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2\colon\; 0 \leq x \leq 1\colon\; 0 \leq y \leq 1\} \cup \{-1 \leq x \leq 0\colon\; -1 \leq y \leq 0\}$ e l'integrale sarebbe uguale a due volte il valore dato. La ragione di ciò risiede nel fatto che la trasformazione φ *non è iniettiva su un insieme di misura non nulla.* Infatti $\varphi(u,v) = \varphi(-u,-v)$ e quindi i punti simmetrici rispetto all'origine vengono mandati nello stesso punto. Tra l'altro questa stessa motivazione è alla base dell'esercizio numero 9 pag. 77 del libro S.Salsa–A.Squellati "Esercizi di Analisi Matematica 2"– Integrazione, Zanichelli nel quale si tratta di individuare prioprio tale problema quale causa della contraddizione presente nell'esercizio.

10.8.1 Cominciamo dal potenziale lungo l'asse di rotazione. Posizioniamo il disco in modo che il suo centro sia l'origine di un sistema di assi cartesiani in cui l'asse z è ortogonale al disco. L'integrale è dato da $V(0,0,z) \doteq V(z) = \int\int_D \frac{\sigma\, dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Passando a coordinate polari (è importante che il dominio sia normale rispetto all'asse θ e che la funzione integranda dipenda da x ed y attraverso la combinazione x^2+y^2) si ottiene $V(z) = \sigma\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = 2\pi\sigma(\sqrt{z^2+R^2} - |z|)$. $V(0) = 2\pi\sigma R$ e $\lim_{z\to\pm\infty} V(z) = 0$.
Nel caso del potenziale sul bordo del disco l'integrale è formalmente lo stesso. Il punto dove calcolare il potenziale è $P \equiv (0,0,0)$ per cui $V(P) = 2\int\int_{D^+} \frac{\sigma}{\mathrm{dist}((x,y),P)}$. Sia $Q \equiv (2R,0,0)$ dove

$D^+ = \{\underline{x} \in D\colon\ y \geq 0\}$ e sia A un punto del bordo del disco. Con α indichiamo l'angolo $\widehat{QPA}$; Il segmento $\overline{OA}$ ha lunghezza $2R\cos\alpha$. A partire dal punto A disegnamo un arco con centro in P e raggio costante pari a $2R\cos\alpha$ fino ad intersecare la circoferenza in un punto diametralmente opposto ad A rispetto al segmento $[0, 2R]$ come sottoinsieme dell'asse delle ascisse. Se indichiamo con T un punto dell'arco e con θ l'angolo $\widehat{QPT}$, abbiamo che le coordinate di T sono date da $\begin{cases} x = 2R\cos\alpha\cos\theta \\ y = 2R\cos\alpha\sin\theta \end{cases}$ $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \alpha$.

La matrice Jacobiana è $\begin{pmatrix} -2R\sin\alpha\cos\theta & -2R\cos\alpha\sin\theta \\ -2R\sin\alpha\sin\theta & 2R\cos\alpha\cos\theta \end{pmatrix}$ ed il modulo del determinate è $4R^2|\sin\alpha\cos\alpha|$. Riunendo il tutto si ottiene
$V(P) = 2\sigma\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^\alpha d\theta \frac{4R^2|\sin\alpha\cos\alpha|}{2R\cos\alpha} = 4\sigma R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\, \alpha\sin\alpha = 4\sigma R$. Si può notare che il potenziale è inferiore al potenziale nel centro del disco; fisicamente se ne ricava che il disco uniformemente carico non è una superficie equipotenziale.



11.8.1 L'integrale della massa è $m = a\int_0^L dt\sqrt{1 + \frac{L^2}{t^2}t^2}$ e la sostituzione $\frac{t}{L} = x$ dà $m = aL^3\int_0^1 dt\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}t^2} = aL^3\int_0^1 dt\, t\sqrt{1+t^2} = aL^3\frac{1}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}} - aL^3\frac{1}{3}$ (notare che la lunghezza del filo è infinita ed infatti $\int_0^1 dt\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$ non converge come integrale improprio).

Detta ora b_x la ascissa del baricentro si ha $mb_x = a\int_0^L dt\sqrt{1 + \frac{L^2}{t^2}t^3}$ e la solita sostituzione trasforma l'integrale in $aL^4\int_0^1 dt\,\sqrt{1+t^2}t^2$. Solo l'integrale dà $\frac{1}{3}\left[t(1+t^2)^{3/2}\right]\big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 dt\,(1+t^2)^{3/2} = \frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{u_o} du\,\cosh^4 u$ dove $1 = \sinh u_o$. Scriviamo $\frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{u_o} du\,\cosh^4 u = \frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 du\,\cosh^2 u(1+\sinh^2 u) = \frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\sinh^2 u\cosh^2 u + \frac{1}{2}u\right]\big|_0^{u_o} - \frac{1}{12}\int_0^{u_o} du\,\sinh^2(2u) = \frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right] - \frac{1}{12}\frac{1}{2}\int_0^{2u_o} dz\,\sinh^2 z$.
$\int_0^{2u_o} dz\,\sinh^2 z = \frac{1}{2}\sinh z\cosh z - \frac{1}{2}z\big|_0^{2u_o} = \frac{1}{2}\sinh(2u_o)\cosh(2u_o) - u_o =$
$= \sinh u_o\cosh u_o(\cosh^2 u_o + \sinh^2 u_o) - \ln(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}(1+2) - \ln(1+\sqrt{2})$ per cui mettendo tutto assieme si ha $\frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{24}\left(\sqrt{2}(1+2) - \ln(1+\sqrt{2})\right) = \frac{5}{8}(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}))$ e la ascissa del baricentro è $L\frac{5(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))}{(2^{3/2}-1)8}$

Detta ora b_y la ascissa del baricentro si ha $mb_y = aL\int_0^L dt\sqrt{1 + \frac{L^2}{t^2}t^2}\ln\frac{t}{L}$ e la solita sostituzione trasforma l'integrale in S$aL^4\int_0^1 dt\, t\sqrt{1+t^2}\ln(t)$ ed a parte il fattore aL^4 si ha $\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0^+}(1+t^2)\ln t\,\big|_\varepsilon^1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t}(1+t^2)^{3/2}$. Solo l'integrale dà
$\int_\varepsilon^{u_o} du\,\frac{\cosh u}{\sinh u}\cosh^3 u = \int_\varepsilon^{u_o}\frac{du}{\sinh u}\cosh^2 u(1+\sinh^2 u) = \int_\varepsilon^{u_o} du\,\frac{1+\sinh^2 u}{\sinh u} + \int_\varepsilon^{u_o} du\,\cosh^2 u\sinh u = \ln|\tanh\frac{u_o}{2}| - \ln|\tanh\frac{\varepsilon}{2}| + \cosh u_o - \cosh\varepsilon + \frac{1}{3}(\cosh^3 u_o - \cosh^3\varepsilon)$
Ora essendo $\lim_{\varepsilon\to 0^+}(1+\varepsilon^2)^{3/2}\ln\varepsilon - \ln\tanh\frac{\varepsilon}{2} = 0$ (si ponga attenzione al fatto che il limite è

una forma indeterminata) dell'integrale rimane
$-\frac{a}{3}\left(\ln\tanh\frac{u_o}{2}+\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\right)=-\frac{a}{3}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7-2\sqrt{2}}}\right)$ e la ordinata del baricentro è
$-L\frac{1}{2^{3/2}-1}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7-2\sqrt{2}}}\right)$ e notare che essa è negativa (come deve essere)

12.8.1 Eliminando z dalle due equazioni $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x+y+z=0$ si ottiene $2x^2+2y^2+2xy=a^2$ il cui membro di sinistra si può riscrivere come $(x,y)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\stackrel{\text{def}}{=}(\underline{x},M\underline{x})$
Diagonalizzando la matrice si ottiene $D\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$ e corrispondentemente si ha la trasformazione di coordinate (rotazione nel piano) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')\end{cases}$ (le cui colonne sono le coordinate degli autovettori ossia $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$) che trasforma la relazione fra x ed y in $3x'^2+y'^2=a^2$ (ellisse). Dunque l'area dell'insieme è $\pi\frac{a^2}{\sqrt{3}}$.
Giusto per completezza riportiamo per esteso il procedimento di diagonalizzazione della matrice M. Si costruisce la matrice $M-\lambda I$ e si pone zero il determinante ottenendo i valori $\lambda_1=3$, e $\lambda_2=1$. Corrispondentemente a λ_1 si trova l'autovettore associato ossia si risolve l'equazione $\begin{pmatrix}2-\lambda_1&1\\1&2-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^{(1)}\\v_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1^{(1)}\\v_2^{(1)}\end{pmatrix}$ (ossia $M\underline{v}^{(1)}=\lambda_1\underline{v}^{(1)}$) e si ottiene $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ (normalizzato a 1). Corrispondentemente a λ_2 si trova l'autovettore associato ossia si risolve l'equazione $\begin{pmatrix}2-\lambda_2&1\\1&2-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^{(2)}\\v_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1^{(2)}\\v_2^{(2)}\end{pmatrix}$ (ossia $M\underline{v}^{(2)}=\lambda_2\underline{v}^{(2)}$) e si ottiene $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$ (normalizzato a 1). Ora formiamo la matrice $U=\begin{pmatrix}v_1^{(1)}&v_1^{(2)}\\v_2^{(1)}&v_2^{(2)}\end{pmatrix}$ in modo tale che $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^{(1)}&v_1^{(2)}\\v_2^{(1)}&v_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3v_1^{(1)}&v_1^{(2)}\\3v_2^{(1)}&v_2^{(2)}\end{pmatrix}$ e poi consideriamo U^T ossia la matrice trasposta di U e verifichiamo che $U^TMU=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$. A questo punto definiamo il cambio di variabile $\underline{x}=U\underline{x}'$ ed il prodotto $(\underline{x},M\underline{x})$ diventa $(U\underline{x}',MU\underline{x}')=(\underline{x}',U^TMU\underline{x}')=(\underline{x}',D\underline{x}')=3x'^2+y'^2$

13.8.1 Il dominio della forma è $\mathbf{R}^2\backslash\{\underline{0}\}$ e scritta come $\omega(\underline{x})=a(\underline{x})dx+b(\underline{x})dy$ abbiamo $\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}$.
$\int_{\gamma_1}\omega$; parametrizziamo la circonferenza nel solito modo ed otteniamo
$\int_{\gamma_1}\omega=\int_0^1(\cos t-\sin t)(-\sin t)+(\cos t+\sin t)\cos t=2\pi$ ed è diverso da zero in quanto la curva non è contenibile in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio.
$\int_{\gamma_2}\omega=0$. Stavolta la curva è contenuta nel primo quadrante che è stellato e quindi semplicemente connesso.
$\int_{\gamma_3}\omega=2\pi$. Infatti detta $\gamma_4=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,:\,x^2+y^2=16\}$, si ha $\int_{\gamma_3}\omega=\int_{\gamma_4}\omega$ e $\int_{\gamma_4}\omega=\int_{\gamma_1}\omega$ usando la chiusura della forma in un opportuno dominio semplicemente connesso.
Le risposte alle altre due domande sono:
1) No; infatti se ciò fosse possibile allora ω sarebbe esatta e questo sappiamo che non è vero
2) Si; ad esempio si può prendere B come il primo quadrante e come f la funzione che si ottiene eseguendo il calcolo $\int_{\varphi_1}\omega+\int_{\varphi_2}\omega$ dove $\varphi_1(t)=\begin{cases}t & x_o\le t\le x\quad(x_o>0)\\ 0\end{cases}$ $\varphi_2(t)=\begin{cases}x & 0\le t\le y\\ t\end{cases}$ $\int_{\varphi_1}\omega=\int_{x_o}^x\frac{dt}{t}=\ln x-\ln x_o$, $\int_{\varphi_2}\omega=\int_0^y dt\frac{x+t}{x^2+t^2}=\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-$

$\frac{1}{2}\ln(x^2)$ e la loro somma dà $\arctan\frac{y}{x}+\ln(\sqrt{x^2+y^2})+c$. Quest'ultima espressione è uguale a $\ln\rho+\varphi+c$ che è perfettamente definita e di classe $C^1(B)$.
Si può estendere la funzione $\tilde f(x,y)\doteq\ln\rho+\varphi$ a tutto il piano escluso (ad esempio) il semiasse positivo delle ascisse nel seguente modo $f(x,y)=\begin{cases}\tilde f & x>0\quad y>0\\ \tilde f+\pi & x<0\\ \pi/2+\ln y & x=0\quad y>0\\ 3\pi/2+\ln(-y) & x=0\quad y<0\\ \tilde f+2\pi & x>0\quad y<0\end{cases}$
Certamente non la si può estendere a tutto il piano pretendendola C^1.

14.8.1 $\int\int_D dxdy\sin(x-y)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{-x}^{\frac{\pi}{2}}dy\sin(x-y)$ oppure $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\int_{-y}^{\frac{\pi}{2}}dy\sin(x-y)$ oppure si può osservare che D è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante (se $(x,y)\in D$ allora $(y,x)\in D$) ma la funzione cambia segno e quindi l'integrale è nullo.

15.8.1 Sia $K=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2\colon\ u\geq 0,\ v\geq 0\}$ e sia $\varphi(u,v)=(u,v,\frac{uv}{a})=(x,y,z)$. Il modulo della normale esterna alla superficie è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei minori di ordine 2 della matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{v}{a}&\frac{u}{a}\end{pmatrix}$ e quindi è $\sqrt{1+\frac{u^2+v^2}{a^2}}$. L'area è data da $\int\int_K dudv\sqrt{1+\frac{u^2+v^2}{a^2}}$ e passando a coordinate polari l'integrale diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^b d\rho\,\rho\sqrt{1+\frac{\rho^2}{a^2}}=\frac{\pi}{6}a^2\left((1+\frac{b^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}-1\right)$ e si può notare come per $a\to+\infty$ l'area tenda a dipendere solo da b

16.8.1 Indicando con $V=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\colon\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq\frac{xy}{a}\}$ Il volume è $\int\int\int_V dx\,dy\,dz$ ed integrando "per fili" abbiamo $\int\int_K\frac{xy}{a}$. Passando a coordinate polari l'integrale diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^b d\rho\,\rho\frac{\rho^2}{a}\cos\theta\sin\theta=\frac{b^4}{8a}$ ed in questo caso il volume tende a zero per $a\to+\infty$

17.8.1 Conviene cambiare variabili osservando che la relazione $x^2+\frac{5}{3}y^2-\frac{2}{\sqrt3}xy=2$ definisce una ellisse che bisogna ridurre a forma canonica attraverso il cambio di coordinate $\begin{cases}x=x'/2+y'\sqrt3/2\\ y=-x'\sqrt3/2+y'/2\end{cases}$ Tale cambio di coordinate è indotto dalla matrice $\begin{pmatrix}1&-1/\sqrt3\\-1/\sqrt3&5/3\end{pmatrix}$ (vedi esercizio **12.8.1**) i cui autovalori sono dati da $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=\frac{2}{3}$ ed i cui autovettori sono dati rispettivamente da $\underline{v}=\frac{1}{2}\binom{1}{-\sqrt3}$, $\underline{w}=\frac{1}{2}\binom{\sqrt3}{1}$. L'equazione della circonferenza diventa $z^2+(x')^2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})+(y')^2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})=z^2+(x')^2+(y')^2=3$ mentre l'ellisse diventa $(x')^2+\frac{1}{3}(y')^2=1$ e dall'esercizio **1.8.1** il risultato è $6\pi-12\arctan\sqrt2$

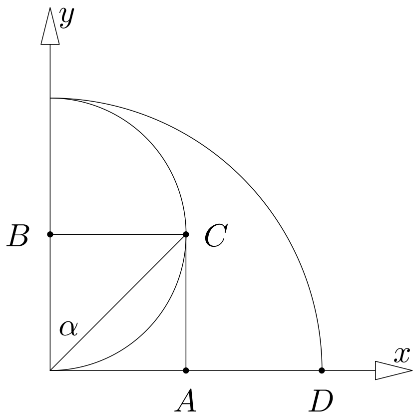
18.8.1 Eliminando z si ottiene $x^4-x^2+y^2\leq 0$ ossia $y^2\leq x^2-x^4$ e $x^2-x^4>0$ in quanto $|x|\leq 1$. Poiché è simmetrica rispetto all'asse delle x e delle y è sufficiente ridursi al caso $x\geq 0$ e $y\geq 0$. La superficie è data da $\varphi(u,v)=(u,v,1-u^2)$ e $u^4-u^2+v^2\leq 0$. Il modulo della normale esterna è dato da $\sqrt{1+4u^2}$ e l'integrale è $4\int_0^1\int_0^{u\sqrt{1-u^2}}dv\sqrt{1+4u^2}=4\int_0^1 du\,u\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+4u^2}$
La sostituzione $u^2=t$ trasforma l'integrale in $2\int_0^1\sqrt{1-t}\sqrt{1+4t}$ e l'ulteriore sostituzione $\sqrt{\frac{1-t}{1+4t}}=x$ manda l'integrale in $100\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+4x^2)^3}$. $\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+4x^2)^3}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{(1+4x^2)^2}-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{(1+4x^2)^3}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{(1+4x^2)^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{4(1+4x^2)^2}\Big|_0^1+\frac{3}{4}\int_0^1\frac{dx}{(1+4x^2)^2}\right)$. Quindi si ottiene $\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+4x^2)^3}=\frac{1}{16}\int_0^1\frac{dx}{(1+4x^2)^2}-\frac{1}{16}\frac{1}{25}$.
Ora essendo $\int\frac{dx}{(1+ax^2)^{n+1}}=\frac{x}{2n(1+ax^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{dx}{(1+ax^2)^n}$ si ha $\frac{1}{16}\int_0^1\frac{dx}{(1+4x^2)^2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\arctan 2$ e mettendo tutto assieme otteniamo il risultato.

19.8.1 Si tratta di trovare l'area di quella parte di superficie sferica i cui punti hanno coordinate verificanti la relazione $x^2+y^2-ry\le 0$. Le coordinate da introdurre sono le stesse della seconda parte dell'esercizio **10.8.1**. Ciò che si ottiene è $4\int\int_D d\sigma$ dove $D=\{\underline{x}\in \mathbf{R}^2\colon\ x^2+(y-\frac{r}{2})^2\le\frac{r^2}{4},\ x\ge 0\}$ e $d\sigma=\frac{dx\,dy\,r}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}$ e in D introduciamo le coordinate

$$\begin{cases} x=r\cos\alpha\cos\theta \\ y=r\cos\alpha\sin\theta \end{cases}\qquad 0\le\alpha\le\tfrac{\pi}{2},\quad 0\le\theta\le\alpha$$

e quindi l'integrale diventa $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\alpha\int_0^{\alpha}d\theta\frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}=2r^2(\pi-2)$

20.8.1 La superficie del solido è data da $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2\le r^2,\ x^2+y^2-ry=0\}\cup\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2=r^2,\ x^2+y^2-ry\le 0\}\doteq A\cup B$. L'area di B è stata già calcolata nel precedente esercizio. Dobbiamo calcolare l'area di A. Dal grafico che segue e che rappresenta la proiezione sul piano (x,y), primo quadrante, della superficie si ottiene



$$|OC|=r\cos\alpha,\qquad |OA|=\frac{1}{2}r\sin 2\alpha,$$
$$|OB|=r\cos^2\alpha,\qquad |OD|=r$$

La superficie che andiamo cercando è $\varphi(\alpha,u)=(x,y,z)=(\frac{1}{2}r\cos\alpha,r\cos^2\alpha,u)$ con $0\le\alpha\le\pi,\quad -r\sin\alpha\le u\le r\sin\alpha$. $|\varphi_\alpha\wedge\varphi_u|=r$ per cui l'area del sostegno della superficie è $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\alpha\int_{-r\sin\alpha}^{r\sin\alpha}du\,r+\int_0^{-\frac{\pi}{2}}d\alpha\int_{-r\sin\alpha}^{r\sin\alpha}du\,r=4r^2$. Sommando le aree di A e B si ottiene $2\pi r^2$.

