§6 Grafici di funzioni

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

Disegnare i grafici delle seguenti funzioni [(1.6)]

1.6 $^*f(x)=-x^3+x^3\ln x$, $^*f(x)=x^3-3x^2$, $^*f(x)=x^2(x^2-2)$, $^*f(x)=\frac{x^2}{1-x}$,

$^*f(x)=||x^3|-1|$, $^*f(x)=\frac{2|x|-x^2-x}{x+1}$, $f(x)=\sqrt{\frac{|x^2(x-1)|}{|x+1|}}$, $^*f(x)=\frac{1}{12^{1/3}}(4x^3+9x^2+6x)^{\frac{1}{3}}$

$^*f(x)=x^{\frac{2}{5}}(1-x)^{\frac{3}{5}}$, $^*f(x)=\log\frac{x^2}{|x+2|}$, $^*f(x)=\frac{x}{\log|x|}$, $^*f(x)=e^{-\frac{x}{3}}(3x-2)^{\frac{1}{9}}$,

$^*f(x)=\sin x-x\cos x$, $^*f(x)=2\sin x-\frac{1}{2}\sin(2x)-x$, $^*f(x)=x+4\arctan\sqrt{|x-1|}$,

$^*f(x)=\frac{x^2}{|x|}e^{\frac{1-x}{2-x}}$, $^*f(x)=\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}$, $^*f(x)=\sqrt{|\sin x(1-\sin x)|}$, $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-2}-x$,

$f(x)=|\frac{x-1}{x-3}|e^{1/(x-2)}$, $f(x)=e^{1/(1-x)}(x^2-x+1)$, $f(x)=-x-7|\log\frac{2x-6}{3x-6}|$,

$f(x)=-x-7\log|\frac{2x-6}{3x-6}|$, $^*f(x)=-x+\arctan\frac{x+1}{x}$

$f(x)=\log(|e^{2x}-6e^x|-1)+3$, $^*f(x)=(x+|x|-4)e^{\frac{1}{|x-3|}}$, $f(x)=\sqrt{|\ln(e^{3(x-2)^2}-\frac{1}{2})|}$

$f(x)=e^{1/(1-x)}(x^2-x+1)$, $f(x)=-1-\frac{1}{x}\sqrt{1+x^3}$, $^*f(x)=x\ln|x|-\frac{x}{\ln|x|}-2x$

$f(x)=\log(2\sqrt{e^x|e^x-2|}+e^2)$, si dimostri inoltre che esistono almeno due punti, uno di ascissa maggiore di $\ln 2$ ed uno di ascissa negativa in cui la derivata seconda si annulla

$^*f(x)=\frac{1}{4}|x-2|+\arcsin(\frac{4x}{x^2+4})$, $f(x)=\ln\big(e^{(2+\frac{x}{4}-\frac{4}{8+x})}-1\big)$, $f(x)=-\frac{\ln[(x+3)^2]}{x+3}$,

$^*f(x)=\arctan\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}-1|}$, $^*f(x)=\arctan\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}+1|}$, $^*f(x)=x+\arctan\frac{x}{1-x}$ $^*f(x)=xe^{\frac{1}{\log|x|}}$,

$^*f(x)=x+\ln(1+\frac{|x|}{|x-1|})$, $f(x)=e^{-x}(\sqrt{|x-\sqrt{2}|}+\sqrt{2})$, $f(x)=\frac{|x-1|}{|x-3|}e^{\frac{1}{x-2}}$

2.6 Per la funzione $f(x)=|x|+\arcsin\frac{3x^4-1}{6x^4+1}$, provare che esistono $x_1\in(-3^{-\frac{1}{4}},0)$ e $x_2\in(0,3^{-\frac{1}{4}})$ tali che $f(x_1)=f(x_2)=0$ inoltre senza calcolare f'' provare che esistono $x_3<0$ e $x_4>0$ tali che $f''(x_3)=f''(x_4)=0$

3.6 Sia $f\colon\mathbf{R}\backslash\{0,\pm4\}\to\mathbf{R}$ la funzione *dispari* tale che ristretta all'insieme $(-\infty,-4)\cup(0,4)$ è data dà $f(x)=\ln(16x-x^3)$. Studiarne il grafico.

4.6 Dopo aver trovato il dominio della seguente funzione se ne disegni il grafico con la

---

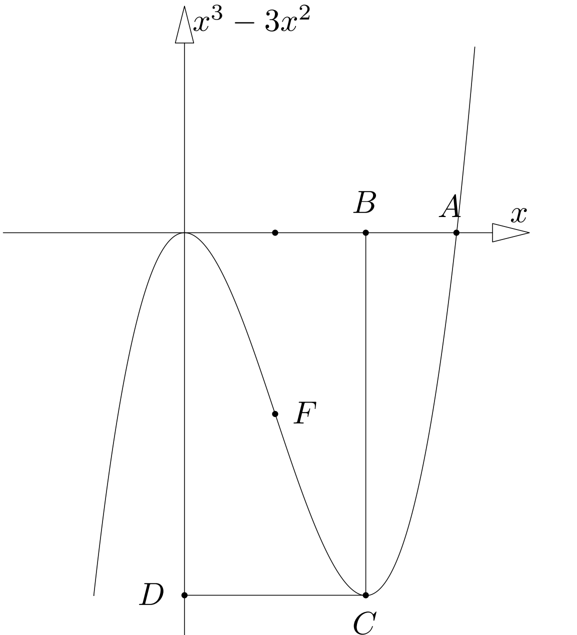
[(1.6)] per quel che riguarda concavità e convessità, se le derivate seconde sono troppo complicate, si sorvoli; per gli esercizi contrassegnati da un asterisco il calcolo si può risolvere in tempi ragionevolmente brevi. Per quelli non contrassegnati da asterisco alcuno *è possibile* che la derivata seconda sia facilmente risolvibile precisione massima possibile $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1 + \dfrac{xe^{-|x|}}{(x - \log|x|)^{1/3}} & x \neq 0 \end{cases}$

5.6 Si studi il grafico della seguente funzione $f(x) = \frac{(x+1/x)^6 - x^6 - 1/x^6 - 2}{(x+1/x)^3 - x^3 - 1/x^3}$

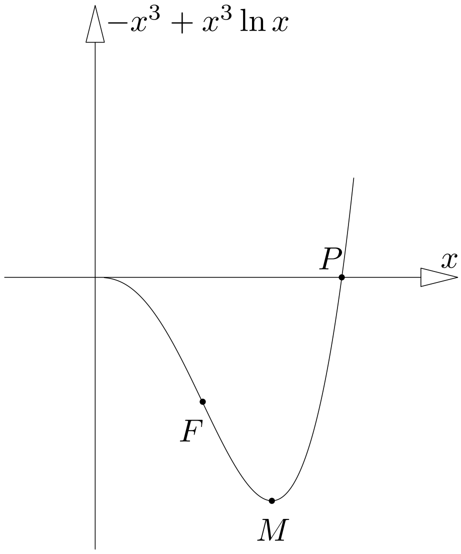
Risoluzioni

$\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2}$ Si tratta di un polinomio di terzo grado. L'equazione $f(x) = 0$ dà come risultato $x = 0$ e $x = 3$ per cui dal `teorema di Rolle` vi è un punto $x_o \in (0,3)$ tale che $f'(x_o) = 0$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = 3(x^2 - 2x) \geq 0$ per $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2$ per cui la funzione è decrescente in $(0,2)$ e crescente al di fuori e quindi $x = 2$ è un punto di minimo mentre $x = 0$ è un punto di massimo. Dalla derivata seconda $f''(x) = 6(x-1)$ si deduce che f ha la concavità rivolta verso il basso per $x < 1$ e viceversa per $x > 1$. Essendo $f'''(x) = 6$ si deduce che $x = 1$ è un punto di flesso. Il grafico è dato dalla figura 1.

$\boxed{f(x) = x^3 \ln x - x^3}$ $Dom(f) = \mathbf{R}^+$, $\lim_{x\to0^+} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $f(x) > 0$ per $x \in (0,e)$; $f(e) = 0$ e la funzione è continua e derivabile tutte le volte che si vuole. $f'(x) = x^2(3\ln x - 2)$ ed è positiva per $x \in (0, e^{\frac{2}{3}})$ e negativa per $x > e^{\frac{2}{3}}$. Dunque in $x = e^{\frac{2}{3}}$ vi è un minimo la cui ordinata è $f(e^{\frac{2}{3}}) = \frac{-e^2}{3}$. $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$ da cui segue che la tangente al grafico tende a diventare l'asse delle ascisse quando x tende a 0^+. È quindi abbastanza chiaro che deve esserci fra $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ un punto di flesso la cui ascissa si trova ponendo uguale a zero la derivata seconda $f''(x) = x(6\ln x - 1) = 0$ per $x = e^{\frac{1}{6}}$ mentre essa è negativa per $x \in (0, e^{\frac{1}{6}})$ e positiva per $x > e^{\frac{1}{6}}$. La derivata terza è data da $f'''(x) = 6\ln x + 7$ e $f'''(e^{\frac{1}{6}}) = 8$ da cui il punto è realmente di flesso. Il grafico è dato dalla figura 2.



$A \equiv (3,0)$, $\quad B \equiv (2,0)$, $\quad F \equiv (1,-2)$
$C \equiv (2,-4)$, $\quad D \equiv (0,-4)$ $\quad$ fig.1

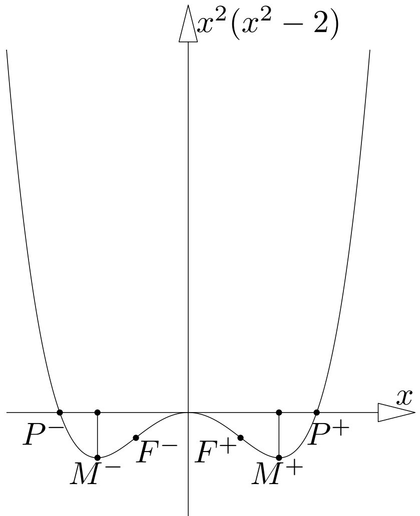


$F \equiv (e^{1/6}, -\frac{5}{6}e^{1/2})$, $\quad M \equiv (e^{2/3}, -\frac{e^2}{3})$
$P \equiv (e,0)$ $\quad$ fig.2

$\boxed{f(x) = x^2(x^2 - 2)}$ Si tratta di un polinomio di quarto grado. $Dom(f) = \mathbf{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\quad f(x) \geq 0$ per $|x| \geq \sqrt{2}$, $\quad f(x) = f(-x)$, $\quad f'(x) = 4x(x^2 - 1) \geq 0$ per

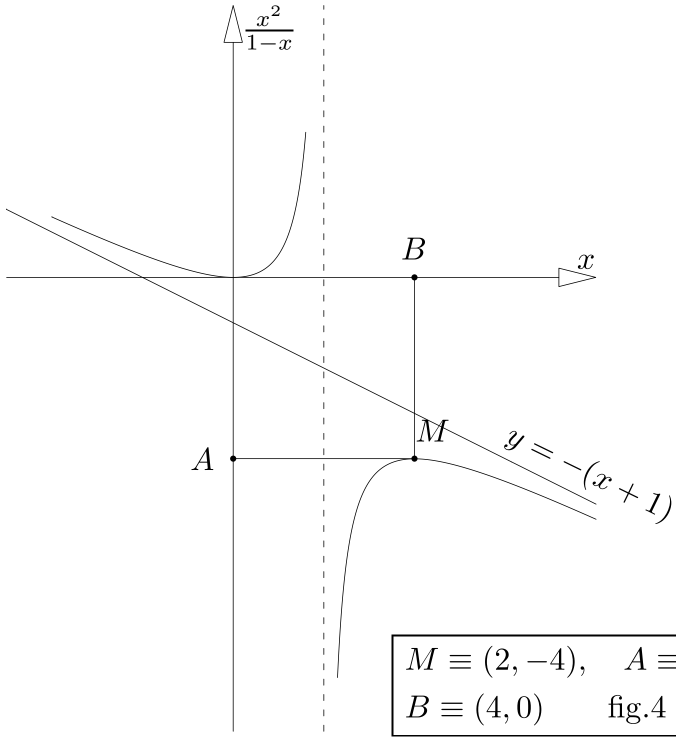
$x \in [-1,0] \vee x \in [1,\infty)$, $f''(x) = 12x^2 - 4 \geq 0$ per $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi $x = \pm 1$ corrispondono a due punti di minimo mentre $x = 0$ ad un massimo. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ corrispondono a due punti di flesso ed il grafico è in figura 3.

$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{1-x}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{1\}$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \mp\infty$, $f(x) \geq 0$ per $x < 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, $f(0) = 0$, la funzione ha come asintoto per $x \to \pm\infty$ la retta di equazione $y = -x - 1$, $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Dalle precedenti relazioni segue che la funzione è crescente per $x \in [0,1) \cup (1,2]$ e decrescente altrove. Per $x = 1$ vi è un asintoto verticale. La concavità è diretta verso l'alto per $x < 1$ e verso il basso per $x > 1$. $x = 0$ è un punto di minimo mentre $x = 2$ di massimo. Il grafico è in figura 4.



$M^\pm \equiv (\pm 1, -1)$, $F^\pm \equiv (\frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \frac{-5}{9})$

$P^\pm \equiv (\pm\sqrt{2}, 0)$ fig.3



$M \equiv (2,-4)$, $A \equiv (0,-4)$

$B \equiv (4,0)$ fig.4

$\boxed{f(x) = ||x|^3 - 1|}$ $$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x > 1 \\ 1 - x^3 & 0 < x < 1 \\ 1 + x^3 & -1 < x < 0 \\ -1 - x^3 & x < -1 \end{cases}$$ e senza troppa fatica il grafico è dato dalla figura 5. Si può notare che la funzione è pari e che $f'(0) = f''(0) = 0$ ma $f'''(0)$ non esiste in quanto $f'''(0^+) = -6$, $f'''(0^-) = 6$,

$\boxed{f(x) = \log(2\sqrt{e^x|e^x - 2|} + e^2)}$ $Dom(f) = \mathbf{R}$, $f(x) \geq 2\ \forall\ x \in \mathbf{R}$. Spezziamo il dominio in due sottoinsiemi.

$x \geq \ln 2$. Asintoti verticali assenti.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(2\sqrt{e^x|e^x-2|} + e^2) - x = \ln\big(e^x[2(1 - 2e^{-x})^{1/2} + e^{2-x}]\big) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln[2(1-2e^{-x})^{1/2} + e^{2-x}] = \ln 2$; l'asintoto obliquo ha dunque equazione $y = x + \ln 2$. $f(\ln 2) = 2$.

Derivata prima: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{(e^2 + 2(e^{2x} - 2e^x)^{1/2}))(2e^{2x} - 2e^x)^{1/2}}$ che è positiva se $x > 0$. Essendo

$x \geq \ln 2$ ne segue che la funzione è crescente. Si può verificare che $\lim_{x\to \ln 2^+} f'(x) = +\infty$ e quindi $f'(\ln 2^+) = +\infty$ (*bisogna usare il* `Teorema 6.10` *altrimenti non si è autorizzati a dire che il limite della derivata coincide con il limite del rapporto incrementale della funzione ossia con la derivata*)
Essendo $f(\ln 2) = 2$, $x = \ln 2$ è certamente un punto di minimo ma la funzione non è ivi derivabile.
$x < \ln 2$ Asintoti verticali assenti. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$ da cui vi è un asintoto orizzontale. $f'(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{e^{x/2}(2-e^x)^{1/2}\left(2\sqrt{e^x(2-e^x)}+e^2\right)}$ ed è positiva per $x \leq 0$ per cui $x = 0$ è un massimo. $\lim_{x\to \ln 2^-} f'(x) = -\infty$ e quindi $f'(\ln 2^-) = -\infty$.
Ora mostriamo che $f(x) \geq x+\ln 2$ per $x \geq \ln 2$. Certamente $f(\ln 2) = 2 > 2\ln 2$. La disequazione si può riscrivere come $\sqrt{e^x - 2} > 1 - \frac{e^2}{2e^{x/2}}$. Se $1 - \frac{e^2}{2e^{x/2}} < 0$ ossia $x < 2-2\ln 2$ allora è verificata. Se invece $x > 2 - 2\ln 2$ allora bisogna elevare al quadrato avendone $4t^4 + 4e^2 t > e^4 + 12t^2$ dove $t = e^{x/2}$. Essendo $x \geq 4 - 2\ln 2$ si ha $3.69 < e^{x/2} < 3.695$ ed inoltre riscriviamo la disequazione come $4t(t^3 - 3t + e^2) > e^4$. La funzione $t^3 - 3t + e^2$ è crescente per $t \geq 1$ da cui $4t(t^3 - 3t + e^2)$ è maggiore del valore che assume quando t è minimo ossia $3.69 < t < 3.695$. In tal caso abbiamo $4t(t^3 - 3t + e^2) > 4 \cdot 3.69 \cdot ((3.69)^3 - 3 \cdot 3.695 + e^2) > 687 >> e^4 = 54.59...$ In conclusione la funzione sta sempre sopra il suo asintoto obliquo.
Per rispondere al quesito del testo si ricorre all'andamento della derivata prima.
$\lim_{x\to \ln 2^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 1$ ed inoltre la disequazione $f'(x) < 1$ dà come risultato $x > \ln \frac{2e^4}{e^4-4} > \ln 2$. A questo punto si applichi l'esercizio **26.5***. Per quanto riguarda il punto di ascissa negativa si procede allo stesso modo. Il grafico è dato dalla figura 6