21.8.1 Il primo cilindro ha come asse l'asse z. Il secondo ha come asse l'asse y. L'intersezione del volume in questione con il piano $x=x_0$ $-r\le y_0\le r$ è un quadrato di lato $2\sqrt{r^2-x_0^2}$ Lo si può vedere ponendo $x=0$ ed osservare che l'insieme di cui dobbiamo trovare il volume, si proietta sul piano $x=0$ nell'insieme $\{|y|\le r,\ |z|\le r\}$ che è un quadrato di lato $2r$. Per $0\le x_0\le r$ il lato è lungo $2\sqrt{r^2-x_0^2}$ Pertanto il volume è $\int_{-r}^{r}4(r^2-x^2)dx=\frac{16}{3}r^3$

Dobbiamo parametrizzare la superficie. Fissiamo $x\in[-r,r]$. Come sappiamo ciò determina sul piano $x=t$ un quadrato quindi fissiamo $y=\sqrt{r^2-t^2}$, $z=s$. Inoltre dovendo essere $x^2+z^2\le r^2$ si ha $-\sqrt{r^2-t^2}\le s\le\sqrt{r^2-t^2}$ Quella parametrizzata è solo la metà di quella che cerchiamo. L'altra metà è parametrizzata come $x\in[-r,r]$, $z=\sqrt{r^2-t^2}$, $y=s$, $-\sqrt{r^2-t^2}\le s\le\sqrt{r^2-t^2}$ dovendo essere $x^2+y^2\le r^2$. Quindi l'integrale è $2\displaystyle\int_{-r}^{r}dt\int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}}ds\frac{r}{\sqrt{r^2-t^2}}=8r^2$. Il 2 è dovuto al fatto che $y=\pm\sqrt{r^2-t^2}$.

Un secondo modo di calcolare la superficie è il seguente. Parametrizziamo il cilindro $x^2+y^2=r^2$ come $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $z=u$ la cui normale esterna è diretta parallelamente al piano (x,y) ed ha modulo r. $x^2+z^2\le r^2$ ci dà $u^2\le r^2\sin^2 t$. L'area che cerchiamo è $2\cdot r\cdot\int_0^{\pi}dt\int_{-r\sin t}^{r\sin t}du=8r^2$. Cosiderando anche l'altra superficie, quella appartenente al cilindro di equazione $x^2+z^2=r^2$ si ha il risultato.

22.8.1 Dobbiamo calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x})=z\underline{i}+x^2y\underline{j}+y^2z\underline{k}$ attraverso la superficie data da $\{\underline{x}:2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+x^2+y^2\}$. Se indichiamo con $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$ abbiamo

$2\rho = 1 + \rho^2$ da cui $\rho = 1$. La prima parte dell'esercizio consiste nel calcolare il flusso uscente lateralmente dalla superficie $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$. La normale esterna alla superficie è data da $\underline{i}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \underline{j}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \underline{k}$ per cui $\int\int_\Sigma (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}) d\sigma = \int\int_{x^2+y^2\leq 1} dx\, dy\, (4x + \frac{2x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y^2\sqrt{x^2+y^2})$ e passando a coordiante polari abbiamo $\int_0^1\int_0^{2\pi} d\rho\, d\theta\, (2\rho^2\cos\theta + 2\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta - 2\rho^4\sin^2\theta) = \frac{2}{5}\frac{\pi}{4} - \frac{21}{5}\pi = -\frac{3}{10}\pi$. La seconda parte consiste nel calcolare il flusso uscente dalla superficie $z = 1 + x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$. L'esecuzione di calcoli analighi conduce a

$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} dx\, dy\, (-2xz - 2x^2y^2 + y^2 z) = \int_0^1\int_0^{2\pi} d\rho\, d\theta\, (-2\rho\cos\theta - 2\rho^3\cos\theta - 2\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta + \rho^3\sin^2\theta + \rho^5\sin^2\theta) = -\frac{1}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{3}$. La somma dei contributi dà $\frac{\pi}{30}$

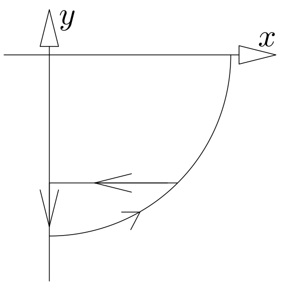
23.8.1 Essendo $div\underline{F} = 0$ si ha che $\int\int\int_V div\underline{F} dx\, dy\, dz = 0 = \int\int_S (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma + \int\int_{S'} (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma$ dove $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ z = xy, 1 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}\}$, $S' = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x = 1, -1 \leq y \leq 1, \frac{xy-|xy|}{2} \leq z \leq \frac{xy+|xy|}{2}\} \cup \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : z = 0, 1 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}\} \cup \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 = 2, x \geq 1, \frac{xy-|xy|}{2} \leq z \leq \frac{xy+|xy|}{2}\} = S_1' \cup S_2' \cup S_3'$.

Dobbiamo quindi calcolare $-\int\int_{S_1'} (\underline{F}, \underline{n}_1) d\sigma - \int\int_{S_2'} (\underline{F}, \underline{n}_2) d\sigma - \int\int_{S_3'} (\underline{F}, \underline{n}_3) d\sigma$.

$\underline{n}_2 = (0, 0, -1)$ oppure $(0, 0, 1)$ a seconda che sia $y \geq 0$ oppure $y \leq 0$ per cui $(\underline{F}, \underline{n}_2) = 0$ il terzo integrale è nullo. Parametrizziamo ora S_1'. $\varphi(u, v) = (x, y, z) = (1, u, v)$ con $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u$ e quindi $\underline{n}_1 = (-1, 0, 0)$. Ne segue che $-\int\int_{S_1'} (\underline{F}, \underline{n}_1) d\sigma = \int_{-1}^1 dy\, y \int_0^y dz = \frac{2}{3}$.

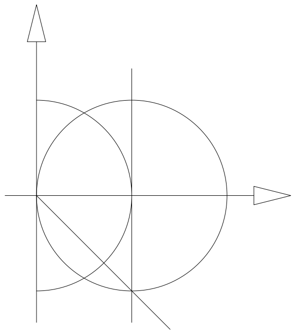
La parametrizzazione di S_3' è data da $\varphi(u, v) = (x, y, z) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, u)$ $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ $\frac{\sin(2\theta) - |\sin(2\theta)|}{2} \leq u \leq \frac{\sin(2\theta) + |\sin(2\theta)|}{2}$ $\underline{n}_3 = \sqrt{2}\cos\theta\underline{i} + \sqrt{2}\sin\theta\underline{j}$ e $-(\underline{F}, \underline{n}_3) = -2\sin(2\theta)$ da cui $-\int\int_{S_2'} (\underline{F}, \underline{n}_1) d\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sin(2\theta)} du (-2\sin\theta) = -\frac{\pi}{4}$ e quindi il risultato $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}$

24.8.1 Se indichiamo con γ la curva percorsa in senso antiorario che contorna l'insieme E, dal Lemma di Green si ottiene $\int\int_E \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy = \int_\gamma \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} dy$.



L'integrale sul tratto orizzontale dà zero in quanto $dy = 0$. Sul tratto verticale parametrizziamo nel seguente modo $\varphi(t) = (x, y) = \begin{cases} 0 & \\ -t & 1 \leq t \leq \sqrt{2} \end{cases}$ ed otteniamo $\int_1^{\sqrt{2}} (-dt)\frac{|t|}{t} = \sqrt{2} - 1$ mentre il tratto di circonferenza è parametrizzato al solito modo ottenendo $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \sqrt{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$ da cui il risultato $\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}\ln|\sin\theta|\Big|_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} = \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$

25.8.1 Usiamo il Lemma di Green ossia la formula $\int\int_A (f_x - g_y) dxdy = \int_{\partial A^+} (f dy + g dx)$ nel caso in cui $f(x, y) \equiv x$ e $g(x, y) \equiv -y$ e quindi $\int\int_A dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial A^+} (xdy - ydx)$.



Usiamo le coordinate polari centrate in $(1,0)$ per la parte di circonferenza con lo stesso centro e otteniamo e $\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{(2\pi)/3}(1+\cos\varphi)\cos\varphi+\sin^2\varphi)d\varphi = \frac{\sqrt{3}+2}{4}+\frac{7}{12}\pi$

Per il tratto di circonferenza con centro $(0,0)$ usiamo le coordinate centrate in $(0,0)$ ed abbiamo $\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{-\pi/3} d\varphi = -\frac{7}{24}\pi.$

Il tratto rettilineo dà come contributo zero in quanto $xdy - ydx \equiv 0$.

Volendo si potevano usare le coordinate polari $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ per descrivere ambedue gli archi di circonferenza. Dobbiamo trovare due funzioni $x(\varphi)$ e $y(\varphi)$ $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ tali che al variare di φ le due funzioni $x(\varphi)$e $y(\varphi)$ descrivono l'arco in questione.

La circonferenza di centro $(1,0)$ è tale che $r(\varphi) = 2\cos\varphi$ e l'arco che interessa il calcolo si parametrizza come $x = 2\cos^2\varphi$, $y = 2\cos\varphi\sin\varphi$ $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. L'integrale $\int_{\partial^+ D}(xdy - ydx)$ ristretta all'arco in questione dà $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^2\varphi d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos(2\varphi))d\varphi = \frac{\sqrt{3}+2}{4}+\frac{7}{12}\pi$

Il tratto di circonferenza di centro $(0,0)$ (percorso in senso orario se lo si pensa come facente parte della circonferenza di centro ma antiorario se lo si pensa come parte del bordo della regione di cui si vuole conoscere l'area) lo parametrizziamo come $x(\varphi) = \cos(-\alpha\varphi+\beta)$ $y(\varphi) = \sin(-\alpha\varphi+\beta)$ $-\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_0$ con $\alpha = \frac{7}{12}\frac{\pi}{\varphi_1-\varphi_0}$ $\beta = -\frac{\pi}{4} - \frac{7}{12}\frac{\pi\varphi_0}{\varphi_1-\varphi_0}$, $-\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ e $-\varphi_0$ qualsiasi valore purché maggiore di $-\varphi_1$. Potremmo eseguire l'integrale di linea con la parametrizzazione scelta ma è ben noto che il valore dell integrale coincide con il valore $-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = -\frac{7}{24}\pi$

Per la parametrizzazione del segmento scriviamo $x(\varphi) = \overline{\alpha}\varphi + \overline{\beta}$, $y(\varphi) = -\overline{\alpha}\varphi - \overline{\beta}$, $-\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_2$ e poi imponiamo che $\overline{\alpha}(-\varphi_0) + \overline{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\alpha}\varphi_2 + \overline{\beta} = 1$. La soluzione è chiaramente $\overline{\alpha} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\varphi_2+\varphi_0}$ e $\overline{\beta} = 1 - \overline{\alpha}\varphi_2$.

26.8.1 Il primo modo passa per il teorema della divergenza. $div\underline{V} = \underline{0}$ e quindi se indichiamo con $S^{\pm} = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = \pm 1\}$ abbiamo che $\int\int_\Sigma (\underline{V},\underline{n})d\sigma = \int\int\int_T div(\underline{V})dx\,dy\,dz - \int\int_{S^+}(\underline{V},\underline{n})d\sigma - \int\int_{S^-}(\underline{V},\underline{n})d\sigma$ dove T è il volume racchiuso da Σ e da $S^{\pm}$. Nel caso di $\int\int_{S^+}(\underline{V},\underline{n})d\sigma$ abbiamo $\underline{n} = (0,0,1)$ e quindi $(\underline{V},\underline{n})\,|_{S^+} = -2$ da cui $\int\int_{S^+}(\underline{V},\underline{n})d\sigma = -2\pi$. $(\underline{V},\underline{n})\,|_{S^-} = -2$ in quanto stavolta $\underline{n} = (0,0,-1)$. Quindi si ha $\int\int_{S^-}(\underline{V},\underline{n})d\sigma = -2\pi$. La somma dà -4π da cui il risultato.

Il secondo modo passa attraverso il Teorema di Stokes e la osservazione che $rot\underline{F} = \underline{V}$ dove $\underline{F} = -2xz\underline{j} + (-yx - zx + \frac{1}{2}y^2)\underline{k}$ (ad ogni modo si ricordi che $\underline{F}$ è definito a meno di un gradiente di una funzione). A questo punto bisogna descrivere Σ come la unione di due semicilindri. Il primo semicilindro è dato dalle relazioni $\Sigma^+ = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : y \ge 0, x^2+y^2 = 1, |z| \le 1\}$ ed il secondo da $\Sigma^- = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : y \le 0, x^2+y^2 = 1, |z| \le 1\}$. Indichiamo con $l^{\pm} = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x =$

$\pm 1, y=0, |z|\leq 1\}$. In Σ^+, l^+ è percorso andando dalle z negative alle positive e viceveresa l^-. In Σ^- è l'esatto contrario.

Parametrizziamo Σ^+ nel seguente modo $\varphi(u,\theta)=(x,y,z)=(\cos\theta,\sin\theta,u)$, $0\leq\theta\leq\pi$, $-1\leq u\leq 1$. Per il Teorema di Stokes $\int\int_{\Sigma^+}(\underline{V},\underline{n})d\sigma=\int_{\Gamma^+}\omega$ e $\Gamma^+=\partial\Sigma^+\doteq\tilde{\varphi}(\gamma^+)$ dove γ^+ è il quadrilatero di vertici A, B, E, F disegnato in figura e percorso in senso antiorario e $\tilde{\varphi}$ è una parametrizzazione del perimetro del quadrilatero ossia del sostegno si γ^+. È percorso in senso antiorario in quanto il verso della normale a γ^+ è quello per cui si percorre un arco di 90 gradi in senso antiorario per andare dalla normale alla tangente come identificato in figura. Il vettore normale a γ^+ disegnato in figura è $(1,0)$ mentre quello tangente nello stesso punto è $(0,1)$. Ora abbiamo $\begin{pmatrix}0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\theta\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mentre $\begin{pmatrix}0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\theta\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$. Il prodotto vettoriale dei due vettori appena trovati è dato da $-\cos\theta\underline{i}-\sin\theta\underline{j}$ ed il verso di tale vettore nello spazio $\mathbf{R}^3$ è diretto verso l'interno del cilindro per cui nella formula $\int\int_{\Sigma^+}(\underline{V},\underline{n})d\sigma$ la normale è diretta in modo opposto a ciò che noi vogliamo (ricordarsi che si chiede di calcolare il flusso uscente). Una volta calcolato l'integrale $\int_{\Gamma^+}\omega$ dobbiamo quindi cambiare segno per essere coerenti con ciò che cerchiamo. Tra l'altro si ha $\varphi_u\wedge\varphi_\theta=-\cos\theta\underline{i}-\sin\theta\underline{j}$ (come era da aspettarsi).

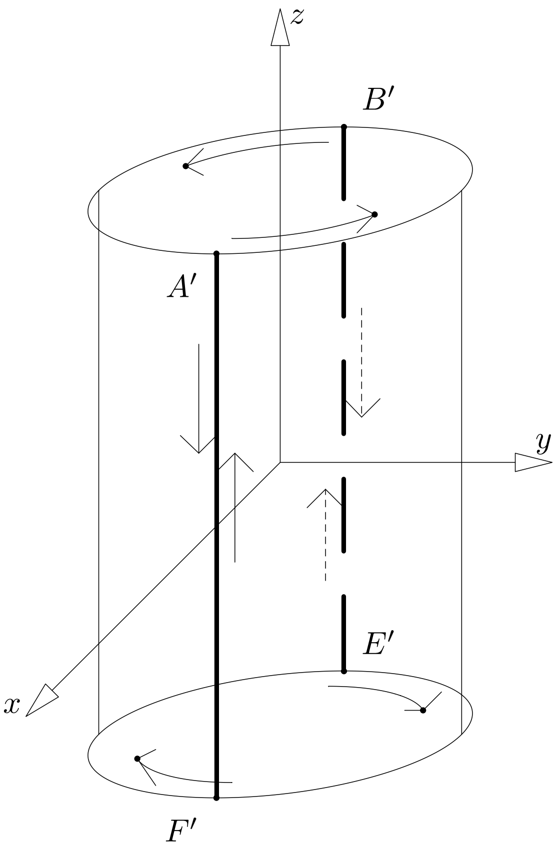
$\omega=-2xzdy+(-yz-zx+\frac{1}{2}y^2)dz$ e scriviamo $\int_{\Gamma^+}\omega$ come la somma di quattro contributi. $\int_{\Gamma^+}\omega=\int_{\partial S^{+,>}}\omega+\int_{l^+}\omega+\int_{S^{-,>}}\omega+\int_{l^-}\omega$.

$S^{+,>}=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\,:\,x^2+y^2=1,\,z=1,\,y\geq 0\}$, $S^{+,<}=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\,:\,x^2+y^2=1,\,z=1,\,y\leq 0\}$, $S^{-,>}=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\,:\,x^2+y^2=1,\,z=-1,\,y\geq 0\}$, $S^{-,<}=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\,:\,x^2+y^2=1,\,z=-1,\,y\leq 0\}$

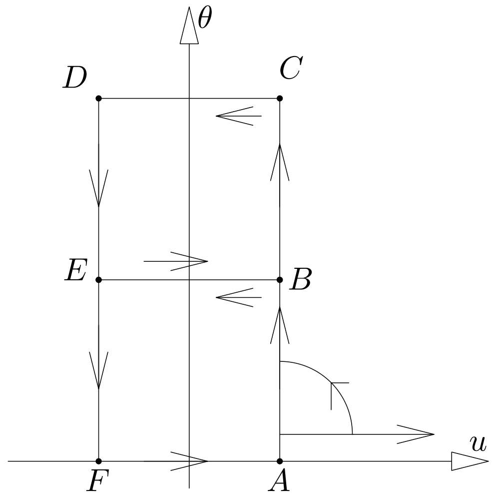
Ripetiamo ora lo stesso discorso per Σ^- con la stessa parametrizzazione ad eccezione del fatto che $\pi\leq\theta\leq 2\pi$ ed osserviamo che stavolta l^+ è percorso dal basso verso l'alto e viceversa per l^-. Dunque otteniamo

$\int\int_{\Sigma^+}(\underline{V},\underline{n})d\sigma+\int\int_{\Sigma^-}(\underline{V},\underline{n})d\sigma=\big\{\int_{\partial S^{+,>}}\omega+\int_{l^+}\omega+\int_{S^{-,>}}\omega+\int_{l^-}\omega\big\}+$

$+\big\{\int_{\partial S^{+,<}}\omega-\int_{l^+}\omega+\int_{S^{-,<}}\omega-\int_{l^-}\omega\big\}=\int_{\partial S^{+,>}}\omega+\int_{S^{-,>}}\omega+\int_{\partial S^{+,<}}\omega+\int_{S^{-,<}}\omega=\int_{\partial S^+}\omega+\int_{S^-}\omega=-4\pi$ (si osservi che sulla circoferenza la percorrenza è antioraria mentre su quella inferiore è oraria ma vi è la presenza di z che vale ± 1 a far si che i due integrali si sommino e non si sottraggano dando zero.