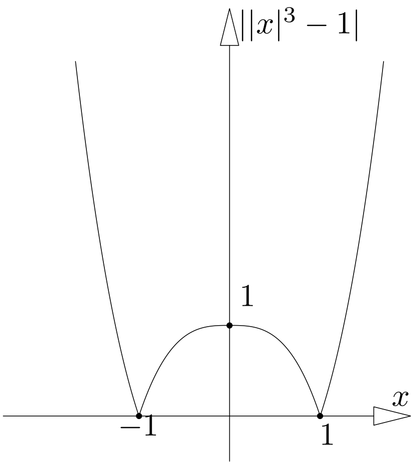
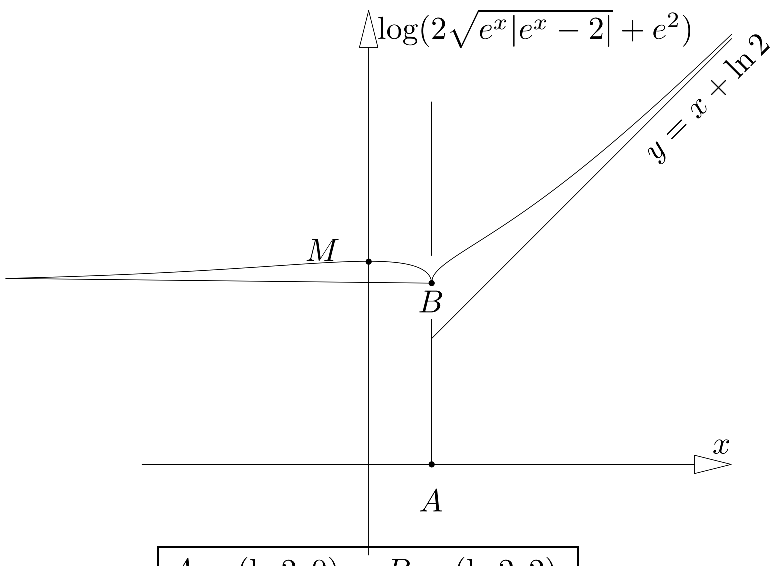


fig.5



$A \equiv (\ln 2, 0)$, $B \equiv (\ln 2, 2)$,
$M \equiv (0, \ln(2 + e^2))$ fig.6

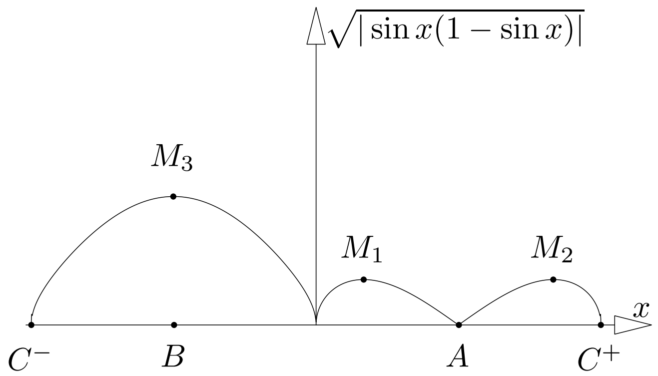
$\boxed{f(x) = \sqrt{|\sin x(1 - \sin x)|}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ per cui f è periodica. Inoltre è continua su tutto $\mathbf{R}$ e derivabile eccezion fatta, tuttalpiù, per i punti in cui si annulla il radicando ossia $x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$. $f(0) = f(\pi) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ e quindi, essendo $f \geq 0$, ne segue che la funzione in quei punti ha dei minimi.

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x(1 - \sin x))^{1/2} & 0 \leq x \leq \pi \\ (-\sin x(1 - \sin x))^{1/2} & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

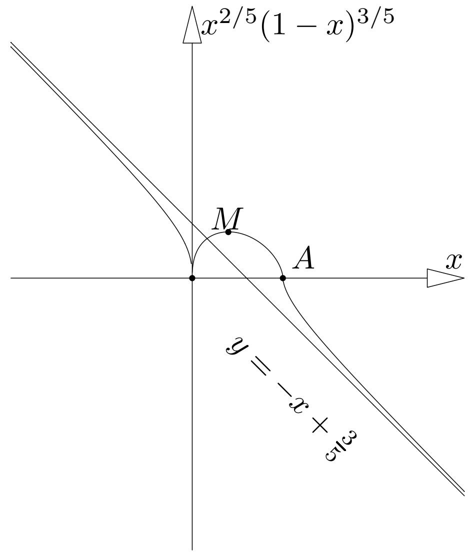
Sia $0 \leq x \leq \pi$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2}\cos x(1 - 2\sin x)(\sin x(1 - \sin x))^{-1/2}$ e quindi è positiva se $0 < x \leq \frac{\pi}{6} \ \vee \ \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5}{6}\pi$. Dunque la funzione è crescente per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \ \vee \ \frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{6}\pi$ e decrescente per

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2} \ \vee\ \frac{5}{6}\pi \le x \le \pi$. $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5}{6}\pi$ sono dei massimi.
Si può verificare che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^\pm} f'(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
Sia $-\pi \le x \le 0$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2}\cos x(-1 + 2\sin x)(-\sin x(1-\sin x))^{-1/2}$ che è positiva se $-\pi \le x \le \frac{-\pi}{2}$ e negativa se $\frac{-\pi}{2} \le x \le 0$ per cui $x = \frac{\pi}{2}$ è un massimo.
Per $0 \le x \le \pi$ la derivata seconda è $f''(x) = \frac{1}{4}(\sin x - \sin^2 x)^{-3/2}(\sin x - 1)^2(-4\sin^2 x - 2\sin x - 1)$ che è sempre negativa (verificare) per cui non vi sono flessi. Lo studente trovi l'espressione analitica della derivata seconda per $-\pi \le x \le 0$ e verifichi che ugualmente non vi sono flessi. Il grafico è dato dalla figura 7.

$\boxed{f(x) = x^{2/5}(1-x)^{3/5}}$ $f(0) = f(1)$ $f \ge 0$ se $x \le 1$. Certamente $x = 0$ è un punto di minimo ma non è detto che la funzione sia ivi derivabile a causa della potenza $\frac{2}{5} < 1$. Vi è un asintoto obliquo $y = -x + \frac{3}{5}$ per $x \to \pm\infty$. $f'(x) = \frac{2-5x}{5x^{3/5}(1-x)^{2/5}} \ge 0$ se $0 \le x \le \frac{2}{5}$. $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = -\infty$. Dunque effettivamente in $x = 0$ la funzione non è derivabile. $f(\frac{2}{5}) = \frac{2^{2/5}3^{3/5}}{5}$. La derivata seconda è data da $f''(x) = \frac{-6}{25x^{8/5}(1-x)^{7/5}} > 0$ per $x > 1$



$M_1 \equiv (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $\quad M_2 \equiv (\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $\quad M_3 \equiv (\frac{-\pi}{2}, \sqrt{2})$
$A \equiv (\frac{\pi}{2}, 0)$, $\quad B \equiv (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\quad C^\pm \equiv (\pm\pi, 0)$ fig.7



$M \equiv (\frac{2}{5}, \frac{2^{\frac{2}{5}}3^{\frac{3}{5}}}{5})$, $\quad A \equiv (1, 0)$ fig.8

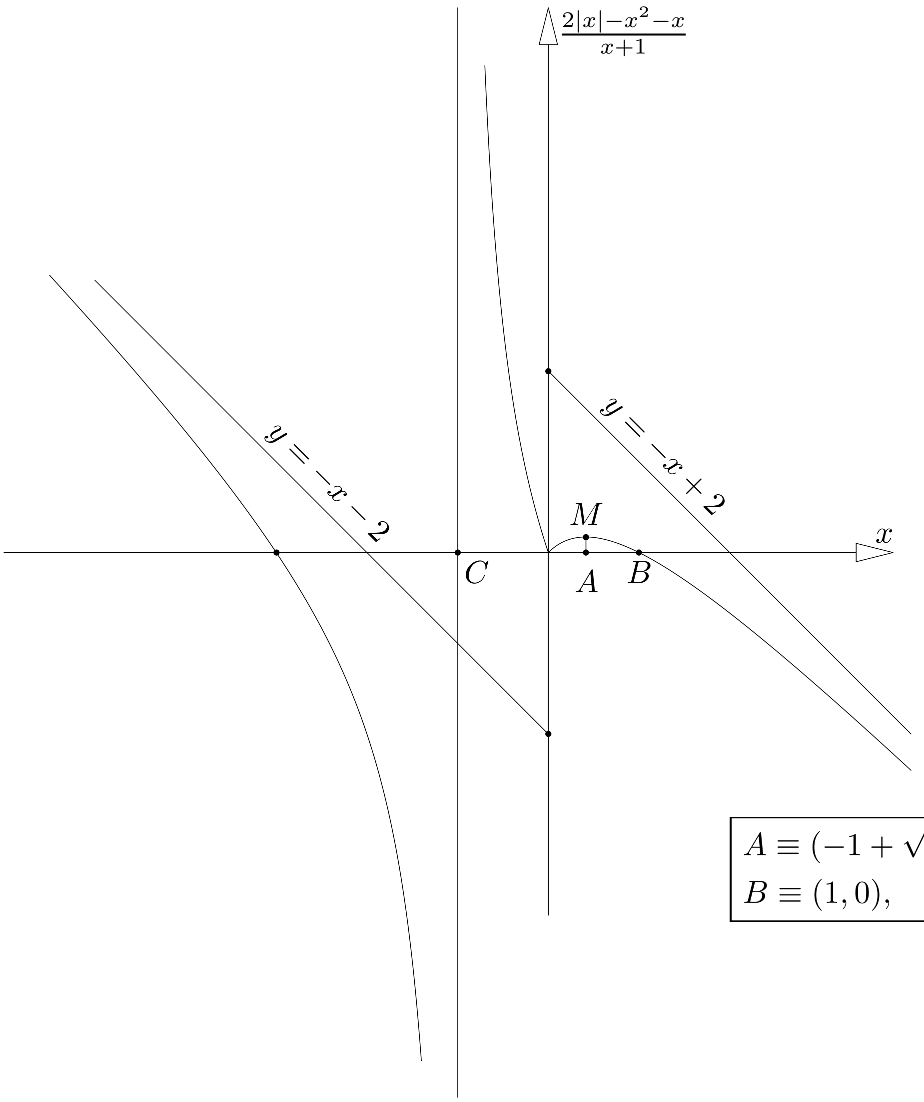
$\boxed{f(x) = \frac{2|x| - x^2 - x}{x+1}}$ $\quad Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$, Segno della funzione: se $x \ge 0$ si ha $f(x) = \frac{x - x^2}{x+1} \ge 0$ se $0 \le x \le 1$; se $x < 0$ allora $f(x) = -\frac{3x + x^2}{x+1} \ge 0$ per $-1 < x \le 0 \ \vee\ x \le -3$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$; la funzione ha come asintoti obliqui; a $+\infty$ la retta di equazione $y = -x + 2$, ed a $-\infty$ la retta di equazione $y = -x - 2$.
Studio della derivata: se $x \ge 0$ si ha $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - 1$ ed è positiva o nulla per $0 \le x \le -1 + \sqrt{2}$ e negativa per $x > -1 + \sqrt{2}$ per cui $-1 + \sqrt{2}$ è un massimo. Per $x < 0$ la derivata è $\frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$ che è sempre negativa e quindi la funzione è sempre decrescente. $x = 0$ è un punto di minimo anche se la funzione non è ivi derivabile essendo $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -3$. La derivata seconda è, per $x \ne 0 \wedge x \ne -1$, è data da $f''(x) = \frac{x}{|x|}\frac{4}{(x+1)^3}$ per cui se $x > 0 \ \vee\ x < -1$ essa è negativa mentre se $-1 < x < 0$ è positiva. Per $x = -1$ la funzione non è continua e quindi non può avere derivata alcuna. Per $x = 0$ la funzione è continua ma non derivabile né una né due volte. Il grafico è dato dalla figura 9.

$\boxed{f(x) = (x + |x| - 4)e^{\frac{1}{|x-3|}}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{3\}$, La funzione è continua in ogni punto del dominio. $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$; la funzione ha un asintoto obliquo a $+\infty$ di equazione $y = 2x - 2$ ed un asintoto orizzontale a $-\infty$ di equazione $y = -4$. Per lo studio è opportuno liberarsi dei moduli introducendo tre diverse espressioni funzionali. Se $x > 3$ la funzione è data da $(2x - 4)e^{\frac{1}{3-x}}$ e la sua derivata da $e^{\frac{1}{x-3}}\frac{2x^2-14x+22}{(x-3)^2}$ da cui segue che per $x = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ vi è un minimo. Inoltre $f''(x) = e^{\frac{1}{x-3}}\frac{3x-8}{(x-3)^2}$ e per $x > 3$ è sempre positiva da cui l'assenza di flessi.

Se $0 \le x < 3$ la funzione è data da $(2x - 4)e^{\frac{1}{-3+x}}$ e la derivata da $e^{\frac{1}{-x+3}}\frac{2x^2-10x+14}{(x-3)^2}$ da cui segue che $f'(x) > 0$ per ogni $0 \le x < 3$. Inoltre si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = e^{-\frac{1}{3}}\frac{14}{9}$. $f''(x) = \frac{2(4-x)}{(x-3)^4}e^{\frac{1}{3-x}}$ che è sempre positiva.

Se $x \le 0$ la funzione è data da $f(x) = -4e^{\frac{1}{-3+x}}$ la cui derivata è data da $e^{\frac{1}{-3+x}}\frac{-4}{(3-x)^2}$ sempre negativa. $f''(x) = -4\frac{(7-2x)}{(x-3)^4}e^{\frac{1}{3-x}}$.

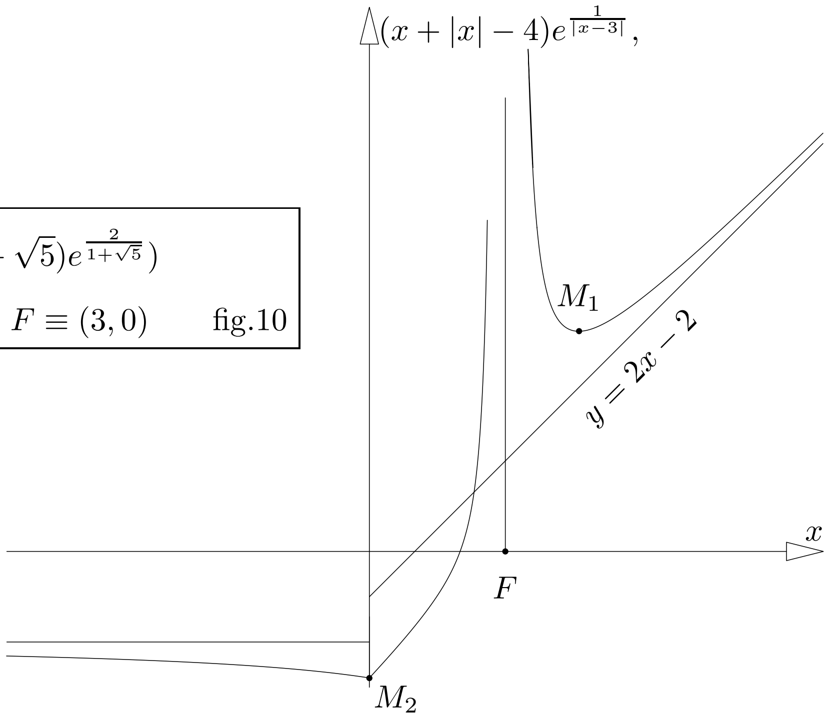
Mostriamo ora che la funzione verifica l'equazione $(2x - 4)e^{\frac{1}{x-3}} > 2x - 2$ ossia la funzione sta sempre sopra l'asintoto per $x > 3$. Infatti abbiamo $2x(e^{\frac{1}{x-3}} - 1) - 4e^{\frac{1}{x-3}} + 2 > 0$; poniamo $y = \frac{1}{x-3} \in (0, +\infty)$ ed otteniamo $2(\frac{1}{y} + 3)(e^y - 1) - 4e^y + 2 > 0$ ossia $\frac{2}{y}(e^y - 1) + 2e^y - 4 > 0$. Sia $h(y) \doteq \frac{e^y-1}{y}$; h verifica le seguenti proprietà: 1) $\lim_{y\to 0} h(y) = 1$ 2) $h(y) \ge 1$ se $y > 0$. Ne segue che $2h(y) + 2e^y > 4$ essendo $e^y > 1$ e quindi quanto volevamo dimostrare. Il grafico è dato dalla figura 10 e si vede chiaramente che l'asintoto giace sempre sopra la funzione.



$A \equiv (-1+\sqrt{2}, 0), M \equiv (-1+\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$
$B \equiv (1, 0)$, $C \equiv (-1, 0)$ fig.9

$M_1 \equiv (\frac{7+\sqrt{5}}{2}, (3+\sqrt{5})e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}})$