$A' \equiv (2,0,3), \quad B' \equiv (-2,0,3)$
$F' \equiv (2,0,-3), \quad E' \equiv (-2,0,-3)$



27.8.1 Non ripeteremo qui la dimostrazione data sul libro di provenienza dell'esercizio ma ne daremo una alternativa osservando che $\int_\varphi \omega = \int_\varphi d(xy) + \int_\varphi d(xz) + \int_\varphi z\,dy - \int_\varphi y\,dz = 0$ in quanto la curva è chiusa (da cui la nullità del primo addendo e del secondo) mentre per la somma del terzo e quarto è nulla in quanto sulla curva si ha $z = y$.
Una ulteriore dimostrazione passa attraverso il Teorema di Stokes. $\int_\varphi \omega = \int\int_S (\underline{rot}\underline{F}, \underline{n}) d\sigma$ dove S è una superficie o porzione opportunamente definita secondo le condizioni di applicabilità del Teorema. Ad esempio si può prendere la superficie $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon z = y\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ la cui normale esterna è data da $(0,-1,1)$ oppure $(0,1,-1)$ a seconda del verso. $\underline{rot}\underline{F} = -2\underline{i}$ da cui $(\underline{rot}\underline{F}, \underline{n}) = 0$ da cui il risultato. La superficie S che entra nel Teorema non è certo unica. Ad esempio una superficie che può apparire naturale è data da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq y\}$. Per parametrizzare tale superficie conviene ruotare di 45 gradi gli assi (z, y) ossia $\begin{cases} z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(z-y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(z+y) \end{cases}$ La superficie sferica in questione diventa $\{\underline{x}' \in \mathbf{R}^2 \colon z' \geq 0\ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1\}$ e parametrizzando in coordinare sferiche si ha $\begin{cases} x' = \sin\theta\cos\varphi \\ y' = \sin\theta\sin\varphi \\ z' = \cos\theta \end{cases}$ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $\underline{n} = \underline{i}\sin^2\theta\cos\varphi + \underline{j}\sin^2\theta\sin\varphi + \underline{k}\cos\theta\sin\theta$ e quindi integrando in $d\varphi$ di ha zero.

28.8.1 Essendo $div\underline{V} = 0$ *per ogni* $\underline{x} \in \mathbf{R}^3$ di può procedere in tre modi diversi
Primo modo (il più semplice): sia Σ la superficie data nell'esercizio, $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $T = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq z \leq c - c\frac{x^2}{a^2} - c\frac{y^2}{b^2}\}$, si ha $\int\int\int_T div\underline{V} dx\,dx\,dz = \int\int_\Sigma (\underline{V}, \underline{n}) d\sigma + \int\int_S (\underline{V}, \underline{n}) d\sigma = 0$ da cui $\int\int_\Sigma (\underline{V}, \underline{n}_\Sigma) d\sigma = -\int\int_S (\underline{V}, \underline{n}_S) d\sigma$. L'ultimo integrale è dato da $\int\int_S dx\,dy\,(-c)(x^2 + y^2)$ in quanto $\underline{n} = (0,0,-1)$ e $z = 0$. Cambiamo variabili $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$ da cui lo iacobiano $ab\rho$ e quindi l'integrale è $-c\int_0^1\int_0^{2\pi} ab\rho(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\rho^2 = -cab\frac{\pi}{4}(a^2 + b^2)$.
Secondo modo (lungo ed estenuante): si calcola il flusso direttamente

Si parametrizza Σ come $\varphi(u,v)=(x,y,z)=(u,v,c-\frac{c}{a^2}u^2-\frac{c}{b^2}v^2)$, $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\le 1$ $\varphi_u\wedge\varphi_v=(2\frac{c}{a^2}u)\underline{i}+(2\frac{c}{b^2}v)\underline{j}+\underline{k}$, $(\underline{V},\underline{n})=(\frac{2c}{a^2}+\frac{2c}{b^2})u^2v^2-(u^2+v^2)(2c-\frac{c}{a^2}u^2-\frac{c}{b^2}v^2)$ e quindi l'integrale è dato da

$\int\int_{u^2+v^2\le 1}du\,dv\ \left[(\frac{2c}{a^2}+\frac{2c}{b^2})u^2v^2-(u^2+v^2)(2c-\frac{c}{a^2}u^2-\frac{c}{b^2}v^2)\right]$. A questo punto cambiamo variabili come prima ed otteniamo

$$ab\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\left[(\frac{2c}{a^2}+\frac{2c}{b^2})a^2b^2\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\right]-ab\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta(2c-c\rho^2)\rho^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)$$

Il primo integrale è uguale a $a^3b^3\frac{1}{6}\frac{1}{4}(\frac{2c}{a^2}+\frac{2c}{b^2})\int_0^{2\pi}d\theta sin^2(2\theta)=\frac{\pi}{12}abc(b^2+a^2)$; il secondo integrale è uguale a $-abc\frac{1}{4}2\pi(a^2+b^2)$ mentre il terzo a $abc\frac{1}{6}\pi(a^2+b^2)$ e la somma dà il risultato.

Terzo modo; sfruttando il fatto che $div\underline{V}=0$ esiste $\underline{F}$ tale che $rot\underline{F}=\underline{V}$ e quindi ci si scrive $\int\int_\Sigma(\underline{V},\underline{n})d\sigma=\int\int_\Sigma(rot\underline{F},\underline{n})d\sigma=\int_\varphi\omega$ per una opportuna φ e ω che andiamo a trovare.

Dato un campo vettoriale $\underline{V}=(\alpha,\beta,\gamma)$ definito e continuo su tutto $\mathbf{R}^3$ tale che $div\underline{V}=0$, il campo vettoriale $\underline{F}=(a,b,c)$ definito da $a(\underline{x})\equiv 0$, $b(\underline{x})=\int_0^x dt\,\gamma(t,y,z)$,

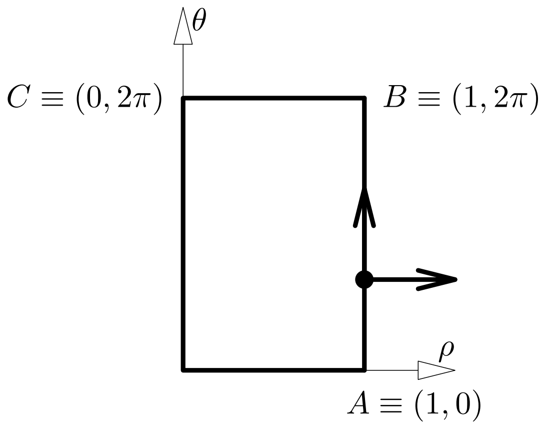
$c(\underline{x})=-\int_0^x dt\,\beta(t,y,z)+\int_0^y ds\,\alpha(0,s,z)$ è tale che $rot\underline{F}=\underline{V}$ (la formula analoga data sul libro Pagani–Salsa differisce dalla presente attraverso il gradiente di una funzione e questo non deve sorprendere in quanto $\underline{F}$ deve essere definita a meno di gradienti essendo $rot\underline{\partial}f\equiv 0$ qualunque sia f. Del resto la $\underline{F}$ va poi integrata su di una curva chiusa e quindi il contributo di un gradiente è nullo).

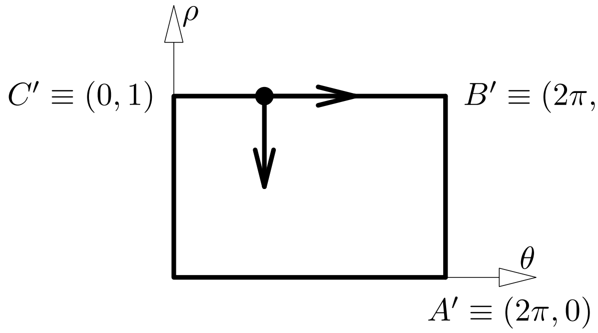
Una volta trovato $\underline{F}$ si definisce $\omega=F_1dx+F_2dy+F_3dz$ e si integra $\int_C\omega$ dove C è una curva il cui sostegno è l'ellisse che giace sul piano $z=0$ ed i cui semiassi sono dati rispettivamnte da a e b. Applichiamo la formula di Stokes $\int\int_\Sigma(rot\underline{F},\underline{n})d\sigma=\int_{\partial^+\Sigma}\omega$ dove l'ultimo integrale significa che percorriamo l'ellisse in senso antiorario e $\underline{n}$ prende la direzione compatibile con il verso di percorrenza della curva. Che $\underline{n}$ abbia o no il verso richiesto dall'esercizio va verificato a posteriori. Per decidere ciò diamo una parametrizzazione della superficie usando le coordinate polari (ellittiche) per cui $\varphi(\rho,\theta)=(x,y,z)=(a\rho\cos\theta,b\rho\sin\theta,c(1-\rho^2))$, $0\le\rho\le 1$ e $0\le\theta\le 2\pi$. Sul piano (ρ,θ) l'ellisse è data dal segmento $\rho=1$ e $0\le\theta\le 2\pi$ che è percorso in senso antiorario andando da $\theta=0$ verso $\theta=2\pi$ in quanto per andare dal versore normale alla curva verso il versore tangente si compie un angolo di 90 gradi in senso antiorario. Per avere il versore normale alla superfie bisogna effettuare il prodotto vettoriale fra i vettori $\begin{pmatrix}x_\rho & x_\theta\\ y_\rho & y_\theta\\ z_\rho & z_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}x_\rho & x_\theta\\ y_\rho & y_\theta\\ z_\rho & z_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ la cui terza componente è data da $\underline{k}=ab\rho$ che è diretta verso l'alto e quindi è quello che noi cerchiamo in termini di flusso uscente dalla superficie. È importante osservare che la concordanza di direzioni fra la normale alla superficie assegnata dalla parametrizzazione e quella che a noi serve nel problema va fatta a posteriori.

Dunque la parametrizzazione è quella giusta e per $\rho=1$ si ha la curva percorsa in senso antiorario. L'integrale curvilineo è $\int_C\bigl(-c(\frac{x^3}{3}+xy^2)\bigr)dy+(\frac{1}{2}x^2y^2)\cdot 0$ in quanto $dz=0$. L'esecuzione degli integrali porta al risultato. Per fare presto conviene ricordare che

$\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2 n\theta=\pi$ e che $\cos^4\theta=\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)=\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2(2\theta)$

Nel secondo grafico si è invertito l'ordine delle variabili ρ e θ. In questo caso il versore normale coerente con la percorrenza antioraria della curva è $(0,-1)$ ed infatti la terza componente di $\begin{pmatrix}x_\rho & x_\theta\\ y_\rho & y_\theta\\ z_\rho & z_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x_\rho & x_\theta\\ y_\rho & y_\theta\\ z_\rho & z_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ è $\underline{k}ab\rho$ come la precedente





29.8.1 Anche qui si può operare in modi diversi.

Primo modo; La forma differenziale si può scrivere come $\omega = yzdx + \alpha d(yz)$ e quindi $\int_\varphi (d(yz)$ è zero *essendo la curva chiusa*. Rimane $\omega' = yzdx$ ma lungo la curva data o $y = 0$, o $z = 0$, o x è costante per cui $dx = 0$ e quindi l'integrale della forma vale zero. Le considerazioni svolte per ω' però prescindono dal fatto che la curva sia chiusa.

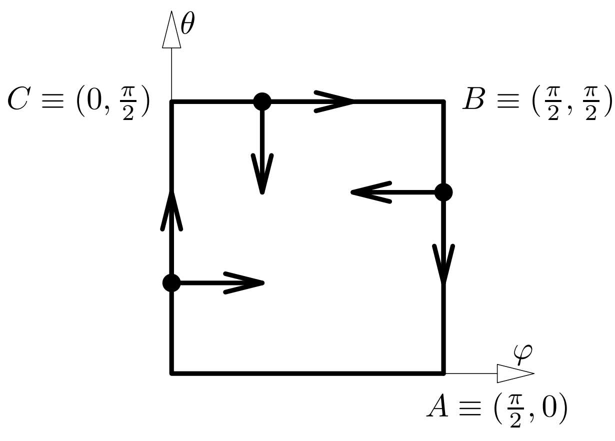
Secondo modo

Ci si calcola $\int_\gamma \omega$ lungo ciascuna delle curve scritte. Lungo la prima l'integrale è zero in quanto $z = 0$ oppure z è costante. Lungo la terza si ha la stessa situazione con y al posto di z e lungo la seconda l'integrale diventa la somma di due integrali uguali in modulo ed opposti in segno

Terzo modo

Si calcola il rotore del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = (yz, \alpha z, \alpha y)$ ottenedo $rot\underline{F} = (0, y, -z)$ ed usando il Teorema di Stokes si ha $\int_{\gamma^+} \omega = \int\int_S (rot\underline{F}, \underline{n})d\sigma$ dove S è una superficie il cui bordo γ^+ è percorso in senso antiorario (nel senso che la controimmagine della curva attraverso la parametrizzazione della superficie è percorsa in senso antiorario). Come superficie prendiamo $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0\}$ e la parametrizzazione è $\varphi(\theta, \phi)\colon [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to S$, $\varphi(\theta, \phi) = (x, y, z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ e la normale esterna è $\underline{n} = \underline{i}\sin^2\theta\cos\varphi + \underline{j}\sin^2\theta\sin\varphi + \underline{k}\cos\theta\sin\theta$ (si vede che è esterna dal fatto che la terza componente è sempre positiva o nulla nel dominio di θ e φ). $\int\int_S (rot\underline{F}, \underline{n})d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, (\sin^3\theta\sin^2\varphi - \cos^2\theta\sin\theta) = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta(1 - \cos^2\theta) - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos^2\theta\sin\theta = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \sin\theta - \frac{\pi}{4} = 0$. Naturalmente la parametrizzazione scelta della superficie è compatibile con la percorrenza antioraria delle curve su ciascun piano coordinato.

Anche qui un disegno aiuta a capire la relazione che c'é fra parametrizzazione e verso di percorrenza di una curva.



Partendo dall'origine la prima coppia di vettori è $(1, 0)$ $(0, 1)$, la seconda è $(0, -1)$ $(1, 0)$ e la terza $(-1, 0)$ $0, -1)$. Se ora si indica con M la matrice $\begin{pmatrix} x_\theta & x_\varphi \\ y_\theta & y_\varphi \\ z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}$ si ha che $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

è uguale a $M\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\wedge M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ed uguale a $M\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\wedge M\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ e tutti e tre sono uguali a $\underline{n}$. Inoltre la base del rettangolo è costituita da punti per i quali $\theta=0$ e quindi nello spazio $\mathbf{R}^3$ corrispondono tutti al punto di coordinate $(0,0,1)$.

30.8.1 Dividendo per y^2 e ponendo $z=-\frac{1}{y}$ si trasforma l'equazione in $z'-\frac{z}{x}=-\frac{\ln x}{x}$ che è una equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti. La omogenea è data da $z'-\frac{z}{x}=0$ da cui $z=cx$. Se proprio si vuole essere dettagliati si può separare le variabili ottenendo $\frac{z'}{z}=\frac{1}{x}$ e quindi $\ln|z|=\ln|x|+a$ da cui $|z|=e^a\cdot|x|$ e quindi $z=c|x|$ (la liberazione dal modulo comporterebbe $z=\pm e^a x$ ma la soluzione generale della omogenea associata è definita a meno di una costante e quindi basta mettere una costante davanti che congloba il segno). Una volta in possesso della soluzione della omogenea associata usiamo la variazione delle costanti e poniamo $\varphi(x)\doteq b(x)x$ e sostituiamo ottenendo $b'(x)x+b(x)-b(x)=-\frac{\ln x}{x}$ ossia $b'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$ ossia $b(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$ (la costante non serve in quanto una costante c'è già). A questo punto la soluzione generale della equazione è $z(x)=cx+\ln x+1$. Ove anche si fosse scritto $b(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+b'$ si sarebbe ottenuto $z(x)=cx+\ln x+1+b'x$ che può riscriversi come $z(x)=(c+b')x+\ln x+1=c'x+\ln x+1$ dove $c'=c+b$ (alla fine una e solo una deve essere la costante assolutamente necessaria e questo fatto anzi costituisce una forma di controllo a posteriori della bontà dei calcoli fatti). $y(x)=\frac{-1}{cx+\ln x+1}$ ed ora imponiamo che $y(1)=1$ da cui $c=-2$ e quindi $y(e)=\frac{1}{2e-2}$
Per la equazione in z si sarebbe potuto usare direttamente la formula generale delle equazioni lineari del primo ordine che però conduce esattamente alla formula cui si è appena arrivati.