$M_2 \equiv (0, -4e^{1/3}), \quad F \equiv (3,0)$ fig.10

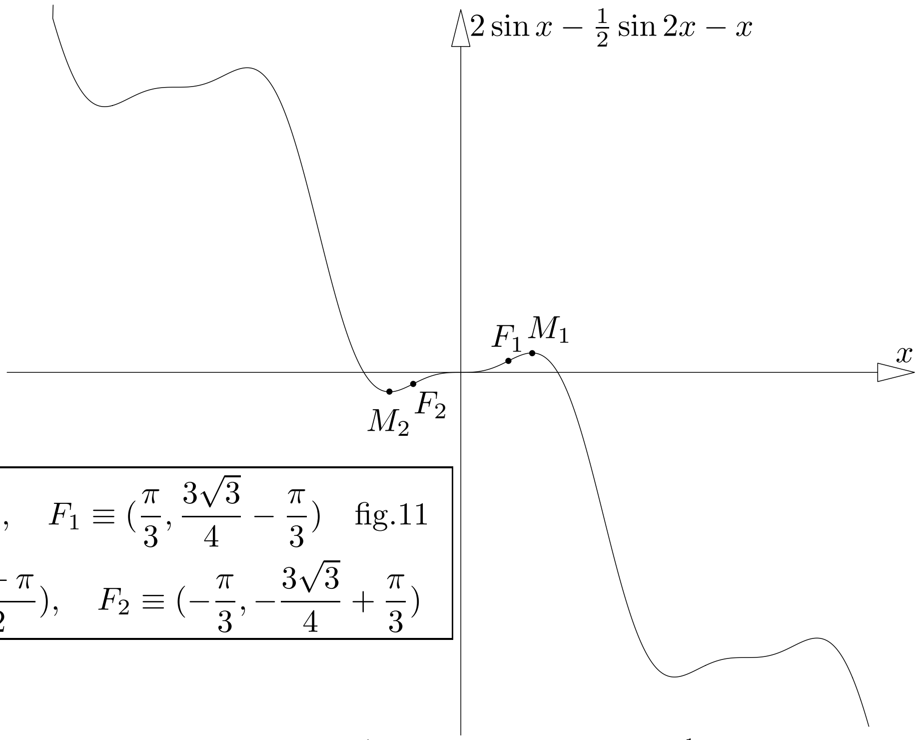


$\boxed{f(x) = 2\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - x}$ $Dom(f) = \mathbf{R}$, $f(x) = -f(-x)$ per cui f è dispari. La funzione non è periodica a causa dell'addendo $-x$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, f non ha asintoti obliqui ed inoltre è continua e derivabile due volte ovunque. $f'(x) = 2\cos x(1-\cos x)$ è periodica di periodo 2π ed èpositiva per $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$ mentre è negativa per $-\pi+2k\pi < x < -\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \pi+2k\pi$. In $x = 0, \pm\pi, 2$, la derivata si annulla e $x = \pm\pi, 2$, sono punti di massimo e di minimo rispettivamente. $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale. $f''(x) = 2\sin x(2\cos x - 1)$ ed anch'essa ha periodo 2π. La concavità è diretta verso l'alto se $-\pi+2k\pi < x < -\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee\ 2k\pi < x < \frac{\pi}{3}+2k\pi)$ e verso il basso nell'insieme complementare. La struttura delle due derivate si ripete in ogni intervallo di lunghezza 2π multiplo di $[-\pi,\pi]$. Il grafico è dato dalla figura 11.

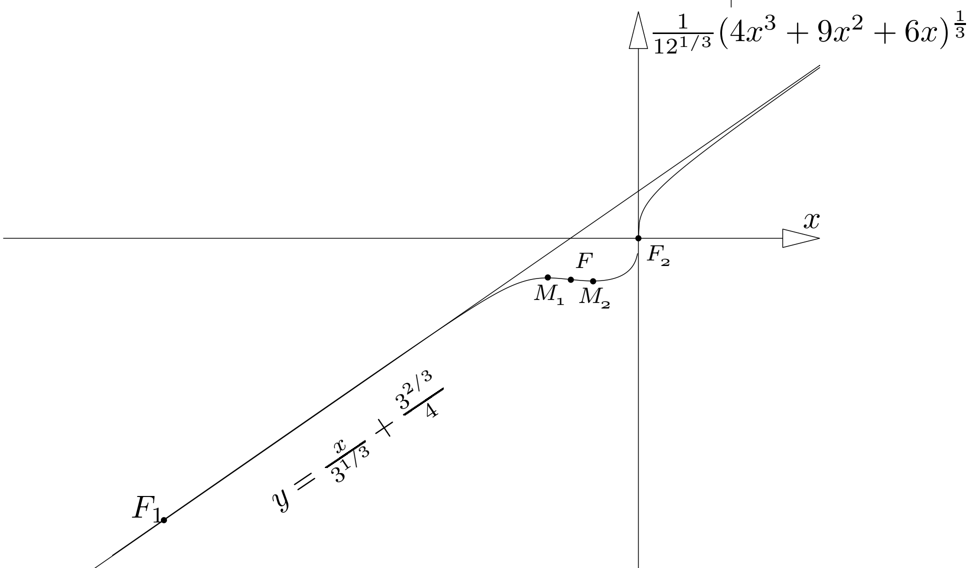
$\boxed{f(x) = \frac{1}{12^{1/3}}(4x^3+9x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}$, segno della funzione: $f(x) = \frac{1}{12^{1/3}}x^{1/3}(4x^2+9x^x+6)^{1/3}$; poiché $81-96<0$, $f\geq 0$ se $x\geq 0$ e $f<0$ se $x<0$. La funzione ha come asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$ la retta di equazione $y = \frac{x}{3^{1/3}} + \frac{3^{2/3}}{4}$
Derivata prima $f'(x) = \frac{2}{12^{1/3}}\frac{2x^2+3x+1}{(4x^3+9x^2+6x)^{2/3}}$ e $f'(x)>0$ se $x<-1 \ \vee\ x>-\frac{1}{2}$ per cui il punto $(-1, -\frac{1}{12^{1/3}})$ è un massimo mentre $(-\frac{1}{2}, (\frac{-5}{48})^{1/3})$ è un minimo. $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$
Derivata seconda $f''(x) = \frac{-2}{12^{1/3}}\frac{x^2+6x+4}{(4x^3+9x^2+6x)^{5/3}}$ che è positiva per $x < -3-\sqrt{5} \vee -3+\sqrt{5} < x < 0$. Abbiamo quindi tre flessi di coordinate $(-3-\sqrt{5}, -(\frac{45+20\sqrt{5}}{3})^{1/3})$, $(-3+\sqrt{5}, (\frac{-45+20\sqrt{5}}{3})^{1/3})$, $(0,0)$. Il grafico è dato dalla figura 12. Si noterà che i valori della ascissa di poco inferiori al

valore di M_1 grafico della funzione ed asintoto sono pressoché identici. Per capire come stanno le cose bisogna risolvere l'equazione $\frac{1}{12^{1/3}}(4x^3+9x^2+6x)^{\frac13} < \frac{4x+3}{3^{1/3}4}$ che dopo semplice algebra diventa $-1<12x$ ossia $x>-\frac{1}{12}$. Se ne deduce che per $x=-\frac{1}{12}$ la funzione attraversa l'asintoto che automaticamente diventa più piccolo definitivamente per $x\to-\infty$.

Data la funzione $f(x)=(x^3+ax^2+bx)^{1/3}$ la derivata seconda è $f''(x)=\frac{2}{9f^{5/3}}((3b-a^2)x^2-abx-b^2)=\frac{2}{9f^{5/3}}((3b-a^2)x^2-abx-b^2))$



$$M_1\equiv(\frac{\pi}{2},\frac{4-\pi}{2}),\quad F_1\equiv(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt3}{4}-\frac{\pi}{3})\quad \text{fig.11}$$
$$M_2\equiv(-\frac{\pi}{2},-\frac{4+\pi}{2}),\quad F_2\equiv(-\frac{\pi}{3},-\frac{3\sqrt3}{4}+\frac{\pi}{3})$$



$$F_1\equiv(-3-\sqrt5,-(\frac{45+20\sqrt5}{3})^{1/3}),F\equiv(-3+\sqrt5,(\frac{-45+20\sqrt5}{3})^{1/3})$$
$$F_2\equiv(0,0),\quad M_1\equiv(-1,\frac{-1}{12^{1/3}}),\quad M_2\equiv(-\frac12,(\frac{-5}{48})^{1/3})\quad \text{fig.12}$$

$\boxed{f(x)=\sin x-x\cos x}$ $Dom(f)=\mathbf{R}$, $f(x)=-f(-x)$ per cui studiamo solo $x\ge0$. $f'(x)=x\sin x\ge0$ per $0\le x\le\pi$ e multipli di 2π. $x=\pi$ è un massimo mentre 2π è un minimo. $x=0$

è un flesso.

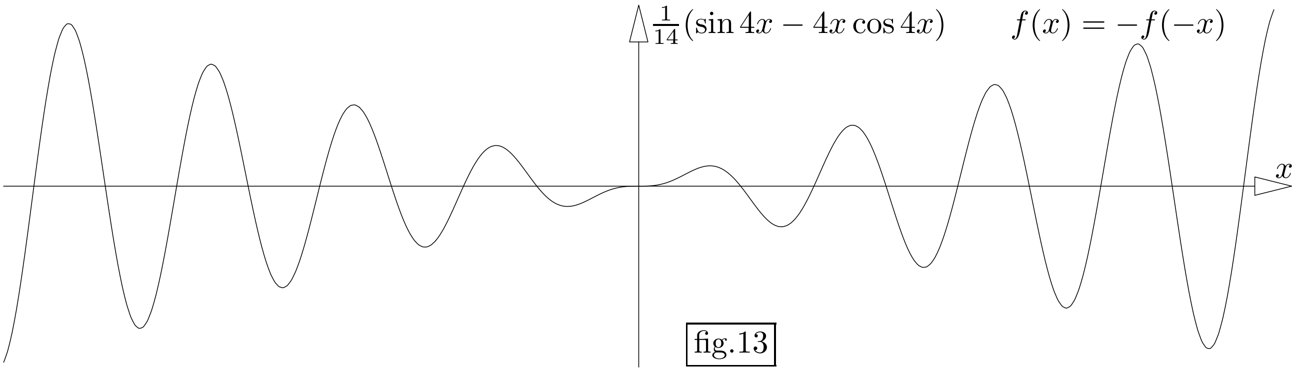
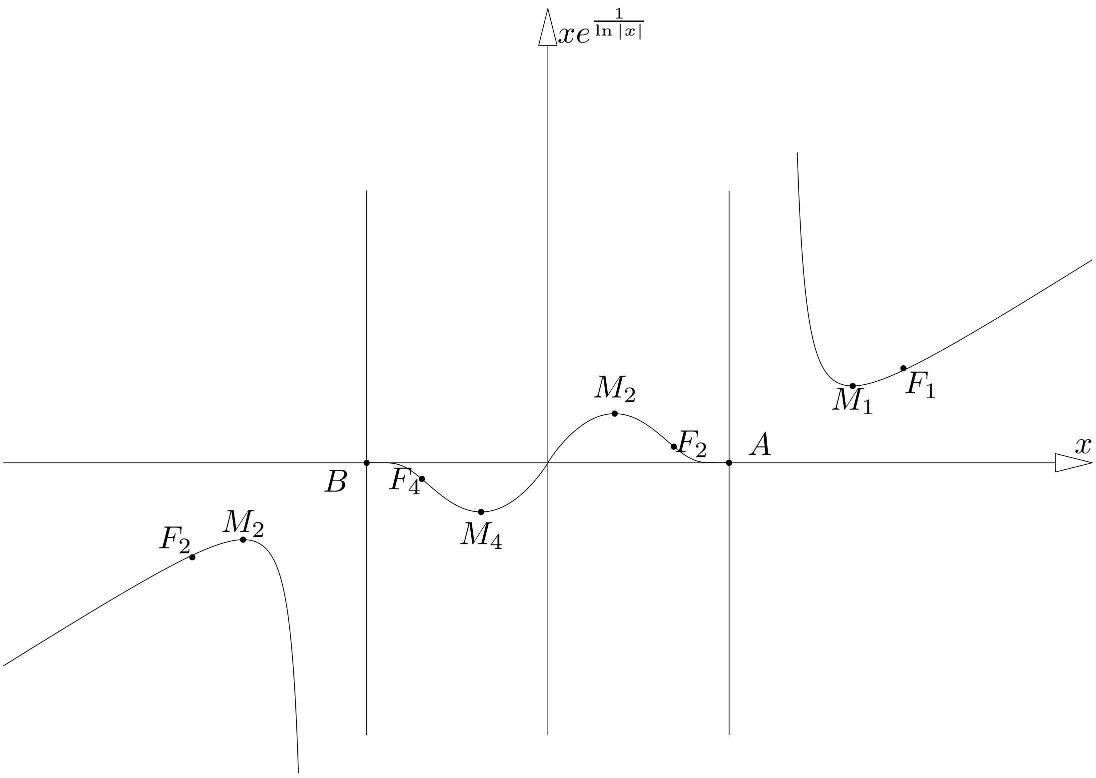


fig.13

$\boxed{f(x) = xe^{\frac{1}{\ln|x|}}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\setminus\{0, \pm 1\}$, $f(x) = -f(-x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, non vi sono asintoti obliqui. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$. $f(x) \geq 0$ se $x \geq 0$. $f'(x) = e^{\frac{1}{\ln|x|}}(1 - \frac{1}{\ln^2|x|}) \geq 0$ se $x \leq -e \ \vee\ -\frac{1}{e} \leq x \leq \frac{1}{e} \ \vee\ x \geq e$. $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$

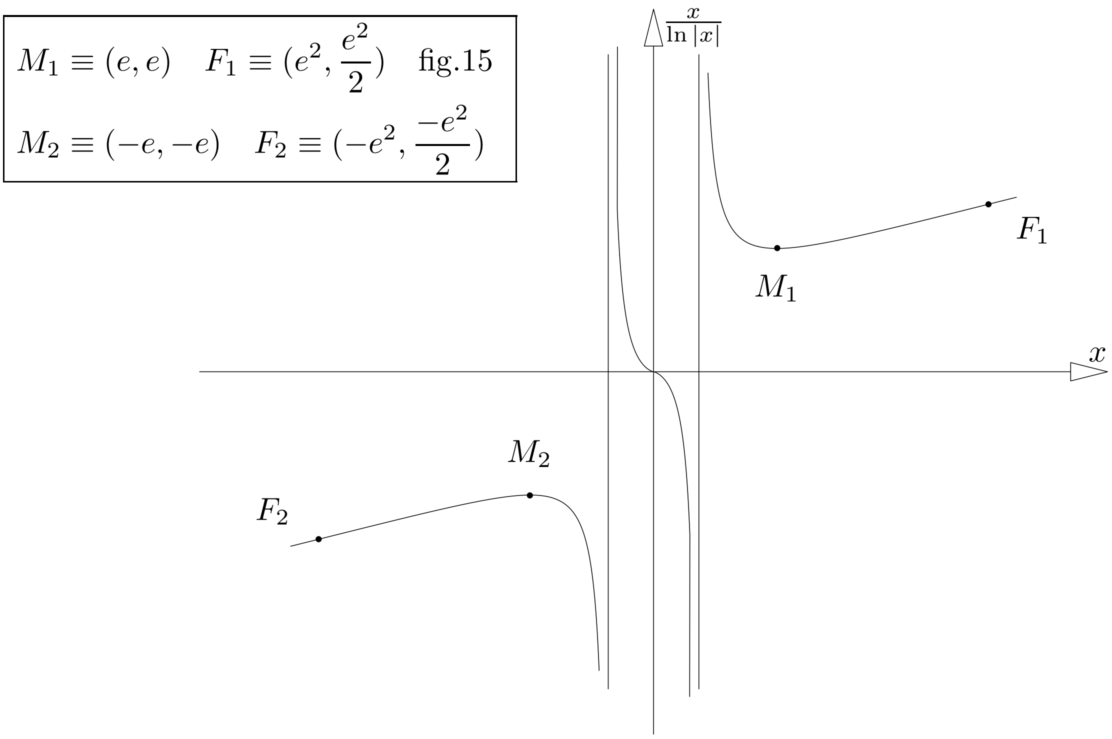
$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{\ln|x|}}}{x\ln^4|x|}\big(1 + 2\ln|x| - \ln^2|x|\big) \geq 0$ se $-e^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \leq x \leq 0 \vee\ e^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \leq x < 1 \ \vee\ 1 < x \leq e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$.



$M_2 \equiv (\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}),\ F_1 \equiv (e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}, e^{\frac{4-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}),\ M_1 \equiv (e, e^2)$

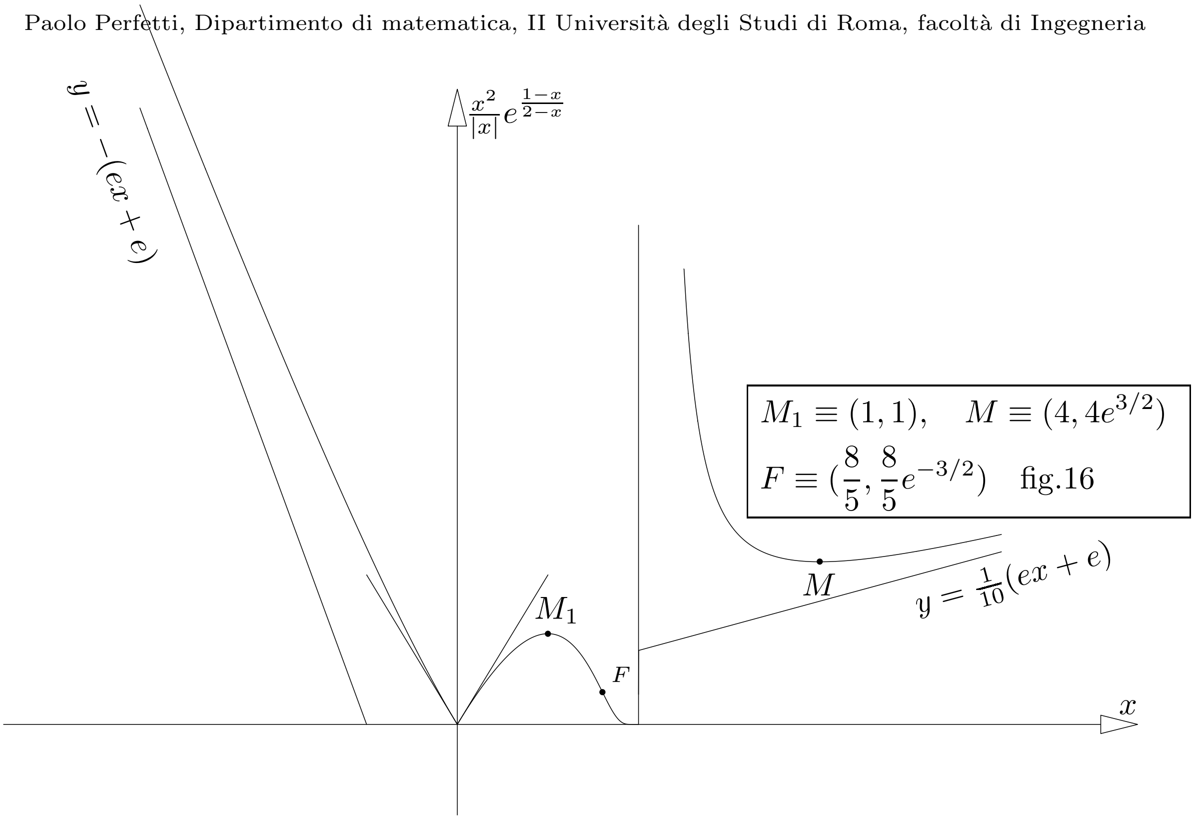
$M_4 \equiv -M_2,\ M_3 \equiv -M_1,\ F_3 \equiv -F_1,\ F_4 \equiv -F_2,$ fig.14

$\boxed{f(x) = \frac{x}{\ln|x|}}$ $f(x) = -f(-x)$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{0, \pm 1\}$, , $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$; la funzione è positiva o nulla se $-1 < x \le 0 \ \vee \ 1 < x$. Prendiamo solo le x positive. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ge 0$ se $x \ge e$; quindi $x = e$ è un minimo ed $f(e) = e$. La derivata seconda è $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \ge 0$ se $1 \le x \le e \ \vee \ x \ge e^2$. $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ ma la funzione non ha un minimo in quanto la derivata prima è negativa fra -1 ed 1. $\lim_{x\to 0} f''(x) = \mp\infty$.