31.8.1 si pone $y'(x)=v(x)$ e quindi l'equazione diventa $v'-\frac{v}{x}=x$. Come prima la equazione omogenea ha soluzione $v(x)=cx$ e quindi, detta come prima $\varphi(x)=b(x)x$ la soluzione della non omogenea si ha $b'(x)=1$ da cui $b(x)=x$. La soluzione generale della non omogenea è quindi $v(x)=cx+x^2$ (una sola costante). $y(x)=c\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c_1$ (due costanti essendo la equazione del secondo ordine)

32.8.1 la massa del filo è
$\int_0^{2\pi}dt\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,ba|1-\cos t|=a^2b\int_0^{2\pi}dt\sqrt{2-2\cos t}\,2\sin^2\frac{t}{2}=$
$=a^2b\int_0^{2\pi}dt2|\sin\frac{t}{2}|2\sin^2\frac{t}{2}=4a^2b\int_0^{2\pi}dt\sin^3\frac{t}{2}$ (si è usato il fatto che $1-\cos t\ge 0$ e che $\sin\frac{t}{2}\ge 0$ per $0\le t\le 2\pi$). L'integrale diventa $8a^2b\int_0^{\pi}dt\sin^3 t=8a^2b\int_0^{\pi}dt\sin t(1-\cos^2 t)=16a^2b+\frac{8}{3}a^2b\cos^3 t\,|_0^{\pi}=\frac{32}{3}a^2b$

33.8.1 L'integrale è $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\sqrt{1-x-y}=\int_0^1 dx\frac{2}{3}(1-x-y)^{3/2}\,|_{1-x}^{0}=\int_0^1 dx\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}=\frac{2}{3}\frac{2}{5}(1-x-y)^{5/2}\,|_1^0=\frac{4}{15}$

34.8.1 Anche in questo caso, come nell'esercizio **28.8.1**, si può procedere in tre modi.
Primo modo Sia $B=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\ :\ x^2+4y^2=1\}$ e sia $\tilde{\Sigma}$ il volume racchiuso da Σ e da B. Essendo $div\underline{V}=0$ si ha che $\int\int\int_{\tilde{\Sigma}}div\underline{V}dx\,dy\,dz=0=\int\int_{\Sigma}(\underline{V},\underline{n})d\sigma+\int\int_B(\underline{V},\underline{n})d\sigma$ da cui $-\int\int_{\Sigma}(\underline{V},\underline{n})d\sigma=\int\int_B(\underline{V},\underline{n})d\sigma$ e $-\int\int_{\Sigma}(\underline{V},\underline{n})d\sigma$ è esattamente l'integrale che vogliamo in quanto il vettore $\underline{n}$ che compare nella formula è diretto verso l'esterno mentre noi vogliamo il flusso entrante e quindi la direzione della normale deve essere opposta a quella che compare nel teorema della divergenza. $\int\int_B(\underline{V},\underline{n})d\sigma=\int\int_{x^2+4y^2\le 1}dx\,dy=\frac{\pi}{2}$
Secondo modo Parametrizziamo Σ come $\varphi(u,v)=(x,y,z)=(u,v,1-u^2-4v^2)$ da cui $\underline{n}=2u\underline{i}+8v\underline{j}+\underline{k}$ e la direzione che si vuole non è quella dettata dalla parametrizzazione scelta. Insistendo con il vettore $\underline{n}$ trovato alla fine bisognerà cambiare segno. $(\underline{V},\underline{n})=2u^2-2u^4-8v^2+32v^4-1$ e l'integrale voluto è $\int\int_{u^2+4v^2\le 1}(2u^2-2u^4-8v^2+32v^4-1)du\,dv$. Siccome $\int\int_{u^2+4v^2\le 1}(2u^2-2u^4-8v^2+32v^4)du\,dv=0$ ciò che rimane è $\int\int_{u^2+4v^2\le 1}(-1)du\,dv=-\frac{\pi}{2}$ da

cui il risultato.

Terzo modo $rot\underline{F} = \underline{V}$ dove $\underline{F} = (0, -x, xyz)$ e detta $\omega = -xdy + xyzdz$ dobbiamo eseguire $\int_\gamma \omega$ dove γ è l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$ percorsa in senso antiorario (il verso che serve a noi è quello orario). Parametrizzando l'ellisse come $x = \cos\theta, y = \frac{1}{2}\sin\theta$, dell'integrale sopravvive solo il contributo $-\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2}\cos^2\theta = -\frac{\pi}{2}$ e da cui il risultato.

35.8.1 La equazione è a variabili separabili per cui la soluzione è data da $\int dy \frac{1}{y^2} = \int dx e^x + c$ da cui $-\frac{1}{y} = e^x + c \ \Rightarrow \ y = -\frac{1}{e^x + c}$. La condizione iniziale dà $1 = -\frac{1}{c+1}$ ossia $c = -2$ e quindi $y = \frac{1}{2 - e^x}$

36.8.1 L'integrale si risolve passando a coordinate polari. Nelle coordiante (ρ, θ) il dominio è $1 \le \rho \le \sqrt{3}$ e $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ (normale rispetto a tutti e due gli assi) e l'integrale è $\int_1^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \rho \arctan\rho$ che integrato per parti dà

$\frac{\pi}{6}\Big(\frac{1}{2}\rho^2 \arctan\rho\Big|_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} d\rho (\frac{\rho^2}{1+\rho^2})\Big)$; $\int_1^{\sqrt{3}} d\rho (\frac{\rho^2}{1+\rho^2}) =$

$= \int_1^{\sqrt{3}} d\rho - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{d\rho}{1+\rho^2} = \sqrt{3} - 1 - (\arctan\sqrt{3} - \arctan 1)$. Dunque si ottiene $\frac{\pi}{6}\big(\frac{1}{2} 3 \arctan\sqrt{3} - \frac{1}{2}\arctan 1\big) - \frac{\pi}{12}(\sqrt{3} - 1) + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{12}(\frac{5}{6}\pi + 1 - \sqrt{3})$

37.8.1 La prima cosa da fare è trovare la proiezione sul piano (x, y) della superficie di cui vogliamo l'area. Eliminando z fra le due equazioni si perviene a $(x^2+y^2)^2 + 4a^2(x^2+y^2) - 12a^4 = 0$ ossia $\rho = a\sqrt{2}$. In altre parole la proiezione è costituita dal cerchio di centro l'origine e raggio $a\sqrt{2}$. La superficie che andiamo cercando è quindi quella parte di sfera di raggio $a\sqrt{3}$ che si proietta nel cerchio appena trovato sul piano (x, y). La formula dell'area è quindi (vedi esercizio **1.8.1** e si sottintende una parametrizzazione della sfera attraverso l'adozione di coordinate cartesiane nel seguente modo $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{3a^2 - u^2 - v^2}$) $\int\int_E du\, dv \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - u^2 - v^2}}$ ed E è il cerchio trovato sul piano (u, v). Infatti indicando $\underline{r}(u, v)\colon D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $D = \{(x, y)\colon u^2 + v^2 \le 2a^2\}$, $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3) = (u, v, \sqrt{3a^2 - u^2 - v^2})$; $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - u^2 - v^2}} = |\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v|$. Alla stessa conclusione si giunge se si indica con M la matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{3a^2-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{3a^2-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$ e si considera la radice quadrata della somma dei quadrati dei minori di ordine 2.

Passando a coordinate polari si ottiene $a\sqrt{3}\int_0^{a\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho}{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} = 2\sqrt{3}\pi a^2(\sqrt{3} - 1)$.

Se si fosse parametrizzata la sfera con l'uso di coordinate polari sferiche si sarebbe ottenuto (vedi esercizio **8.8.1** laddove $x = a\sqrt{3}\sin\theta\cos\varphi$, $x = a\sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi$, $z = a\sqrt{3}\cos\theta$) con $0 \le \theta \le \theta_0$ e $\tan\theta_0 = \sqrt{2}$, e $0 \le \varphi \le 2\pi$). L'integrale è dato da $3a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} d\theta \sin\theta = 6\pi a^2(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\pi\sqrt{3}a^2(\sqrt{3} - 1)$

Cambiando parametrizzazione della sfera vi è un terzo modo procedere ossia $\underline{r}(u, v)\colon D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3) = (\sqrt{3a^2 - z^2}\cos\theta, \sqrt{3a^2 - z^2}\sin\theta, z)$ $D = \{(\theta, z)\colon 0 \le \theta \le 2\pi, a \le z \le a\sqrt{3}\}$. $|\underline{r}_\theta \wedge \underline{r}_z| = 3a^2$ e l'integrale diventa $\int_a^{a\sqrt{3}} dz \int_0^{2\pi} d\theta a\sqrt{3} = 2\pi a^2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$

Va notato come l'uso delle due ultime parametrizzazioni consente di integrare su insiemi D costituiti da rettangoli mentre nel caso della prima parametrizzazione D è un cerchio e quindi si è costretti dalla geometria del problema ad usare coordinate polari sul piano (x, y)

38.8.1 La forma è definita nello spazio (x, y, z) ma la curva interessata dagli integrali ha $z = costante$ oltre ad essere chiusa. Per tali ragioni $\int_\gamma z dz = 0$ e per quanto riguarda ω_2 si può scrivere $\omega_2 = d(x^2y^2) + xdz$. Ne segue dalla chiusura della curva che l'integrale è zero. Nel caso di ω_1 si ha $\int_\gamma 2x^2y dx = -8a^4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = -2a^4\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)d\theta = -2\pi a^4$ mentre

$\int_\gamma ydy = \int_\gamma zdz = 0$

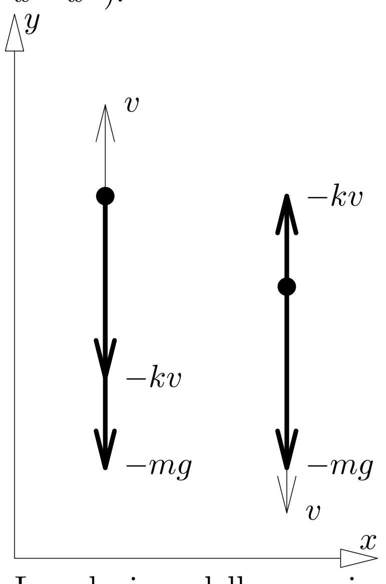
39.8.1 La equazione omogenea associata ha come soluzione $q(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$. Senza passare attraverso la variazione delle costanti si vede subito che una soluzione della non omogenea associata è data da e^{-x} e quindi il teorema asserente che la più generale soluzione di un equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è data dalla somma della più generale soluzione della omogenea associata e di una particolare soluzione della non omogenea, ci consente di dire che la più generale soluzione della equazione è $y(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x + e^{-x}$. L'imposizione della condizione del problema conduce a $c_1 = c_2 = 0$ da cui $y(x) = e^{-x}$.
Ad ogni modo eseguiamo lo stesso il calcolo completo che passa attraverso la variazione delle costanti. Prima di tutto bisogna costruire la matrice wronskiana e la sua inversa.

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x \cos x - e^x \sin x & e^x \sin x + e^x \cos x \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x & -e^{-x} \sin x \\ -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x & e^{-x} \cos x \end{pmatrix}$$

e dalla teoria sappiamo che $\varphi(x) = c_1(x) e^x \cos x + c_2(x) e^x \sin x$ è la soluzione particolare della equazione differenziale dove $\underline{c}(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione differenziale lineare del primo ordine $\underline{c}'(x) = W^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 5e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5e^{-2x} \sin x \\ 5e^{-2x} \cos x \end{pmatrix}$ da cui $\underline{c}(x) = \begin{pmatrix} (\cos x + 2 \sin x) e^{-2x} \\ (-2 \cos x + \sin x) e^{-2x} \end{pmatrix}$ da cui $\varphi(x) = e^{-x}$.

40.8.1 Cominciamo dal primo caso. Nella prima fase il sasso sale verso l'alto ed è la figura di sinistra. Nella seconda fase il sasso cade verso il basso ed è la figura di destra. In un sistema di assi cartesiani in cui l'asse delle ordinate è rivolto verso l'alto come in figura (si indica $\dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} x'$ e $\ddot{x} \stackrel{\text{def}}{=} x''$).

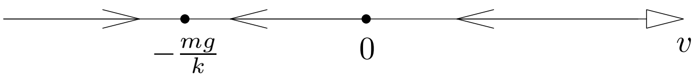


$$m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}, \qquad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = y_o > 0$$
$$m\ddot{x} = 0 \qquad x(0) = x_o, \quad \dot{x}(0) = 0$$

La soluzione delle equazioni del moto è semplice. Lungo l'asse delle x non vi sono forze e quindi la soluzione è data da $x(t) = x_o + \tilde{x}_o t$. Si può verificare che la $x(t)$ data soddisfa la equazione differenziale $\ddot{x} = 0$ e le condizioni iniziali $x(0) = x_o$, $x'(0) = \tilde{x}_o$. Immaginiamo ora di lanciare il sasso dal punto di coordinate $(x_o, 0)$ con componente della velocità lungo l'asse delle x nulla. In tal modo $x(t) = x_o$ per ogni t. Sull'asse delle y abbiamo una equazione differenziale lineare del primo ordine per $\dot{y}(t)$.

L'equazione $\begin{cases} \dot{v} = -g - \dfrac{k}{m} v \\ v(0) = v_o > 0 \end{cases}$ si risolve immediatamente. La omogenea è data da $\dot{q} + \frac{k}{m} q = 0$ ed ha soluzione $q(t) = ce^{-\frac{k}{m}t}$. Una soluzione della non omogenea è data da $v(t) = -\frac{mg}{k}$ e quindi la soluzione generale è data da $v(t) = ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$. La velocità iniziale del sasso è v_o per cui abbiamo $c - \frac{mg}{k} = v_o$ da cui $c = v_o + \frac{mg}{k}$ e quindi $v(t) = v_o e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}(-1 + e^{-\frac{k}{m}t})$. Il valore $v(t) = 0$ lo si raggiunge per $t_o = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg}{v_o k + mg}$ ossia $e^{-\frac{k}{m}t_o} = \frac{mg}{v_o k + mg}$. $y(t_o) = y_o + \int_o^{t_o} \dot{y}(\tau)d\tau = 0 + \int_0^{t_o} v(\tau)d\tau = \frac{m}{k}(v_o - gt_o)$

Notare che per $t \to +\infty$ la velocità tende al valore limite $-\frac{mg}{k}$ che è indipendente dal valore v_o. Alla stessa velocità limite giunge il sasso se lo si lancia dall'alto verso il basso con una qualsiasi velocità iniziale. Tale comportamento è ben comprensibile a partire dalla seguente rappresentazione (diagramma di fase) della equazione differenziale $\dot{v} = -g - \frac{k}{m}v$



Il disegno va inteso nel senso che in ogni punto dell'asse v la freccia indica il segno della espressione $-g - \frac{k}{m}v$ e quindi la sua tendenza ad andare verso le v più grandi oppure più piccole. In altre parole il verso della freccia indica il segno di $\dot{v}$. Si vede chiaramente che qualunque sia il dato iniziale di v ossia v_o, il sistema tende ad andare verso il punto $v_o = -\frac{mg}{k}$. Non lo si può oltrepassare in quanto se il dato iniziale fosse esattamente $-\frac{mg}{k}$ la soluzione della equazione differenziale sarebbe esattamente $v(t) \equiv -\frac{mg}{k}$. Per il teorema di unicità , una soluzione $v(t)$ che abbia un qualsiasi dato iniziale diverso da $-\frac{mg}{k}$, non può intersecarsi con una soluzione che abbia un altro dato iniziale e quindi le soluzioni della equazione differenziale sono divise in tre gruppi. Nel primo gruppo vi sono quelle che hanno $v_o > -\frac{mg}{k}$ e fisicamente sono quelle in cui il sasso viene lanciato verso l'alto oppure verso il basso ma con una velocità più grande di $-\frac{mg}{k}$. Alla fine il sasso tende a cadere e ad andare verso la velocità limite. Nel secondo gruppo vi sono le soluzioni in cui il sasso viene lanciato verso il basso anche con velocità molto grande in modulo ma negativa (quando $v_o < -\frac{mg}{k}$) ed in questo caso il sasso rallenta la sua corsa per andare verso la velocità limite. Nel terzo gruppo vi è l'unica soluzione in cui il sasso viene lanciato verso il basso esattamente con velocità $-\frac{mg}{k}$ e non cambierà mai la sua velocità .

È interessante eseguire un limite per vedere se i calcoli conducono a soluzioni note. Ad esempio se $k = 0$ la soluzione è quella che si ottiene dal fatto che agisce solamente la gravitazione. La equazione del moto sarebbe $\dot{v} = -g$ da cui $v(t) = -gt + v_o$ e la velocita si annulla per $t_o = \frac{v_o}{g}$. L'altezza è data da $y(t) = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$ e $y(t_o) = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g}$.

Ora, estraendo il polinomio di Taylor al secondo ordine della funzione $-\frac{m}{k}\ln\frac{mg}{v_o k + mg}$ si ottiene $\frac{v_o}{g} - \frac{m}{k}\frac{1}{2}\frac{v_o^2 k^2}{m^2 g^2}$ e quindi $\frac{m}{k}(v_o - gt_o)$ diventa (al secondo ordine in $k \to 0$) $\frac{m}{k}v_o - \frac{mg}{k}(\frac{v_o}{g} - \frac{m}{k}\frac{1}{2}\frac{v_o^2 k^2}{m^2 g^2}) = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g}$

Esaminiamo ora il secondo problema. Disegnamo gli assi cartesiani come nel caso precedente. I passi sono i seguenti: 1) nella fase di salita calcoliamo a quale altezza giunge il sasso e quindi calcoliamo l'altezza alla quale la velocità di salita si annulla 2) nella fase di discesa calcoliamo a quale velocità la distanza dall'asse x vale zero ossia con quale velocità il sasso ricade al suolo. Prima ancora di cominciare sappiamo che il risultato deve avere due caratteristiche. La prima è che se la velocità iniziale (quella con cui viene lanciato verso l'alto) è nulla allora il risultato è chiaramente zero (non c'è lancio alcuno). La seconda è che se non ci fosse attrito con l'aria la velocità con cui toccherebbe il suolo sarebbe quella iniziale di lancio e per questo basta invocare la conservazione dell'energia (si può eseguire il calcolo analogo a quello che segue ottenendone il risultato).

Nella fase di salita l'equazione differenziale che governa il moto è (cerchiamo a quale altezza giunge il sasso) $\begin{cases} m\ddot{y} = -mg - m\dot{y}^2 \\ \dot{y}(0) = v_o > 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}$ (si osservi che il segno del termine proporzionale è negativo). Essendo l'equazione mancante del termine in y si può riscrivere l'equazione per

$\dot{y} = v$: $\begin{cases} \dot{v} = -g - \dfrac{k}{m}v^2 \\ v(0) = v_o > 0 \end{cases}$ ed integrare. L'equazione è a variabili separabili (non essendo lineare non si può applicare la teoria generale delle equazioni lineari) ed quindi $-\int_{v_o}^{0} \frac{dv}{1+\frac{k}{mg}v^2} = \int_0^{t_o} dt$ da cui $\alpha t_o = \frac{1}{g}\arctan \alpha v_o$ dove $\alpha = \sqrt{\frac{k}{mg}}$. Inoltre $v(t) = \frac{1}{\alpha}\tan(\arctan(\alpha v_o) - g\alpha t)$; $y(t) = 0 + \int_0^{t_0} d\tau v(\tau) = -\frac{1}{g\alpha^2}\ln\cos(\arctan(\alpha v_o)) - \ln\cos(\arctan(\alpha v_o) - t_o g\alpha) = -\frac{1}{g\alpha^2}\ln\cos(\arctan(\alpha v_o))$. Quindi abbiamo $y(t_o) = y_o = \frac{1}{2g\alpha^2}\ln(1+\alpha^2 v_o^2)$.