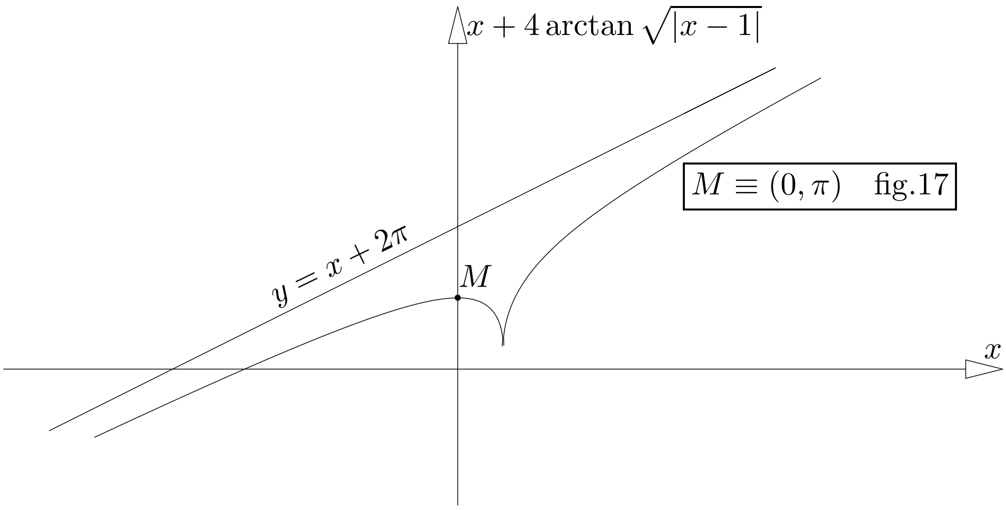


$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{|x|} e^{\frac{1-x}{2-x}}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{0, 2\}$, $f \ge 0$ per ogni $x \in Dom(f)$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ da cui $x = 0$ è certamente di minimo. La funzione ha l'asintoto $y = e(x+1)$ per $x \to +\infty$ ed inoltre $f(x) > e(x+1)$ per $x > 2$ (da dimostrare dopo). Per $x \to -\infty$ l'asintoto è dato da $y = -ex - e$ $f(x) > -ex - e$ per $x < 0$. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

La derivata è $f'(x) = \frac{x}{|x|} e^{\frac{1-x}{2-x}} \frac{x^2 - 5x + 4}{(2-x)^2}$ e quindi il punto $(1, 1)$ è un massimo mentre $(4, 4e^{3/2})$ è un minimo. Per $x < 0$ la funzione è decrescente $\lim_{x\to 0} f'(x) = \sqrt{e}$. $f''(x) = \frac{x}{|x|} e^{\frac{1-x}{2-x}} \frac{5x - 8}{(2-x)^4}$ e quindi la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per $x > \frac{8}{5}$ e per $x < 0$. Il grafico è il seguente (per $x > 2$ le ordinate sono contratte di un fattore 10)

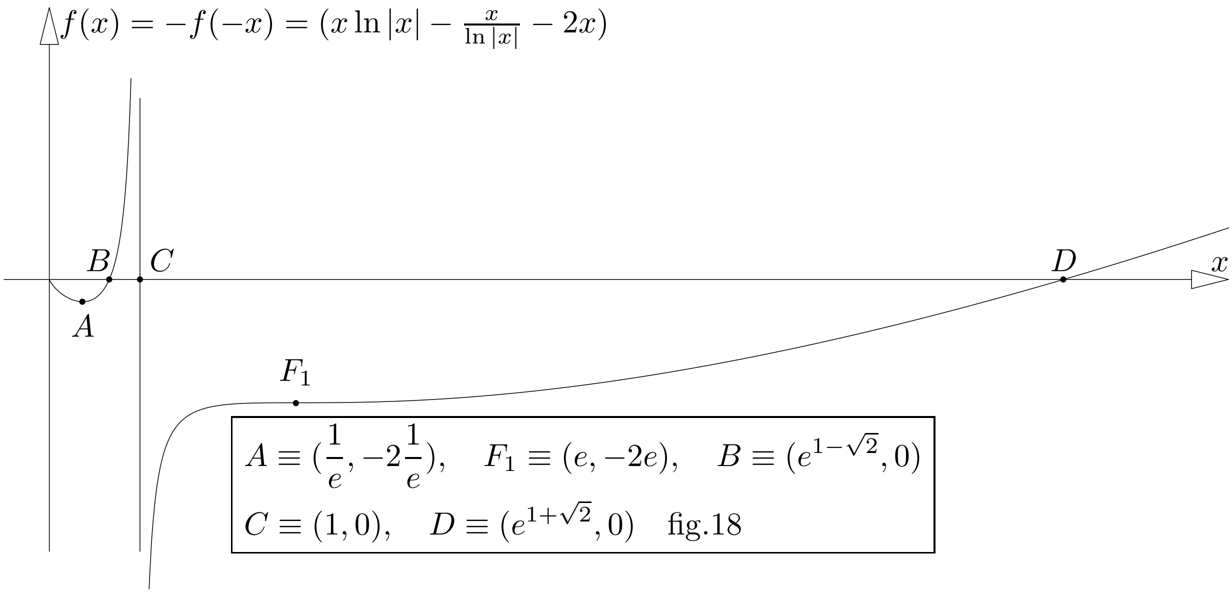


$\boxed{f(x) = x + 4 \arctan \sqrt{|x-1|}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la retta di equazione $y = x + 2\pi$, è un asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Derivata prima per $x \geq 1$ $f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x-1}} \frac{1}{x} > 0$ per ogni x; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$, $f(1) = 1$. Se $x < 1$ la derivata è data da $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}(2-x)} \geq 0$ che è equivalente a $(2-x)^2\sqrt{1-x} > 4$ ossia $x(-x^2 + 5x - 8) \geq 0$. Se $0 \leq x \leq 1$ bisogna che $-x^2 + 5x - 8 \geq 0$ e non è mai vero per cui $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f'(x) \leq 0$ (è zero per $x = 0$). Viceversa se $x < 0$ la derivata prima è sempre positiva. Se $x \geq 1$ $f''(x) = \frac{2-3x}{x^2(x-1)^{3/2}} \leq 0$ per ogni x mentre se $x < 1$ allora $f''(x) = \frac{3x-4}{(2-x)^2(1-x)^{3/2}} < 0$. Il grafico è dato in figura 17



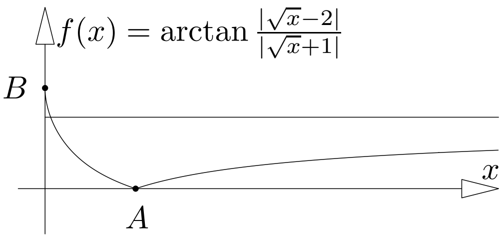
$\boxed{f(x) = x \ln|x| - \frac{x}{\ln|x|} - 2x}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{0, \pm 1\}$, $f(x) = -f(-x)$ per cui basta studiare la funzione per x positive. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ per cui non ci sono asintoti obliqui né orizzontali; $\lim_{x\to\pm 1} f(x) = \mp\infty$ e quindi due asintoti verticali. Segno della funzione

$f(x) = x\frac{\ln^2|x|-2\ln|x|-1}{\ln|x|} \geq 0$ per $e^{1-\sqrt{2}} \leq x < 1 \;\vee\; x > e^{1+\sqrt{2}}$. La derivata prima è data da $f'(x) = \frac{\ln^3 x - \ln x - \ln^2 x + 1}{\ln^2 x} \geq 0$ per $x > \frac{1}{e}$. $f''(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln^2 x + \ln x + 2)}{x\ln^3 x} \geq 0$ per $0 < x < 1 \vee x \geq e$



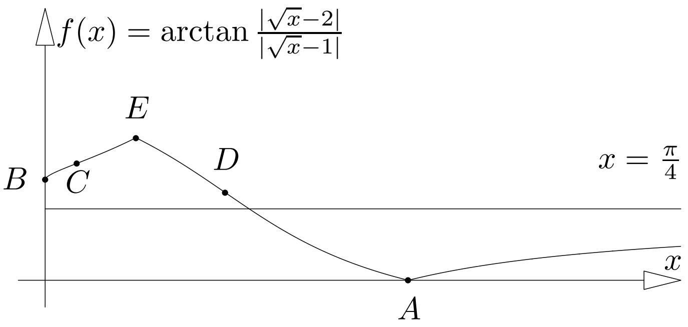
$A \equiv (\frac{1}{e}, -2\frac{1}{e})$, $F_1 \equiv (e, -2e)$, $B \equiv (e^{1-\sqrt{2}}, 0)$
$C \equiv (1,0)$, $D \equiv (e^{1+\sqrt{2}}, 0)$ fig.18

$\boxed{f(x) = \arctan\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}+1|}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, $f(0) = \arctan 2$, $f(4) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}+1|} \geq 0$ per $x \geq 4$ ed in questo caso la derivata è $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}\frac{1}{2x+5-2\sqrt{x}}$ il cui segno è sempre positivo. $f'(4^+) = \frac{3}{20}$. Se $0 \leq x < 4$ allora la derivata è uguale alla precedente con il segno meno e quindi è sempre negativa. $f'(0^+) = -\infty$ e la derivata seconda è $f''(x) = \frac{x-4}{|x-4|}\frac{-3}{(4x^{3/2}+10\sqrt{x}-4x)^2}\frac{6x-4\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}}$ e quindi è sempre negativa se $x \geq 4$ mentre è sempre positiva per $0 \leq x < 4$. Il grafico è dato in figura 19.