Anche in questa fase è interessante osservare che per $k \to 0$ $y(t_o) \to \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g}$

Nella fase di caduta la equazione del moto è $\begin{cases} m\ddot{y} = -mg + k\dot{y}^2 \\ \dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = y_o \end{cases}$ e some al solito per v la equazione è $\begin{cases} m\dot{v} = -mg + kv^2 \\ v(0) \doteq v_o = 0 \end{cases}$ la cui soluzione è $\frac{|v-\overline{\alpha}|}{|v_o-\overline{\alpha}|}\frac{|v_o+\overline{\alpha}|}{|v+\overline{\alpha}|} = e^{pt}$ dove $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ e $p = 2\sqrt{\frac{gk}{m}}$

Dunque abbiamo $\frac{|v-\overline{\alpha}|}{|v+\overline{\alpha}|} = e^{pt}$ ed inoltre $v - \overline{\alpha} < 0$ mentre $v + \overline{\alpha} > 0$ (perché?). In tal modo $v(t) = -\overline{\alpha}\tanh(\frac{1}{2}pt)$ (notare che è negativa per ogni valore di t). Calcoliamo ora a quale istante di tempo il sasso tocca il suolo. $y(t) = y_o + \int_0^T dtv(t) = 0$ è la equazione da risolvere. Quello che si ottiene è $\sqrt{1+\alpha^2 v_o^2} = \cosh(\frac{1}{2}pT)$ da cui $T = \frac{1}{2}\mathrm{sett}\cosh(\sqrt{1+\alpha^2 v_o^2})$ e quindi $v(T) = -\overline{\alpha}\tan(\mathrm{sett}\cosh\sqrt{1+\alpha^2 v_o^2})) = -\sqrt{\frac{mgv_o^2}{mg+kv_o^2}}$. Va notato che se $v_o = 0$ allora $v(T) = 0$ in quanto $y(t_o) = 0$. Se d'altro canto $k = 0$ allora $v(T) = v_o$ in quanto la conservazione dell'energia ciò impone.

41.8.1 In coordinate polari l'integrale diventa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 d\rho\rho 2\ln\rho = 2\pi\ln 2 - \frac{3}{4}\pi$

42.8.1 Se si parametrizza la superficie in coordinate cartesiane si ottiene $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)\colon D \to \mathbf{R}^3$ $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 2\}$ $r_1 = u$, $r_2 = v$, $r_3 = u^2+v^2$ e $|\underline{r}_u \wedge \underline{r}_v| = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$
Se si parametrizza in coordinate polari la proiezione della superficie sul piano (x,y) si ottiene $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)\colon D \to \mathbf{R}^3$ $D = \{(\rho,\theta)\colon 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{2}\}$ $r_1 = \rho\cos\theta$, $r_2 = \rho\sin\theta$, $r_3 = \rho^2$ e $|\underline{r}_\rho \wedge \underline{r}_\theta| = \rho\sqrt{1+4\rho^2}$
Se si parametrizza "fissando la quota" si ha $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)\colon D \to \mathbf{R}^3$, $D = \{(\rho,\theta)\colon 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 2\}$, $r_1 = \sqrt{\rho}\cos\theta$, $r_2 = \sqrt{\rho}\sin\theta$, $r_3 = \rho$ e $|\underline{r}_\rho \wedge \underline{r}_\theta| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4\rho}$

In tutti e tre i casi integrando si ha $\frac{13}{3}\pi$.

43.8.1 Sia $A \equiv (1,0,0)$, $B \equiv (0,1,0)$, $C \equiv (0,0,1)$, $\omega = d(xy) + xydz$. Sul segmento AB abbiamo $dz = 0$ per cui $\int_{AB}\omega = \int_{AB} d(xy) = (xy)|_B - (xy)|_A = 0$ in quanto x oppure y vale 0. $\int_{AC}\omega = 0$ in quanto y è costante e vale zero (una sola delle due non basta). $\int_{CB}\omega = 0$ in quanto x è costante e vale zero
La forma $\omega \doteq F_1dx + F_2dy + F_3dz$ **non è chiusa** in quanto il rotore delle sue componenti è dato dal vettore $\underline{i}x - \underline{j}y$ che non è nullo. Ciononostante la sua terza componente è nulla ed infatti si ha $F_1dx + F_2dy = d(xy)$ è un prodotto di tale fatto. Se si vuole usare il Teorema di Stokes bisogna calcolare la normale esterna al piano sul quale giace la curva γ. Tale piano ha equazione $x+y+z = 1$ e la sua normale esterna è $(1,1,1)$ per cui $\int\int_S (rot\underline{F}, \underline{n})d\sigma$ è uguale a $\int_0^1\int_0^{1-v} dudv(u-v) = 0$ (si è parametrizzata la porzione di piano che ci interessa attraverso la sua proiezione sul piano x,y che è stato chiamato u,v).

44.8.1 Rifarsi i conti dell'esercizio **39.8.1**

45.8.1 1) La soluzione della omogenea è $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ mentre una soluzione della non omogenea è $c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$ e dove $\underline{c}'(x) = W^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix}$; $W(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}$ e dove $W^{-1}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix}$. Dunque $\underline{c}'(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{e^{-x}}{1+e^x} \\ \frac{-e^x}{1+e^x} \end{pmatrix}$ e scrivendo $\frac{1}{e^x(1+e^x)} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}$ da cui $\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{e^x}{1+e^x}$ si ottiene come soluzione $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xe^x + \ln(1+e^x)\sinh x$

2) L'operatore differenziale $L[y] \stackrel{\text{def}}{=} y'' - y$ è lineare ossia $L[y] + L[z] = L[y+z]$ e quindi se si hanno due funzione f e g tali che $L[y] = f$ e $L[z] = g$ allora $f + g = L[y+z]$. Da ciò segue che per risolvere la equazione data basta avere la soluzione della equazione al punto 1) ed una soluzione della equazione $y'' - y = \cos x$ che è data da $-\frac{1}{2}\cos x$. La soluzione generale è data da $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xe^x + \ln(1+e^x)\sinh x - \frac{1}{2}\cos x$

46.8.1 Se la soluzione esistesse si dovrebbe avere $W(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dove $W(x)$ è la matrice Wronskiana delle soluzioni della equazione differenziale ossia $\begin{pmatrix} e^x & \sinh x & \cosh x \\ e^x & \cosh x & \sinh x \\ e^x & \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$ il cui determinante è nullo (come è facile verificare). Ne segue che il sistema da risolvere non può ammettere soluzione. Tra l'altro si può fare anche la seguente osservazione. Supponiamo di voler risovere un altro problema di Cauchy ossia $y''' - y' = 0$, e $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$. In tal caso il sistema $W(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha la soluzione $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = -1$ la quale però fa si che $y(x) = e^x - \sinh x - \cosh x \equiv 0$ come si verifica immediatamente. Ciò non è una sorpresa in quanto si vede subito che la soluzione $y(x) \equiv 0$ risolve il problema di Cauchy e **l'unicità** della soluzione fa sì che le due soluzioni **debbano** essere uguali per ogni x.

47.8.1 La soluzione, per separazione delle variabili è data da $x(t) = \frac{1}{t-2}$ che è definita nell'intervallo $(-\infty, 2)$ e che non può essere estesa fino a $t = 3$ in quanto diverge a $-\infty$ per $t \to 2^-$. È il caso di notare che la funzione $f(t) = \frac{1}{t-2}$ è certamente definita per $t = 3$ ma la funzione, soluzione della equazione differenziale, dovendo essere definita in un intervallo comprendente $t = 1$ come punto interno, non può essere estesa al valore $t = 3$.

48.8.1 Si può separare le variabili oppure considerarla come una equazione di tipo Bernoulli. In questo ultimo caso, la sostituzione $z = -\frac{1}{y}$ dà $z' = \frac{z}{x} - \frac{1}{x}$. La omogenea associata ha come soluzione $z(x) = cx$ e la non omogenea $z \equiv 1$ da cui la soluzione $z(x) = cx + 1$ e quindi $y(x) = -\frac{1}{cx+1}$. La condizione iniziale fa si che essa sia $y(x) = \frac{2}{3x-2}$ che è definita per $(-\infty, \frac{3}{2})$ e quindi non può definirsi per $x = 2$. Per $x = 0$ vale $y(0) = -1$. Nel secondo problema, essendo $y(t) \equiv -1$ una soluzione che soddisfa la condizione iniziale essa è l'unica soluzione possibile.

49.8.1 Indichiamo con $z(x) = \frac{\sin x}{x}$ e consideriamo la funzione $y(x) = z(x)\int u(x)$ dove la funzione incognita è $u(x)$. Derivando e sostituendo nella equazione si perviene a $2z'u + zu' + \frac{2}{x}zu = 0$ ossia $u' + 2u(\frac{1}{x} + \frac{z'}{z}) = 0$ (nei punti dove $z(x) \neq 0$). Separando le variabili si arriva a $\frac{u'}{u} = -\frac{2}{x} - 2\frac{z'}{z}$ da cui $\ln|u| = -2\ln|x| - 2\ln|z|$ e quindi $|u| = \frac{1}{\sin^2 x}$. $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$ e quindi la soluzione cercata è $\pm\frac{\cos x}{x}$. La soluzione generale della equazione è quindi $y(x) = c_1\frac{\sin x}{x} + c_2\frac{\cos x}{x}$.
La procedura usata per abbassare il grado di una equazione lineare sapendone una soluzione, è standard e non limitata all'esempio dato.

50.8.1 Basta verificare che la funzione $y(x) \equiv 2$ è soluzione per ogni valore di t. Va osservato che per considerare l'equazione a variabili separabili bisogna escludere proprio il valore 2 da quelli possibili e quindi la soluzione non può essere trovata integrando.

51.8.1 È una equazione linerare a coefficienti costanti non omogenea. La soluzione della omogenea è $x(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$ e la matrice Wronskiana è $\begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{pmatrix}$. L'inversa è $\begin{pmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t \\ \sin 2t & \frac{1}{2}\cos 2t \end{pmatrix}$ e quindi otteniamo $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2t\cos\omega t \\ \frac{1}{2}\cos 2t\cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t \\ \sin 2t & \frac{1}{2}\cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$ ossia $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(\sin(2t+\omega t) + \sin(2t-\omega t)) \\ \frac{1}{4}(\cos(2t+\omega t) + \cos(2t-\omega t)) \end{pmatrix}$. A questo punto bisogna distinguere tre casi diversi. Il primo è quello in cui $\omega \neq \pm 2$. Si ottiene che la soluzione è data da $x(t) = a\cos 2t + b\sin 2t +$ $+\frac{1}{4}\cos 2t(\frac{\cos(2t+\omega t)}{2+\omega} + \frac{\cos(2t-\omega t)}{2-\omega}) + \frac{1}{4}\sin 2t(\frac{\sin(2t+\omega t)}{2+\omega} + \frac{\sin(2t-\omega t)}{2-\omega})$. La condizione iniziale $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ dà $b = 0$ e $a = \frac{1}{\omega^2-4}$.
Sia ora $\omega = 2$. Il vettore $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(\sin(2t+\omega t) + \sin(2t-\omega t)) \\ \frac{1}{4}(\cos(2t+\omega t) + \cos(2t-\omega t)) \end{pmatrix}$ diventa $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(\sin(2t+\omega t)) \\ \frac{1}{4}(\cos(2t+\omega t) + 1) \end{pmatrix}$ e quindi la soluzione è $x(t) = a\cos 2t + b\sin 2t + \frac{1}{16}\cos 2t\cos 4t + \frac{1}{16}\sin 2t\sin 4t + \frac{1}{4}t\sin 2t$ da cui si deduce che la soluzione non può essere limitata per $t \to \pm\infty$. Lo stesso discorso vale per $\omega = -2$. È opportuno notare che se ω diventa grande (la frequenza del termine forzante è molto diversa da quella corrispondente alla soluzione della equazione omogenea) allora la parte della soluzione che dipende da ω tende a diventare progressivamente più piccola.

52.8.1 La soluzione della equazione è data da $x(t) = c_1e^t + c_2te^t + \frac{1}{4}e^{-t}$ per cui la condizione è verificata se $c_1 = c_2 = 0$ che implicano $x_o = \frac{1}{4}$, $y_o = -\frac{1}{4}$

53.8.1 La forma differenziale è data da $\omega = d(x^2z^3) + xyzdy$ e la curva è chiusa. Dunque $\int_\gamma \omega = \int_\gamma xyzdy = \int_{\gamma_1} xyzdy$ in quanto su γ_2 e su γ_3 almeno una delle variabili è nulla. L'integrale è dato da $\int_0^{4\pi} t\cos^2 t\sin t dt = -\frac{1}{3}\int_0^{4\pi} d(t\cos^3 t) + \frac{1}{3}\int_0^{4\pi}\cos^3 t dt = -\frac{4}{3}\pi$

54.8.1 La proiezione sul piano (x, y) della curva è la circonferenza $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}$. La sua parametrizzazione in coodinate polari è $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta$, $y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta$, $z = x + y + 1 = 2 + \sqrt{\frac{3}{2}}(\cos\theta + \sin\theta)$.
Si può agire in due modi. Il primo consiste nel calcolare l'integrale curvilineo. Si osserva dapprima che $\omega = d(xyz) - \frac{1}{3}y^3dx + \frac{1}{3}x^3dy = d(xyz) + \frac{1}{3}(d(x^3y) - 3x^2ydx) - \frac{1}{3}(d(y^3x) - 3y^2xdy) \stackrel{\text{def}}{=} d(F) + y^2xdy - x^2ydx$ con ovvio significato per la funzione F. Essendo la curva su cui integrare chiusa, $\int_\varphi d(F) = 0$. Rimane $\int_\varphi (y^2xdy - x^2ydx)$. Svolgendo i calcoli si ottiene il risultato. Ovviamente si poteva calcolare $\int_\varphi (-\frac{1}{3}y^3dx + \frac{1}{3}x^3dy)$ ma sarebbe stato più lungo dovendo calcolare una potenza cubica.

Il secondo modo passa attraverso il Teorema di Stokes e quindi $\int_\varphi \omega = \int\int_S \underline{rotV}\cdot\underline{n}d\sigma$ dove $\underline{V} = (yz - \frac{1}{3}y^3, xz + \frac{1}{3}x^3, xy)$ e S è il cerchio che si trova sul piano $z = x+y+1$. La parametrizzazione del cerchio è $x = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{2} + \rho\sin\theta$, $z = x + y + 1 = 2 + \rho(\cos\theta + \sin\theta)$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$. $\underline{rotV} = (0, 0, x^2 + y^2)$, $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$ (la curva è percorsa in senso antiorario; altrimenti sarebbe stato $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$). A questo punto l'integrale diventa $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho\,\rho(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + \rho\cos\theta + \rho\sin\theta) = \frac{15}{8}\pi$. Come in tutti i casi di applicazione del Teorema di Stokes e più in generale del calcolo del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie, vi sono due normalizzazioni che si semplificano. A denominatore vi è quella che deriva dal calcolo della normale esterna e a numeratore vi è quella che deriva da $d\sigma$.

55.8.1 Percorriamo il rombo in senso antiorario. Le parametrizzazioni dei quattro lati del rombo partendo dal punto $(1,0)$ sono $x_1(t)=-t$, $y_1(t)=t+1$, $-1\le t\le 0$; $x_2(t)=-\frac{t}{t_0}$ $y_1(t)=-\frac{t}{t_0}+1$, $0\le t\le t_0$; $x_3(t)=\frac{t-t_1}{t_1-t_0}$, $y_3(t)=\frac{t_1-t}{t_1-t_0}-1$, $t_0\le t\le t_1$; $x_4(t)=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$, $y_3(t)=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}-1$, $t_1\le t\le t_2$;. La somma delle quattro quantità $(xdy-ydx)$ è pari a 2.

56.8.1 Eseguendo la sostituzione $y(x)=\sqrt{e^{u(x)}-1}$, l'equazione diventa $\frac{1}{2}u'(x)=e^{u(x)}+x+\frac{1}{x}$. Scriviamo la soluzione come $u(x)=G(x)+F(x)$ e l'equazione diventa $F'(x)+G'(x)=2e^{G(x)}e^{F(x)}+x+\frac{1}{x}$. Ora imponiamo che $F'(x)=x+\frac{1}{x}$. Si ottiene $F(x)=x^2+\ln|x|+c$ e quindi $G'(x)=2e^ce^{G(x)}e^{x^2}|x|$. Nella funzione $G(x)$ l'equazione è a variabili separabili e quindi $-e^{-G(x)}=e^ce^{x^2}+c_1$ se $x>0$ mentre $-e^{-G(x)}=-e^ce^{x^2}+c_1$ se $x<0$. Se $x>0$ allora otteniamo $G(x)=\ln(-e^ce^{x^2}-c_1)^{-1}$ e quindi $u(x)=\ln(-e^ce^{x^2}-c_1)^{-1}+x^2+\ln x+c$ e quindi $y(x)=\big((-e^ce^{x^2}-c_1)^{-1}xe^{x^2}e^c-1\big)^{1/2}=\big((-e^{x^2}-e^{-c}c_1)^{-1}xe^{x^2}-1\big)^{1/2}\doteq\big((-e^{x^2}-K)^{-1}xe^{x^2}-1\big)^{1/2}$. Se $x<0$ allora $-e^{-G(x)}=-e^ce^{x^2}+c_1$ da cui si ottiene $G(x)=\ln(e^ce^{x^2}-c_1)^{-1}$. Ne segue che $u(x)=\ln(e^ce^{x^2}-c_1)^{-1}+x^2+\ln(-x)+c$ e qundi $y(x)=\big(\frac{-xe^{x^2}e^c}{e^ce^{x^2}-c_1}-1\big)^{1/2}=\big(\frac{-xe^{x^2}}{e^{x^2}-e^{-c}c_1}-1\big)^{1/2}=\big(\frac{-xe^{x^2}}{e^{x^2}-K}-1\big)^{1/2}$. La condizione $y(\sqrt{\ln 2})=0$ implica $K=-2-\sqrt{\ln 2}$ per cui la soluzione è data da $y(x)=\big((-e^{x^2}+2\sqrt{\ln 2})^{-1}xe^{x^2}-1\big)^{1/2}$. Di conseguenza si ha $y((\ln(\frac{3}{2}\sqrt{\ln 2}))^{1/2})=3((\ln(\frac{3}{2}\sqrt{\ln 2}))^{1/2})$

57.8.1 La trasformazione in questo caso è $y(x)=e^{u(x)}-1$ che riduce l'equazione alla forma $u'(x)=e^{u(x)}-1+\frac{1}{t}$ la cui soluzione si ottiene come nel precedente caso e quindi è $y(x)=\frac{-1-ce^t}{1+t+ce^t}$ e $c=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{2}$

58.8.1 Intersecando $x^2+y^2+z^2=r^2$ con la superficie $rx+z^2=r^2$ si ottiene $x^2+y^2=rx$ e quindi l'area della superficie $\int\int_{x^2+y^2\le rx}dxdy\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^{r\cos\vartheta}d\rho\frac{r\rho}{\sqrt{r^2-y^2}}=r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta(r-r|\sin\vartheta|)=r^2(\pi-2)$

59.8.1 $\omega=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\dfrac{ydz-zdy}{y^2+z^2}+\dfrac{zdx-xdz}{z^2+x^2}$. La proiezione sul piano (x,y) della curva intersezione della circonferenza e del piano è data dal $x^2+y^2+xy=r^2/2$ e cambiando coordinate $x=(u+v)/\sqrt{2}$, $y=(-u+v)/\sqrt{2}$ is ottiene $u^2+v^2=r^2$. Siccome l'origine rimane inalterata dal cambio di coordinate, la curva racchiude l'origine al suo interno. Potendo ripetere lo stesso ragionamento con le altre due coppie di coordinate, l'integrale è pari a 6π.

61.8.1 Abbiamo $x^2+y^2+z^2+8\le 6\sqrt{x^2+y^2}$ ossia, detto $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $u^2-6u+z^2+8\le 0$ da cui $3-\sqrt{1-z^2}\le u\le 3+\sqrt{1-z^2}$ Inoltre da $z^2\le 6u-8-u^2=1-(3-u)^2$ otteniamo $1-(3-u)^2\ge 0$ ossia $2\le u\le 4$. Ne segue che l'integrale è

$$\int_0^{2\pi}dt\int_2^4 drr\int_{-\sqrt{(1-(3-r)^2)}}^{\sqrt{1-(3-r)^2}}dz=\int_0^{2\pi}\int_2^4 2r\sqrt{1-(3-r)^2}dr=4\pi\int_2^4 r\sqrt{6r-8-r^2}dr$$

ossia, a parte 4π

$$\int_2^4 r\sqrt{6r-8-r^2}dr=-\frac{1}{2}\int_2^4(-2r+6)\sqrt{6r-8-r^2}dr+3\int_2^4\sqrt{6r-8-r^2}dr=$$

$$=-\frac{1}{2}(6r-8-r^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_2^4+3\int_2^4\sqrt{6r-8-r^2}dr=3\int_2^4\sqrt{6r-8-r^2}dr$$

Quest'ultimo integrale lo ricaviamo tra quelli già risolti nel capitolo sugli integrali unidimensionali

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x))}dx=\frac{1}{4}(b-a)|b-a|\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+\frac{1}{4}\frac{|b-a|}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)$$

per cui con $a = 2$, $b = 4$ si ha

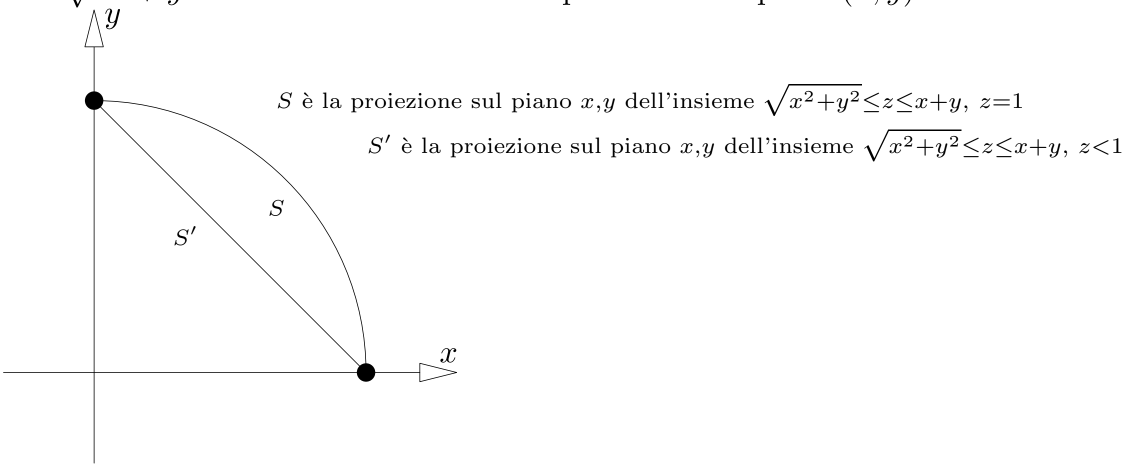
$$\frac{1}{4}(b-a)|b-a| \arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\Big|_2^4 = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\frac{1}{4}\frac{|b-a|}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)\Big|_2^4 = 0$$

da cui il risultato.

62.8.1 Certamente deve essere $x + y \geq 0$ per cui quadrando si ha $\sqrt{x^2+y^2} \leq x + y$ se e solo se $xy \geq 0$. Il piano $z = 1$ interseca il piano $z = x + y$ nella retta in $\mathbf{R}^3$ la cui proiezione sul piano (x, y) è data dalla retta $y + x = 1$ mentre l'intersezione del piano $z = 1$ con il cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ è data da una curva la cui proiezione sul piano (x, y) è data dal cerchio $x^2+y^2 = 1$.



Se $(x, y) \in S'$ allora $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x + y$ e quindi l'integrale del volume è

$$V_1 = \int\int_{S'} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{x+y} dz$$

Usiamo coordinate polari per cui $x + y = 1$ diventa $\rho = 1/(\cos t + \sin t)$ e qundi

$$V_1 = \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{\frac{1}{\cos t+\sin t}} d\rho\rho(\rho\cos t + \rho\sin t - \rho) = \int_0^{\pi/2} dt(\cos t + \sin t - 1)\frac{1}{3}\frac{1}{(\cos t + \sin t)^3}$$

Se $(x, y) \in S$ allora $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ da cui

$$V_2 = \int\int_S dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz = \int_0^{\pi/2} dt \int_{\frac{1}{\cos t+\sin t}}^1 d\rho\rho(1-\rho) =$$

$$\int_0^{\pi/2} dt\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\cos t + \sin t)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\cos t + \sin t)^3} - \frac{1}{3}\Big) =$$

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos t + \sin t)^2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(2t)}dt =$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{12}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}$$

Si poteva calcolare il volume anche per strati. Fissato z, l'area dello strato è pari all'area di una figura planare avente la stessa forma di S ma le cui intersezioni con gli assi sono $(z, 0)$ e $(0, z)$. L'area della figura è $\frac{\pi}{4}z^2 - \frac{z^2}{2}$ che integarta fra $z = 0$ e $z = 1$ dà il medesimo risultato.

63.8.1 Applichiamo il Teorema di Pappo–Guldino. Detta $\rho(\underline{x},b)$ la distanza di un punto di unn punto dalla bisettrice $y=x$, il volume è $2\pi\int\int_{3^x-x-1\le y\le x}\rho(\underline{x},b)dx\,dy$. La distanza $\rho(\underline{x},b)$ è pari a $\sqrt{2}(x-y)/2$ da cui $V=\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 dx\int_{3^x-x-1}^x (x-y)dy$ e svolgendo i calcoli si arriva a $\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}\dfrac{13\ln^2 3+24-36\ln 3}{\ln^2 3}$. Questo tipo di integrazione lo possiamo identificare come "per fili" in quanto "si sommano" le lunghezze delle circonferenze generate dai punti di D intorno alla bisettrice.

Un altro modo di procedere è il seguente. Sia S_c l'area della sezione circolare ottenuta intersecando R con il piano in $\mathbf{R}^3$ di equatione $x+y=c$, $0\le c\le 2$. Sia inoltre s la coordinata che corre lungo la bisettrice tra il punto $(0,0)$ ed il punto $(1,1)$. Il volume che stiamo cercando è $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}S_c\,ds=\int_0^2 S_c\frac{dc}{\sqrt{2}}$ in quanto $s=c/\sqrt{2}$. Il punto $C=(c/2,c/2,0)$ appartiene ad ambedue le linee $y=x$, and $y=-x+c$ e l'intersezione fra $y=-x+c$ e $y=3^x-x-1$ ha coordinata $(\ln_3(1+c),c-\ln_3(1+c))$. La rotazione intorno alla bisettrice fa si che l'area di S_c sia

$$\pi\left[\Big(\frac{c}{2}-\log_3(1+c)\Big)^2+\Big(\frac{c}{2}-c+\log_3(1+c)\Big)^2\right]=2\pi\left(\frac{c}{2}-c+\log_3(1+c)\right)^2$$

Semplici integrazioni danno

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 S_c\,dc=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 2\pi\left(\frac{c^2}{4}+\log_3^2(1+c)-c\log_3(1+c)\right)dc=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\frac{13\ln^2 3+24-36\ln 3}{\ln^2 3}$$

64.8.1 Sia $z_0=\cos a$ per cui $z=\rho\cos\vartheta\ge\cos a$ e quindi l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a d\vartheta\int_{\frac{z_0}{\cos\vartheta}}^1 d\rho\frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\vartheta=2\pi\int_0^a d\vartheta\big(1-\frac{z_0}{\cos\vartheta}\big)\sin\vartheta=$$
$$=2\pi(1-\cos a)+2\pi z_0\ln\cos\vartheta\Big|_0^a=2\pi(1-\cos a)+2\pi z_0\ln\cos a$$

Un secondo modo consiste in integrare per strati. Fissato $z=z_1$, l'integrale diventa $\displaystyle\int_{z_0}^1 dz\int\int_{x^2+y^2\le 1-z^2}\frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\int_{z_0}^1 dz\int_0^{\sqrt{1-z^2}}2\pi\frac{\rho\,d\rho\,dt}{\rho^2+z^2}=\pi\int_{z_0}^1 dz\ln(\rho^2+z^2)\Big|_0^{\sqrt{1-z^2}}$ e si ottiene lo stesso risultato.

65.8.1 La forma è $\omega=\frac{-xdy+ydx}{x^2+y^2}+\frac{ydy+(x+1)dx}{(x+1)^2+y^2}$

66.8.1 Scritta come $\omega=Xdx+Ydy+Zdz$ si ha

$$X_y=Y_x=\frac{-4xy(-12zx^2-12zy^2+5z^2+8x^4+16x^2y^2+8y^4)}{(-z+x^2+y^2)^2(2x^2+2y^2-z)^2}$$
$$Z_x=X_z=\frac{2x(-8zx^2-8zy^2+3z^2+6x^4+12x^2y^2+6y^4)}{(-z+x^2+y^2)^2(2x^2+2y^2-z)^2}$$
$$Z_y=Y_z=\frac{2y(-8zx^2-8zy^2+3z^2+6x^4+12x^2y^2+6y^4)}{(-z+x^2+y^2)^2(2x^2+2y^2-z)^2}$$

Dunque la forma è chiusa. Se $\oint_\gamma\omega=0$ per ogni curva chiusa che soddisfa $x^2+y^2<z<2(x^2+y^2)$ allora la forma è esatta. Intanto facciamo vedere che $\oint_\gamma\omega=0$ se $\gamma=(\frac{3}{2}\cos t,\frac{3}{2}\sin t,z_0)$ con $z_0>0$. Infatti si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\frac{2\frac{3}{2}\cos t(4\frac{9}{4}-3z_0)(-\frac{3}{2}\sin t)}{(-z_0+\frac{9}{4})(2\frac{9}{4}-z_0)}dt+\frac{2\frac{3}{2}\sin t(4\frac{9}{4}-3z_0)(-\frac{3}{2}\cos t)}{(-z_0+\frac{9}{4})(2\frac{9}{4}-z_0)}dt+\frac{3\frac{9}{4}-2z_0}{(z_0-\frac{9}{4})(2\frac{9}{4}-z_0)}\cdot 0\Big)=0.$

Sia ora data un'altra curva γ_1 sufficientemente regolare contenuta nell'insieme di definizione della forma. Sia S la superficie il cui bordo è dato da $\Gamma \doteq \gamma \cup \gamma_1$. Dal Teorema di Stokes abbiamo $\oint_{\Gamma^+} \omega = \int\int_S (\underline{rotF}, \underline{n}_e) d\sigma = 0$ dove $\underline{F}$ è il campo vettoriale che genera la forma. Ma siccome $\oint_{\Gamma^+} \omega = \oint_{\gamma^+} \omega - \oint_{\gamma_1^+} \omega$ si ha che $\oint_{\gamma^+} \omega = \oint_{\gamma_1^+} \omega = 0$ da cui l'esattezza della forma ed infatti il potenziale è $\ln((z - x^2 - y^2)(2x^2 + 2y^2 - z)) = V(x, y, z)$.

67.8.1 Il cono ha equazioni parametriche $\underline{x} = (0,0,a) + t((\frac{v^2}{2a}, v, 0) - (0,0,a))$ ossia $x = \frac{tv^2}{2a}$, $y = tv$, $z = a(1-t)$ e $0 \le t \le 1$, $-\infty < v < +\infty$. Imponiamo ora che il punto generico del cono stia dentro la sfera $\frac{t^2v^4}{4a^2} + v^2t^2 + a^2(1-t)^2 \le a^2(1-t)$ che si traduce in $t \le \frac{a^2}{\left(\frac{v^2}{2a} + a\right)^2} < 1$.
Detto $x = \varphi_1(t, v) = \frac{tv^2}{2a}, \varphi_2(t, v) = vt, z = \varphi_3(t, v) = a(1-t)$, si ha $\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_v = \underline{i}at - \underline{j}tv - \underline{k}\frac{v^2t}{2a}$ da cui $\|\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_v\| = \frac{v^2t}{2a} + ta$ e l'integrale che cerchiamo è $\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\frac{a^2}{\left(\frac{v^2}{2a}+a\right)^2}} dt (\frac{v^2}{2a} + a)t =$
$\frac{8a^7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{1}{(v^2 + 2a^2)^3} = \frac{8a^7}{2} \frac{3}{64a^5} \pi\sqrt{2} = \frac{3\pi\sqrt{2}a^2}{16}$

Per rispondere alla seconda domanda conduciamo il segmento che parte da P, interseca la sfera e tocca il piano (x, y). Assumiamo come coordinate della sfera le coordinate stereografiche per cui $x \doteq \varphi_1(u, v) = \frac{a^2u}{u^2 + v^2 + a^2}$, $y \doteq \varphi_2(u, v) = \frac{a^2v}{u^2 + v^2 + a^2}$, $z \doteq \varphi_3(u, v) = \frac{a(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + a^2}$.
La sfera appartiene al cono se e solo se $v^2 \le 2au$ e $u \in (-\infty, +\infty)$. Abbiamo $\|\underline{\varphi}_u \wedge \varphi_v\| = \frac{a^4}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$. L'area che andiamo cercando è $a^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{\frac{v^2}{2a}}^{+\infty} \frac{du}{(u^2 + v^2 + a^2)^2} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$ ma l'integrale è un pò lungo. Detto $I_m = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^m}$ si ha $I_{m+1} = I_m\frac{2m - 1}{2m} + \frac{1}{2m} \frac{x}{(x^2 + 1)^m}$
per cui $a^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{\frac{v^2}{2a}}^{+\infty} \frac{du}{(u^2 + v^2 + a^2)^2} = a^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(v^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\frac{v^2}{2a\sqrt{u^2+a^2}}}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^2}$

$$\int_{\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int_{\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2 + 1}\Big|_{\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} \arctan t\Big|_{\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}}^{+\infty} + \frac{1}{4} \frac{\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}}{1 + \frac{v^4}{4a^2(v^2+a^2)}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{v^2}{2a\sqrt{v^2 + a^2}} - \frac{1}{4} \frac{\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}}{1 + \frac{v^4}{4a^2(v^2+a^2)}}$$

Dunque abbiamo

$$a^4\int_0^{+\infty}\frac{1}{(v^2+a^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}-\frac{1}{2}\frac{4a^2(v^2+a^2)}{4a^2(v^2+a^2)+v^4}\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}\right)dv=$$

$$a^4\int_0^{+\infty}\frac{1}{(v^2+a^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}\right)dv-2a^5\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{(v^2+a^2)(v^2+2a^2)^2}dv=$$

$$a^4\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+a^2}}\right)'\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}\right)dv-2a^5\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{(v^2+a^2)(v^2+2a^2)^2}dv=$$

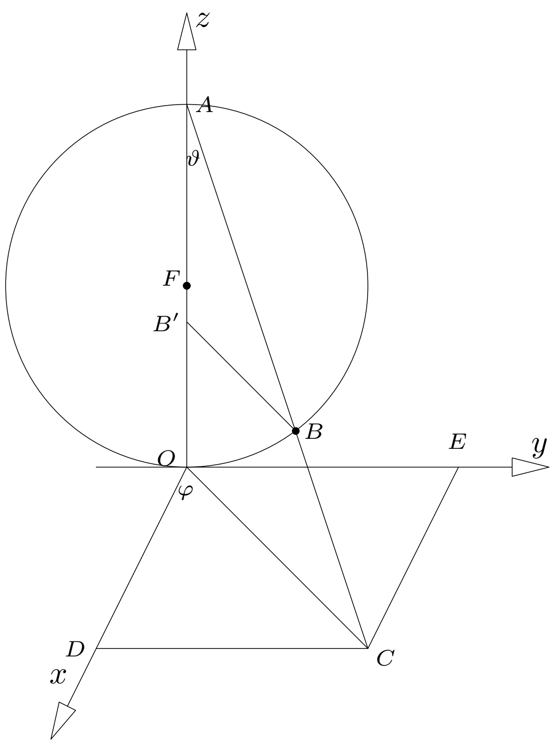
$$=a^4\frac{1}{a^2}\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+a^2}}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{v^2}{2a\sqrt{v^2+a^2}}\right)\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+a^4\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+a^2}}\right)\left(\frac{2av}{(v^2+2a^2)\sqrt{v^2+a^2}}\right)dv-2a^5\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{(v^2+a^2)(v^2+2a^2)^2}dv=$$

$$=2a^3\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{(v^2+2a^2)^2}dv=2a^3\int_0^{+\infty}\frac{1}{v^2+2a^2}dv-2a^3\int_0^{+\infty}\frac{2a^2}{(v^2+2a^2)^2}dv$$

$$=2a^3\int_0^{+\infty}\frac{1}{v^2+2a^2}dv-\sqrt{2}a^2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}=$$

$$=2a^3\frac{\sqrt{2}a}{2a^2}\arctan\frac{v}{\sqrt{2}a}\Big|_0^{+\infty}-\sqrt{2}a^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\Big|_0^{+\infty}\right)=\sqrt{2}a^2\frac{\pi}{4}$$



$A\equiv(0,0,a)$, $F\equiv(0,0,\frac{a}{2})$ $AB=a\cos\vartheta$, $OB=a\sin\vartheta$

$AC=\frac{a}{\cos\vartheta}$, $OC=a\tan\vartheta$, $OD=a\tan\vartheta\cos\varphi$, $OE=a\tan\vartheta\sin\varphi$,

$OD=u$, $OE=v$, $u^2+v^2=a^2\tan^2\vartheta$, $\vartheta=\arctan\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{a}$

$AB=\frac{a^2}{AC}=\frac{a^2}{\sqrt{u^2+v^2+a^2}}$, $BB'=AB\sin\vartheta=\frac{a^2\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2+a^2}$

$x=BB'\cos\varphi=\frac{a^2\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2+a^2}\,\frac{u}{a}\,\frac{a}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{a^2u}{u^2+v^2+a^2}$

$y=BB'\sin\varphi=\frac{a^2v}{u^2+v^2+a^2}$, $z=\frac{a(u^2+v^2)}{a^2+v^2+a^2}$

Un altro modo di calcolare l'integrale $a^4\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}dv\int_{\frac{v^2}{2a}}^{+\infty}\frac{du}{(u^2+v^2+a^2)^2}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$ è il seguente. Introduciamo coordinate polari $u=r\cos\vartheta$, $v=r\sin\vartheta$, da cui $-\pi/2\le\vartheta\le\pi/2$, e $v^2\le 2au$ diventa $r\le 2a\cos\vartheta/(\sin\vartheta)^2$ per cui l'integrale è

$$a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\frac{2a\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}}\frac{r}{(r^2+a^2)^2}dr=a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\vartheta\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\frac{4a^2\cos^2\vartheta}{\sin^4\vartheta}+a^2}\right)$$

Nel secondo integrale poniamo $\vartheta = \arctan t$ da cui

$$-\frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\frac{t^4}{(1+t^2)^2}\frac{(1+t^2)^2}{t^4+4(1+t^2)}dt = -\frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\frac{t^4}{(t^2+2)^2}dt$$

Usiamo i residui ed otteniamo

$$\frac{1}{2a^2}2\pi i\left(\frac{i^4}{2i(-1+2)^2}+\lim_{t\to\sqrt{2}i}\frac{d}{dt}\frac{t^4(t-\sqrt{2}i)^2}{(1+t^2)(t-\sqrt{2}i)^2(t+\sqrt{2}i)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a^2}2\pi i\left(\frac{i^4}{2i(-1+2)^2}+\frac{4(\sqrt{2}i)^3}{(1-2)(2\sqrt{2}i)^2}-\frac{2(\sqrt{2}i)^4}{(1-2)(2\sqrt{2}i)^3}-\frac{(\sqrt{2}i)^4}{(2\sqrt{2}i)^2}=\frac{2\sqrt{2}i}{(1-2)^2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2a^2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{a^2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{a^2}=\frac{\pi}{2a^2}-\frac{\pi}{4a^2}\sqrt{2}$$

da cui il risultato finale $a^4\dfrac{\pi}{2a^2}-a^4\left(\dfrac{\pi}{2a^2}-\dfrac{\pi}{4a^2}\sqrt{2}\right)=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$

68.8.1 $x'(u)=\dfrac{4ur^3}{(u^2+r^2)^2}$ $y'(u)=2r^2\dfrac{r^2-u^2}{(u^2+r^2)^2}$ da cui $\|x'^2+y'^2\|=\dfrac{2r^2}{u^2+r^2}$ e quindi la lunghezza della circonferenza è $4\displaystyle\int_r^{+\infty}\frac{2r^2}{u^2+r^2}dr = 8r\arctan\frac{u}{r}\Big|_r^{+\infty}=2\pi r$

69.8.1 (1) Data la simmetria poniamo in $P\equiv(0,0,z_0)$ il punto in cui calcolare il potenziale che è pari all'integrale $V(z_0)=\displaystyle\int\int_{x^2+y^2+z^2=r^2}\frac{\delta}{\rho(\underline{x},P)}d\sigma$. Parametrizziamo in coordinate sferiche $x=r\sin\vartheta cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=r\cos\vartheta$ e l'integrale è $\delta r^2\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{r^2+z_0^2+2rz_0\cos\vartheta}}=\frac{2\delta\pi r}{z_0}\big(r+z_0-|r-z_0|\big)$ per cui se $z_0>r$ si ha che il potenziale è $V(z_0)=\dfrac{4\delta\pi r^2}{z_0}$ che un fisico scriverebbe come $V(z_0)=\dfrac{Q}{z_0}$ dove $Q=4\pi\delta r^2$ è la carica elettrica o massa gravitazionale. Se il punto P sta dentro la sfera si ha $V(z_0)=4\delta\pi r$ ossia è costante ed infatti il campo elettrico (gravitazionale) è nullo all'interno della sfera.

Per quanto riguarda la sfera piena, parametrizziamo il volume come $x=p\sin\vartheta cos\varphi$, $y=p\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=p\cos\vartheta$ e $0\le p\le r$. L'integrale è $\delta\displaystyle\int_0^r dp\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{p^2\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{r^2+z_0^2+2rz_0\cos\vartheta}}=$ $2\pi\delta\displaystyle\int_0^r dp\frac{p}{z_0}(p+z_0-|p-z_0|)$ Se $z_0>r$ abbiamo $2\pi\delta\displaystyle\int_0^r dp\frac{p}{z_0}2p=\frac{4\pi\delta r^3}{3z_0}$. Se invece $z_0<r$ abbiamo $2\pi\delta\displaystyle\int_0^r dp\frac{p}{z_0}(p+z_0-|p-z_0|)=2\pi\delta\int_0^{z_0}p\frac{2p}{z_0}dp+2\pi\delta\int_{z_0}^r dp\frac{p}{z_0}2z_0=2\pi\delta r^2-\frac{2}{3}\pi\delta z_0^3=$ $\dfrac{1}{2r}(\dfrac{4}{3}\pi\delta r^3)\left(3-\dfrac{z_0^2}{r^2}\right)$ che un fisico scriverebbe come $\dfrac{Q}{2r}\left(3-\dfrac{z_0^2}{r^2}\right)$ dove Q è la carica (elettrica o massa gravitazionale) contenuta nella sfera di raggio r.

Entrambe i risultati potevano essere trovati usando il Teorema della divergenza per il campo elettrico (gravitazionale) ossia detto $\underline{E}(\underline{x})$ il campo, sappiamo che $div\underline{E}(\underline{x})=4\pi\delta(\underline{x})$ dove $\delta(\underline{x})$ è la densità di carica. Sappiamo che $\displaystyle\int\int_S(\underline{E},\underline{n}^e)d\sigma=\int\int\int_V div\underline{E}dx\,dy\,dz$ dove S è una superficie chiusa e V è il volume racchiuso. Tenendo conto della simmetria radiale e densità costante, nel caso della sfera cava si ha, $E(z_0)\cdot 4\pi z_0^2=4\pi\cdot 4\pi\delta r^2$ da cui $E(z_0)=4\pi\delta\dfrac{r^2}{z_0^2}$ da cui

$V(z_0) = 4\pi\delta\dfrac{r^2}{z_0} + c$ e la costante è fissata imponendo che all'infinito il potenziale sia nullo da cui $c = 0$. Lo stesso calcolo ci dice che all'interno della sfera cava il campo è nullo per cui $V(z_0) = c$ ed inoltre $c = V(r) = 4\pi\delta r^2$

(2) Usiamo il teorema di Gauss. Sia $\|\underline{x}\| = d > R$. La formula al solito è $\displaystyle\int\int_S (\underline{E}, \underline{n}^e) d\sigma = \int\int\int_V div\underline{E} dx\, dy\, dz$ dove S è una sfera di raggio d e V è il volume da essa racchiuso. Il campo è radiale per cui $(\underline{E}, \underline{n}^e) = \|\underline{E}\|$ e quindi $\displaystyle\int\int_S (\underline{E}, \underline{n}^e) d\sigma = \|\underline{E}\| 4\pi d^2$ mentre $\displaystyle\int\int\int_V div\underline{E} dx\, dy\, dz = \int\int\int_V 4\pi\delta dx\, dy\, dz = \int\int\int_{\|\underline{x}\|\le d} 4\pi\delta dx\, dy\, dz = \int\int\int_{r\le\|\underline{x}\|\le R} 4\pi\delta dx\, dy\, dz = 4\pi\delta\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$. Il modulo del campo è quindi $\|\underline{E}\| = \delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{R^3 - r^3}{d^2}$ ossia $\underline{E}(\underline{x}) = \dfrac{Q}{d^2}\dfrac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \dfrac{Q\underline{x}}{(\|\underline{x}\|)^3} = \dfrac{Q\underline{x}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. Per il potenziale integriamo $\displaystyle -\int \frac{Qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx = \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c$ e la costante è fissata imponendo che all'infinito il potenziale sia nullo da cui $c = 0$.

Sia ora $r < \|\underline{x}\| = d < R$. $\displaystyle\int\int_S (\underline{E}, \underline{n}^e) d\sigma = \|\underline{E}\| 4\pi d^2$ e $\displaystyle\int\int\int_V div\underline{E} dx\, dy\, dz =$
$\displaystyle = \int\int\int_{\|\underline{x}\|\le d} div\underline{E} dx\, dy\, dz = \int\int\int_{r\le\|\underline{x}\|\le d} div\underline{E} dx\, dy\, dz = 4\pi\delta\frac{4}{3}\pi(d^3 - r^3)$ da cui $\underline{E}(\underline{x}) = \delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{(d^3 - r^3)}{d^2}\dfrac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{(\|\underline{x}\|^3 - r^3)}{\|\underline{x}\|^3}\underline{x}$. Per trovare il potenziale integriamo ottenendo
$-\delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - \delta\dfrac{4}{3}\pi r^3\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c$. La costante è fissata imponendo che sulla superficie della sfera di raggio R il potenziale sia $\dfrac{Q}{R}$ e quindi $-\dfrac{4}{3}\pi\delta\dfrac{1}{2}R^2 - \delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{r^3}{R} + c = \delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{R^3 - r^3}{R}$ da cui $c = \dfrac{4}{3}\delta\pi\dfrac{3}{2}R^2 = 2\pi\delta R^2$. In definitiva $V_2(\underline{x}) = -\delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - \delta\dfrac{4}{3}\pi r^3\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dfrac{4}{3}\pi\delta\dfrac{3}{2}R^2$

Sia ora $\|\underline{x}\| < r$. Stavolta $\displaystyle\int\int\int_V 4\pi\delta dx\, dy\, dz = \int\int\int_{\|\underline{x}\|\le r} 4\pi\delta dx\, dy\, dz = 0$ e quindi il campo è nullo dentro la sfera interna. Il potenziale è quindi costante ed uguale a quello che si ha sulla superficie di raggio r e che è pari a $V_2(\underline{x})$ per $\|\underline{x}\| = r$. Dunque il potenziale è $-\delta\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \delta\dfrac{4}{3}\pi r^3\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dfrac{4}{3}\delta\pi\dfrac{3}{2}R^2\Big|_{\|\underline{x}\|=r} = \dfrac{4}{3}\pi\delta\dfrac{3}{2}(R^2 - r^2)$

70.8.1 Si può risolvere in diversi modi. Usando il teorema di Gauss si faccia vedere che, detta z la distanda dal centro della terra, il punto materiale è soggetto ad una forza proporzionale a $-z$ e quindi il moto è oscillatorio.

71.8.1 Il cono ha equazioni parametriche $(0, 0, a) + t\big(\sqrt{2au}, u, 0) - (0, 0, a)\big)$ da cui $\varphi_1 = x = t\sqrt{2au}$, $\varphi_2 = y = tu$, $\varphi_3 = z = a(1 - t)$ e sta dentro la sfera se $2at^2u + t^2u^2 + a^2(1 - t)^2 \le a^2(1 - t)$ da cui $t \le \dfrac{a}{a + u}$, $u \ge 0$. Inoltre $\|\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_u\| = \dfrac{t\sqrt{a}}{\sqrt{2}}(\dfrac{a}{\sqrt{u}} + \sqrt{u})$ e la superficie cercata è $\displaystyle\int_0^{+\infty} du \int_0^{\frac{a^2}{(a+u)^2}} \frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{2}}(\frac{a}{\sqrt{u}} + \sqrt{u}) dt = \frac{3\pi a^2\sqrt{2}}{32}$. Riprandiamo la formula $I_m =$

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}$ e $I_{m+1} = I_m \frac{2m-1}{2m} + \frac{1}{2m}\frac{x}{(x^2+1)^m}$. Inoltre $\int_0^{+\infty} du \int_0^{\frac{a^2}{(a+u)^2}} \frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{2}}(\frac{a}{\sqrt{u}}+\sqrt{u})dt =$ $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{a^5\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{u}(a+u)^4} + \frac{a^4\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{u}}{(a+u)^4}\right)du$. Cambiando variabile si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2a^5\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\frac{1}{(a+t^2)^4} + \frac{2a^4\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\frac{t^2}{(a+t)^4}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2a^5\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{a}}{a^4}\frac{1}{(1+t^2)^4} + \frac{2a^4\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\frac{a\sqrt{a}}{a^4}\frac{t^2}{(1+t^2)^4}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{2}a^2\frac{dt}{(1+t^2)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{2}a^2\frac{1}{(1+t^2)^3}dt = \frac{1}{2}\sqrt{2}a^2\left[I_2\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}\Big|_0^{+\infty}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{2}a^2 I_2\frac{3}{4} =$$

$$= \sqrt{2}a^2\frac{3}{8}\left[I_1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\Big|_0^{+\infty}\right] = \sqrt{2}a^2\frac{3}{8}I_1\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}a^2\frac{3}{16}\frac{1}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}\pi}{32}$$

Per la seconda conduciamo dal punto $(0,0,a)$ per un qualsiasi punto della sfera fino a toccare il piano (x,y) nel punto (u,v). Le coodinate stereografiche della sfera sono $x \doteq \varphi_1(u,v) = \frac{a^2u}{u^2+v^2+a^2}$, $y \doteq \varphi_2(u,v) = \frac{a^2v}{u^2+v^2+a^2}$, $z \doteq \varphi_3(u,v) = \frac{a(u^2+v^2)}{u^2+v^2+a^2}$. La sfera appartiene al cono se e solo se $v \le \sqrt{2au}$ e $u \ge 0$. Abbiamo $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| = \frac{a^4}{(u^2+v^2+a^2)^2}$. L'area che andiamo cercando è $a^4\int_0^{+\infty}du\int_0^{\sqrt{2au}}\frac{dv}{(u^2+v^2+a^2)^2}$. Introduciamo coordiante polari per cui $u = r\cos\vartheta$, $v = r\sin\vartheta$, e $v \le \sqrt{2au}$ ci da $r\sin\vartheta \le \sqrt{2a}\sqrt{r}\sqrt{\cos\vartheta}$ ossia $r \le (2a\cos\vartheta)/\sin^2\vartheta$ ed otteniamo $a^4\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\frac{2a\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}}\frac{rdr}{(r^2+a^2)^2} = a^2\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{\frac{2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}}\frac{rdr}{(r^2+1)^2} = a^2\int_0^{\pi/2}d\vartheta\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right)^2}\Big) = a^2\frac{\pi}{4} - a^2\int_0^{\pi/2}d\vartheta\frac{1}{2}\frac{\sin^4\vartheta}{\sin^4\vartheta+4\cos^2\vartheta}$

Sia $\vartheta = \arctan t$ da cui

$$\int_0^{\pi/2}d\vartheta\frac{\sin^4\vartheta}{\sin^4\vartheta+4\cos^2\vartheta} = \int_0^{+\infty}dt\frac{t^4}{1+t^2}\frac{1}{(t^2+2)^2} = \int_0^{+\infty}\left[\frac{t^2-1}{(t^2+2)^2} + \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)^2}\right]dt$$

Integrando per fratti semplici ed usando le formule per gli integrali I_m otteniamo $a^2(\frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{\pi}{4})$ che sommato ad $a^2\frac{\pi}{4}$ dà il risultato aspettato $\frac{a^2\pi\sqrt{2}}{8}$

72.8.1 Usiamo coordinate polari sferiche $x = r\sin\vartheta\cos s$, $y = r\sin\vartheta\sin s$, $z = r\cos\vartheta$. Se $\vartheta = \pi/2$, l'equazione della lemniscata diventa $r^2 = a^2\cos(2s)$ e quindi $-\pi/4 \le s \le \pi/4$, $3\pi/4 \le s \le 5\pi/4$. Sia P un punto della circonferenza C avente per diametro M. Il segmento OP è pari a $r\sin\vartheta$ per cui le coordinate del punto P sono pari a

$$x \doteq \varphi_1 = (a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos s,\ y \doteq \varphi_2 = (a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\sin s,$$
$$z \doteq \varphi_3 = (a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\cos\vartheta,$$

Siccome la lemniscata è simmetrica rispetto all'origine, basta moltiplicare per 4 il calcolo ristretto al primo quadrante da cui $0 \le \vartheta \le \pi/2$, $0 \le s \le \pi/4$. Inoltre si vede facilmente che $\|\underline{\varphi}_s \wedge \underline{\varphi}_\vartheta\| = a^2\sin^2\vartheta$ e quindi la superficie cercata è $8a^2\int_0^{\pi/4}ds\int_0^{\pi/2}\sin^2\vartheta d\vartheta = \frac{\pi^2a^2}{2}$.

Il volume è pari a

$$V = 8\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2 dr = \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\pi/4} (\cos(2s))^{3/2} ds$$

e la componente x del baricentro è

$$x_b = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2(a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos s\, dr =$$
$$\frac{a^4}{3V}\int_0^{\pi/4} \cos s\cos^2(2s)\, ds \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin^4\vartheta = \frac{a^4}{3V}\frac{4}{15}\sqrt{2}\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2}}{30}\frac{a^4\pi}{V}$$

$$y_b = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2(a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\sin s\, dr =$$
$$\frac{a^4}{3V}\int_0^{\pi/4} \sin s\cos^2(2s)\, ds \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin^4\vartheta = \frac{a^4}{3V}\frac{7-4\sqrt{2}}{15}\frac{3}{8}\pi = \frac{7-4\sqrt{2}}{120}\frac{a^4\pi}{V}$$

$$z_b = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2(a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\cos\vartheta\, dr =$$
$$\frac{a^4}{3V}\int_0^{\pi/4} \cos^2(2s)\, ds \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta\cos\vartheta}_{=0} = 0,$$

73.8.1 (1) Data la simmetria rispetto all'asse y basta prendere $y \geq 0$ e poi moltiplicare per due il risultato finale. Il cono ha equazioni parametriche $\underline{x} = (0,0,a) + t((\frac{v^2}{2a}, v, 0) - (0,0,a))$ ossia $x = \frac{tv^2}{2a}$, $y = tv$, $z = a(1-t)$ e $0 \leq t \leq 1$, $-\infty < v < +\infty$. Imponiamo ora che il punto generico del cono stia dentro la sub–regione di R con $y \geq 0$ per cui $x + y + z \leq b$ da cui $t\frac{v^2}{2a} + tv + a - at \leq b$ ossia $t\frac{v^2}{2a} + tv - at \leq b - a$.

• Sia $b \geq a$. Possiamo avere due casi. Il primo caso è $\frac{v^2}{2a} + v - a \geq 0$ e $t \leq \frac{b-a}{\frac{v^2}{2a} + v - a}$.

$$\frac{v^2}{2a} + v - a \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad v \leq a(-1-\sqrt{3}) \ \vee\ v \geq a(-1+\sqrt{3})$$

Essendo $v \geq 0$, abbiamo $v \geq a(-1+\sqrt{3})$. Poi bisogna considerare che $0 \leq t \leq 1$ per cui

$$\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a} + v - a} \leq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad v \geq -a + \sqrt{a^2 + 2ab}$$

Riassumendo abbiamo $v \geq -a + \sqrt{a^2+2ab}$, e $0 \leq t \leq \frac{b-a}{\frac{v^2}{2a} + v - a}$ oppure $-a + a\sqrt{3} \leq v < -a + \sqrt{a^2+2ab}$ e $0 \leq t \leq 1$.

Sempre con $b \geq a$, se $\frac{v^2}{2a} + v - a < 0$ allora $t\frac{v^2}{2a} + tv - at \leq b - a$ è verificata per ogni $0 \leq t \leq 1$ per cui abbiamo $0 \leq v < -a + a\sqrt{3}$ e $0 \leq t \leq 1$.

Detto $x=\varphi_1(t,v)=\dfrac{tv^2}{2a}$, $\varphi_2(t,v)=vt$, $z=\varphi_3(t,v)=a(1-t)$, si ha $\underline{\varphi}_t\wedge\underline{\varphi}_u=\underline{i}at-\underline{j}tv-\underline{k}\dfrac{v^2t}{2a}$ da cui $\|\underline{\varphi}_t\wedge\underline{\varphi}_u\|=\left(\dfrac{v^2}{2a}+a\right)t.$

L'integrale che cerchiamo è

$$\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty}dv\int_0^{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}dt\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)t+\int_{-a+a\sqrt3}^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^1dt\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)t+$$
$$+\int_0^{-a+a\sqrt3}dv\int_0^1dt\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)t=$$
$$\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty}dv\int_0^{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}dt\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)t+\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^1dt\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)t$$

• Sia $b\le a$. Deve essere $\dfrac{v^2}{2a}+v-a\le0$ ossia $0\le v<-a+a\sqrt3$. Inoltre $t\dfrac{v^2}{2a}+tv-at\le b-a$ diventa $t\ge\dfrac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}$. Se $v\le -a+\sqrt{a^2+2ab}$ allora $\dfrac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}\le1$ per cui abbiamo

$$v\le -a+\sqrt{a^2+2ab},\qquad \frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}\le t\le1$$

Altrimenti abbiamo

$$-a+\sqrt{a^2+2ab}\le v<-a+a\sqrt3,\quad 0\le t\le1$$

e l'integrale che cerchiamo è

$$\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}^1dt\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)t+\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt3}dv\int_0^1dt\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)t=$$
$$=\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\frac12\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)\left(1-\frac{(b-a)^2}{\big(\frac{v^2}{2a}+v-a\big)^2}\right)+\frac12\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt3}dv\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)$$

• (2) Sia $b\ge a$. La parametrizzazione del volume è $x=\dfrac{tv^2}{2a}$ $y=tv$, $z=s$ con gli stessi limiti su t e v e con $0\le s\le a(1-t)$. Il volume in questione è

$$\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty}dv\int_0^{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}dt\int_0^{a-at}ds\,\frac{sv^2t}{2a}+\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^1dt\int_0^{a-at}ds\,\frac{sv^2t}{2a}$$

essendo lo jacobiano pari a $\dfrac{sv^2t}{2a}$.

Sia $b<a$. Si ha

$$\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}^1dt\int_0^{a-at}ds\,\frac{sv^2t}{2a}+\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt3}dv\int_0^1dt\int_0^{a-at}ds\,\frac{sv^2t}{2a}$$

• (3). Sia $(a,b)=(1,4)$. L'area della superficie in (1) è

$$\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty}dv\frac{(b-a)^2}{2}\Big(\frac{v^2}{2a}+a\Big)\frac{1}{\big(\frac{v^2}{2a}+v-a\big)^2}+\int_{-a+a\sqrt3}^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^1dt\left(\frac{v^2}{2a}+a\right)t$$

Tenendo conto del fattore 2 di cui all'inizio dell'esercizio

$$2\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}} dv \int_0^1 dt \left(\frac{v^2}{2a}+a\right) t = \frac{10}{3}$$

$$\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty} dv \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{v^2}{2a}+a\right) \frac{1}{\left(\frac{v^2}{2a}+v-a\right)^2} = 9\int_4^{+\infty} \frac{v^2+2}{(v^2+2v-2)^2} dv$$

$$\frac{v^2+2}{(v^2+2v-2)^2} = \frac{1}{v^2+2v-2} - \frac{2v+2}{(v^2+2v-2)^2} + \frac{6}{(v^2+2v-2)^2}$$

Dette $v_1 = -1+\sqrt{3}$, e $v_2 = -1-\sqrt{3}$, si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{dv}{v^2+2v-2} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{v-v_1} - \frac{1}{v-v_2}\right) dv = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2+\sqrt{3})$$

$$-\int_2^{+\infty} \frac{2v+2}{(v^2+2v-2)^2} dv = \frac{1}{v^2+2v-2}\Big|_2^{+\infty} = -\frac{1}{6}$$

$$6\int_2^{+\infty} \frac{1}{(v^2+2v-2)^2} dv =$$

$$= 6\int_2^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{36}\frac{1}{x+1+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{36}\frac{1}{x+1-\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\frac{1}{(x+1-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{12}\frac{1}{(x+1+\sqrt{3})^2}\right) =$$

$$= 6\frac{\sqrt{3}}{36}\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2+\sqrt{3}) + 6\frac{1}{12}\frac{1}{(3-\sqrt{3})^2} + 6\frac{1}{12}\frac{1}{(3+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{12}\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{3}$$

Sommando e tenendo conto del fattore 2 di cui all'inizio, si ha

$$2\left(\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{3}$$

Il volume è invece

$$2\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty} dv \int_0^{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}} dt \int_0^{a-at} ds\, \frac{sv^2t}{2a} + 2\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}} dv \int_0^1 dt \int_0^{a-at} ds\, \frac{sv^2t}{2a}$$

$$2\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}} dv \int_0^1 dt \int_0^{a-at} ds\, \frac{sv^2t}{2a} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$2\int_2^{+\infty} \left(\frac{81}{16}\frac{16v^2}{(v^2+2v-2)^4} - \frac{9}{2}\frac{8v^2}{(v^2+2v-2)^3} + \frac{9}{8}\frac{4v^2}{(v^2+2v-2)^2}\right) dv = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\mathrm{arccoth}(\sqrt{3})$$

Sia $(a,b) = (2, \frac{5}{4})$. L'area che cerchiamo è la somma di due contributi

$$\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}} dv \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2a}+a\right)\left(1 - \frac{(b-a)^2}{\left(\frac{v^2}{2a}+v-a\right)^2}\right) = \int_0^5 dv \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2a}+a\right)\left(1 - \frac{(b-a)^2}{\left(\frac{v^2}{2a}+v-a\right)^2}\right) = \frac{2}{3}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt{3}} dv\left(\frac{v^2}{2a}+a\right) = 4\sqrt{3} - \frac{51}{8}$$

e quindi l'area della superficie cercata è $\dfrac{4}{3}+8\sqrt{3}-\dfrac{51}{4}=8\sqrt{3}-\dfrac{35}{4}$

Il volume è invece

$$2\int_0^1\left(\frac{v^2}{24}-\frac{81}{8}\frac{v^2}{(v^2+4v-8)^4}-\frac{9v^2}{(v^2+4v-8)^3}-\frac{9}{4}\frac{v^2}{(v^2+4v-8)^2}\right)dv=$$
$$=\frac{255\sqrt{3}}{1024}\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{647}{304}-\frac{255\sqrt{3}}{1024}\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

a cui va sommato

$$2\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt{3}}dv\int_0^1 dt\int_0^{a-at}ds\,\frac{sv^2t}{2a}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{9}{4}$$

(4) Parametrizziamo il piano nel seguente modo $x=\varphi_1=\dfrac{tv^2}{2a}$ $y=tv$, $z=b-x-y=b-\dfrac{tv^2}{2a}-tv$ da cui $\underline{\varphi}_t\wedge\underline{\varphi}_v=\dfrac{v^2t}{2a}(-\underline{i}+\underline{j}-\underline{k})$ e quindi $\|\underline{\varphi}_t\wedge\varphi_u\|=\dfrac{tv^2}{2a}$ Il piano giace all'interno della regione R se $b-\dfrac{tv^2}{2a}-tv\le a-at$ da cui $b-a\le t\left(\dfrac{v^2}{2a}+v-a\right)$. Inoltre deve aversi $z\ge 0$ da cui $t\le\dfrac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}$. Definiamo $B(a,b)=-a+\sqrt{a^2+2ab}$ e $A(a,b)=-a+a\sqrt{3}$. Osserviamo che $\dfrac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}\le 1\iff v\ge B(a,b)$.

Sia $b\ge a$. Se $v>-a+\sqrt{a^2+2ab}>-a+a\sqrt{3}$ allora si ha $\dfrac{v^2}{2a}+v-a>0$ e $1\ge t\ge\dfrac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}$. Inoltre $\dfrac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}\le\dfrac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}\iff v\ge B(a,b)$. Questo contributo si scrive come

$$\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty}dv\int_{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}^{\frac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}}dt\frac{tv^2}{2a}$$

Se invece $-a+a\sqrt{3}\le v<-a+\sqrt{a^2+2ab}$ allora $\dfrac{v^2}{2a}+v-a>0$ ed inoltre $\dfrac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}\ge 1$.

Tale contributo è $\displaystyle\int_{-a+a\sqrt{3}}^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^1 dt\frac{tv^2}{2a}$

Se $b>a$ abbiamo $\displaystyle\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{+\infty}dv\int_{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}^{\frac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}}dt\frac{tv^2}{2a}+\int_{-a+a\sqrt{3}}^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^1 dt\frac{tv^2}{2a}$

Sia $b\le a$. Per avere $b-a\le t\left(\dfrac{v^2}{2a}+v-a\right)$ bisogna che si verifichi almeno una delle due eventualità che seguono.

Sia $\dfrac{v^2}{2a}+v-a\le 0$ ossia $0\le v\le -a+a\sqrt{3}$. Se $0\le v\le -a+\sqrt{a^2+2ab}\le -a+a\sqrt{3}$ allora $\dfrac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}\le 1$ e $\dfrac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}\ge 1$ per cui il contributo è

$$\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}dt\frac{tv^2}{2a}$$

se $-a+\sqrt{a^2+2ab}\le v<-a+a\sqrt{3}$. allora $\dfrac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}\ge 1$ ma $\dfrac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}\le 1$ per cui il contributo è

$$\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt{3}}dv\int_0^1 dt\frac{tv^2}{2a}$$

La somma dei due è

$$\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}dt\frac{tv^2}{2a}+\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt{3}}dv\int_0^1 dt\frac{tv^2}{2a}$$

Sia $\dfrac{v^2}{2a}+v-a>0$ e quindi $v>-a+a\sqrt{3}>-a+\sqrt{a^2+2ab}$. In tal caso abbiamo $b-a\le t\left(\dfrac{v^2}{2a}+v-a\right)$ è vera per ogni $0\le t\le 1$. L'integrale è

$$\int_{-a+a\sqrt{3}}^{+\infty}dv\int_0^{\frac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}}dt\frac{tv^2}{2a}$$

e quindi sommando

$$\int_0^{-a+\sqrt{a^2+2ab}}dv\int_0^{\frac{b-a}{\frac{v^2}{2a}+v-a}}dt\frac{tv^2}{2a}+\int_{-a+\sqrt{a^2+2ab}}^{-a+a\sqrt{3}}dv\int_0^1 dt\frac{tv^2}{2a}+\int_{-a+a\sqrt{3}}^{+\infty}dv\int_0^{\frac{b}{\frac{v^2}{2a}+v}}dt\frac{tv^2}{2a}$$

74.8.1 L'integrale non esiste. Definiamo $D_{k,q}=[2k\pi,2\pi(k+1)]\times[2q\pi,2\pi(q+1)]$. Scriviamo l'integrale come $\displaystyle\sum_{k,q=0}^{+\infty}\int\int_{D_{k,q}}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy$. Ciascun quadrato $D_{k,q}$ si scompone in quattro quadrati $D^1_{k,q}=[2k\pi,2k\pi+\pi]\times[2q\pi,2q\pi+\pi]$, , $D^2_{k,q}=[2k\pi+\pi,2(k+1)\pi]\times[2q\pi,2q\pi+\pi]$, $D^3_{k,q}=[2k\pi,2k\pi+\pi]\times[2q\pi+\pi,2(q+1)\pi]$, $D^4_{k,q}=[2k\pi+\pi,2(k+1)\pi]\times[2q\pi+\pi,2(q+1)\pi]$. L'integrale diventa $\displaystyle\sum_{k,q=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{4}\int\int_{D^j_{k,q}}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy$. Inoltre

$$\int\int_{D^1_{k,q}}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy\le\frac{1}{2k\pi}\frac{1}{2q\pi}\left(\int_{2k\pi}^{\pi(2k+1)}\sin xdx\right)\left(\int_{2q\pi}^{\pi(2q+1)}\sin ydy\right)=$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{4kq}=\frac{1}{kq\pi^2}$$

$$\int\int_{D^4_{k,q}}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy\le\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)(2q+1)}$$

$$\int\int_{D^2_{k,q}}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy\le\frac{1}{2k\pi}\frac{1}{2q\pi}\left(\int_{2k\pi+\pi}^{2\pi(k+1)}\sin xdx\right)\left(\int_{2q\pi+\pi}^{2\pi(q+1)}\sin ydy\right)=$$
$$=\frac{-1}{\pi^2kq}$$

$$\int\int_{D^3_{k,q}}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy\le\frac{1}{2k\pi}\frac{1}{2q\pi}\left(\int_{2q\pi+\pi}^{2\pi(q+1)}\sin xdx\right)\left(\int_{2k\pi}^{2\pi k+\pi}\sin ydy\right)=$$
$$=\frac{-1}{kq\pi^2}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene $-\frac{1}{4}\frac{2k+2q+1}{kq(2k+1)(2q+1)} \leq C\frac{k+q}{(k+1)^2(q+1)^2}$ per una opportuna costante C negativa. Dunque

$$\sum_{k,q=0}^{+\infty} \int\int_{D_{k,q}} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y} dxdy \leq C \sum_{k,q=0}^{+\infty} \frac{k+q}{(k+1)^2(q+1)^2} = -\infty$$

da cui la divergenza dell'integrale. Evidentemente in questo caso si ha
$$\int\int_{[0,+\infty)^2} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y} dxdy \neq \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi^2}{4}$$

76.8.1 Ruotiamo gli assi fino a far si che il piano abbia equazione $z''=0$ dove (x'',y'',z'') sono le nuove coordinate. Effettuiamo il passaggio in due passi. Prima passiamo dalle coordinate (x,y,z) alle coordinate (x',y',z') e poi alle coordinate (x'',y'',z''). Per questo prima definiamo delle nuove coordinate (x',y',z') in modo che il nuovo piano sia parallelo all'asse $y'=0$ ed il cambio di coordinate è dato dalla matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x' \end{pmatrix}$. Si tratta di una rotazione sul piano (x,y) di $45°$ in senso antiorario. Quindi si ha $(x,y,z) = \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, 1\right)$ e quindi il piano $x+y+z=0$ diventa $\sqrt{2}x'+z'=0$. Ora dobbiamo fissare y' e ruotare sul piano (x',z') in modo che il piano $\sqrt{2}x'+z'=0$ assuma l'equazione $z''=0$. Il cambio è $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$. Il cambio alla fine è
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$. Il piano $x+y+z=1$ diventa $z''=1/\sqrt{3}$ e la sfera $x^2+y^2+z^2=4$ diventa chiaramente $(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2=4$. La forma differenziale diventa
$xydz = \left(\frac{x''}{\sqrt{6}} - \frac{y''}{\sqrt{2}} + \frac{z''}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x''}{\sqrt{6}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} + \frac{z''}{\sqrt{3}}\right)\left(-dx''\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + dz''\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
dove $dz = \frac{\partial z}{\partial x''}dx'' + \frac{\partial z}{\partial y''}dy'' + \frac{\partial z}{\partial z''}dz''$

77.8.1 Poniamo il centro degli assi nel punto $(1/2,1/2,1/2)$. La sfera di raggio $1/2$ è interamente contenuta nel cubo ed il suo volume è $\frac{4}{3}\pi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}$ Rimangono fuori quattro regioni di uguale volume e noi consideriamo quella che sta a nord est. Tale regione è scomponibile nell'unione di due regioni di volume uguale, una con $z \geq 0$ e una con $z<0$. Scegliamo quella con $z>0$. Tale regione è a sua volta scomponibile come l'unione di due regioni, una con $y \geq x$ e una con $y<x$. Scegliamo quella con $y<x$. Quindi dovremo sommare $\frac{\pi}{6} + 16|A|$ dove $|A|$ è il volume della regione A che ci accingiamo a trovare. Introduciamo coordinate polari $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$. La regione A è l'unione delle due sottoregioni

$$A_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \vartheta \leq \arctan\frac{1}{\cos\varphi},\ \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2\cos\varphi}\}$$

$\vartheta \leq \arctan\frac{1}{\cos\varphi}$ assicura che $\frac{1}{\cos\vartheta} \leq \frac{1}{\sin\vartheta\cos\varphi}$ e

$$A_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\ \arctan\frac{1}{\cos\varphi} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2\sin\vartheta\cos\varphi}\}$$

e $\arctan\dfrac{1}{\cos\varphi}\leq\vartheta\leq\dfrac{\pi}{2}$ assicura che $\dfrac{1}{\sin\vartheta\cos\varphi}\leq\dfrac{1}{\cos\vartheta}$. Inoltre $\arctan\dfrac{1}{\cos(\pi/4)}=\arctan\sqrt{2}$ e $\dfrac{1}{2\cos\arctan\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{1}{3(\sin\arctan\sqrt{2})\cos(\pi/4)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Gli integrali sono

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\arctan\frac{1}{\cos\varphi}}d\vartheta\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2\cos\vartheta}}drr^2\sin\vartheta=\frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\left[\frac{1}{2\cos^2\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\right]-\frac{\pi}{96}$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\arctan\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2\sin\vartheta\cos\varphi}}drr^2\sin\vartheta=\frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\left[\frac{1}{\cos^2\varphi}-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\right]$$

La somma dà

$$|A|=\frac{1}{24}\frac{3}{2}-\frac{\pi}{96}=\frac{1}{16}-\frac{\pi}{96}\implies\frac{\pi}{6}+16|A|=1$$

78.8.1 Da $\vartheta=\pi/2-t$ otteniamo $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{\cos(a\sin\vartheta\cos\varphi)}$ con $|a|\leq\pi/2$. La parametrizzazione della sfera unitaria $x=\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=\cos\vartheta$ e $d\sigma=\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ ci dice che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{\cos(a\sin\vartheta\cos\varphi)}=\int\int_{\substack{x^2+y^2+z^2=1,\\ x,y,z\geq0}}\frac{d\sigma}{\cos(ax)}$$

Parametrizziamo l'ottante di sfera come $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{1-u^2-v^2}$ ed otteniamo

$$\int\int_{u^2+v^2\leq1}\frac{du\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{1}{\cos(au)}\underbrace{=}_{v=\sqrt{1-u^2}\sin z}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du\sqrt{1-u^2}\cos zdz}{\sqrt{1-u^2}\cos z\cos(au)}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{du}{\cos(au)}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{a}\ln\frac{1+\sin a}{\cos a}=\frac{\pi}{2a}\ln\frac{1+\tan(a/2)}{1-\tan(a/2)}$$