$A \equiv (4,0)$, $B \equiv (0, \arctan 2)$
fig.19

$\boxed{f(x) = \arctan\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}-1|}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \backslash \{1\}$ $f(0) = \arctan 2$, $f(4) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \geq 0$ per $x \geq 4 \;\vee\; 0 \leq x < 1$ ed in questo caso la derivata è $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{2x+5-6\sqrt{x}}$ il cui segno è sempre positivo. $f'(4^+) = \frac{1}{12}$. Se $1 < x < 4$ allora la derivata è uguale alla precedente con il segno meno e quindi è sempre negativa. $f'(0^+) = +\infty$ e la derivata seconda per $x \geq 4 \;\vee\; 0 \leq x < 1$ è $f''(x) = \frac{-6x+12\sqrt{x}-5}{4x^{3/2}(2x-6\sqrt{x}+5)^2}$ e quindi è positiva per $1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \leq x < 1$. Per $1 < x \leq 4$ la derivata seconda è la precedente cambiata di segno ed è positiva per $1 < x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$. Il grafico è dato in figura 20.

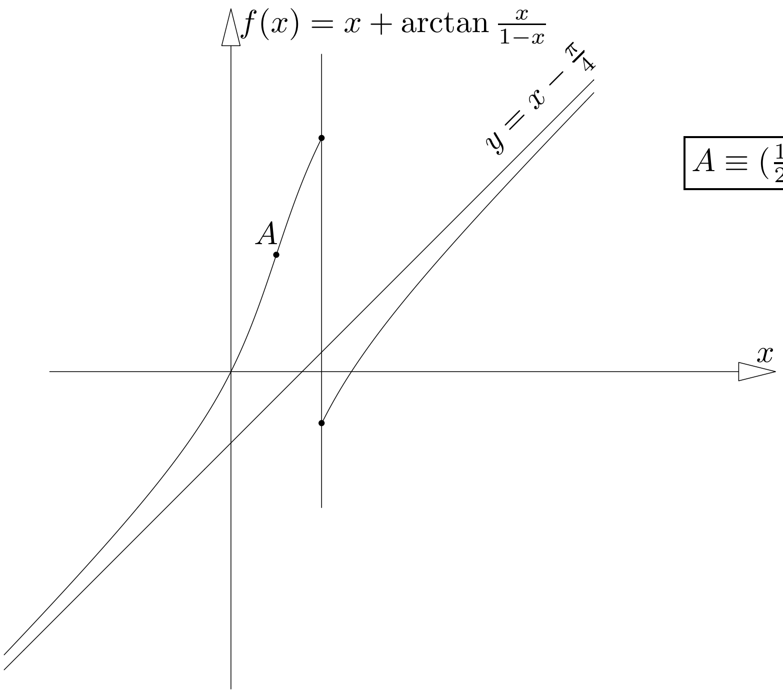


$A \equiv (4, 0), B \equiv (0, \arctan 2), E \equiv (1, \dfrac{\pi}{2})$

$C \equiv ((1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}})^2, \arctan(\sqrt{6} + 1))$

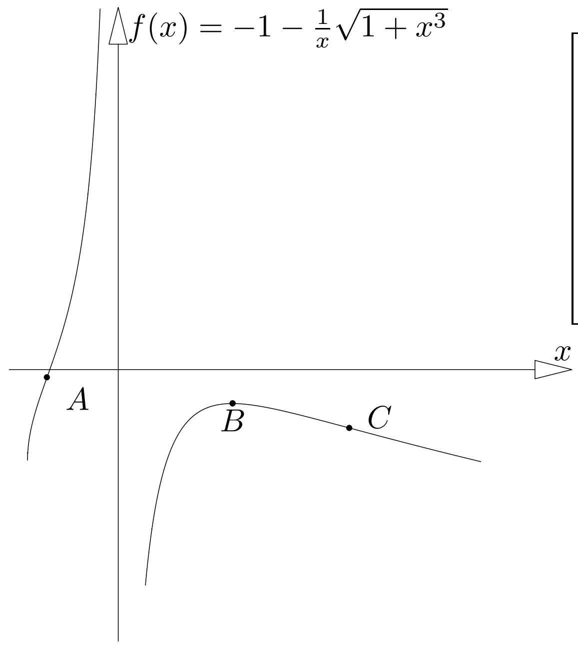
$D \equiv ((1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}})^2, \arctan(\sqrt{6} - 1))$ fig.20

$\boxed{f(x) = x + \arctan \frac{x}{1-x}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{1\}$, $f(0) = 0$ $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = 1 \mp \frac{\pi}{2}$, asintoto abliquo di equazione $y = x - \frac{\pi}{4}$; $f(x) > x - \frac{\pi}{4}$ per $x < 1$ e viceversa per $x > 1$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2+(1-x)^2}$ che è sempre positiva $f''(x) = \frac{2-4x}{(x^2+(1-x)^2)^2} \geq 0$ per $x \leq \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = 2$ ed il grafico è in figura 21



$A \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$ fig.21

$\boxed{f(x) = -1 - \frac{1}{x}\sqrt{1+x^3}}$ $Dom(f) = \{x \geq -1\}\backslash\{0\}$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ e non ci sono asintoti obliqui. Le derivate sono date da $f'(x) = \frac{2-x^3}{2x^2\sqrt{1+x^3}}$ $f'' = \frac{8+16x^3-x^6}{-(1+x^3)^{3/2}4x^3}$. Il punto di coordinate $(2^{1/3}, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}})$ è di massimo mentre i punti di coordinate $((8 \pm 6\sqrt{2})^{1/3}, f((8 \pm 6\sqrt{2})^{1/3})))$ sono due flessi. Il grafico è dato in figura 22

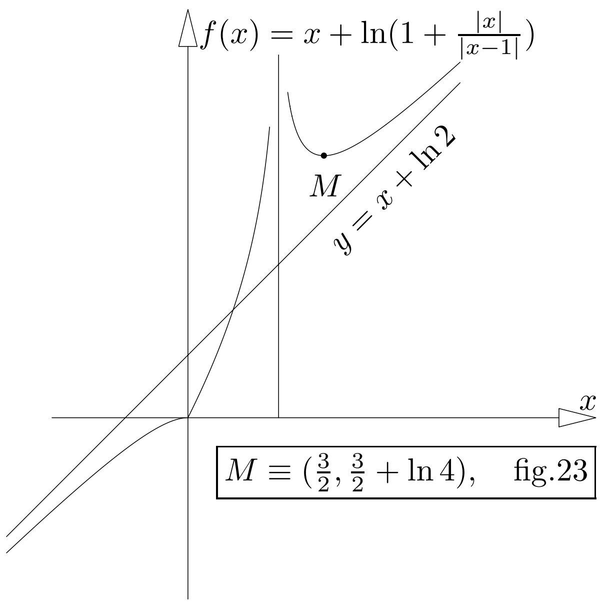


$$A \equiv ((8-6\sqrt{2})^{1/3}, -1 - \frac{\sqrt{9-6\sqrt{2}}}{(8-6\sqrt{2})^{1/3}})$$

$$C \equiv ((8+6\sqrt{2})^{1/3}, -1 - \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{(8+6\sqrt{2})^{1/3}})$$

$$B \equiv (2^{1/3}, -1 - \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}}), \quad \text{fig.22}$$

$\boxed{f(x) = x + \ln(1 + \frac{|x|}{|x-1|})}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{1\}$. La funzione ha un asintoto obliquo a $\pm\infty$ di equazione $y = x + \ln 2$. $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Per $x \le 0 \ \vee \ x > 1$ la derivata prima è data da $f'(x) = \frac{x(2x-3)}{(x-1)(2x-1)}$ per cui la funzione è crescente per $x \le 0 \ \wedge \ x \ge \frac{3}{2}$. La derivata seconda è $f''(x) = \frac{4x-3}{(2x-1)^2(x-1)^2}$ che è sempre positiva per $x \ge 1$ e negativa per $x \le 0$. In $x = \frac{3}{2}$ vi è un minimo. Per $0 \le x < 1$ la funzione è data da $f(x) = x - \ln(1-x)$ la cui derivata prima è $f'(x) = 1 + \frac{1}{1-x} = \frac{2-x}{1-x} > 0$ per $0 \le x < 1$. L'origine è un punto di flesso ma la funzione non è ivi derivabile. Il grafico è in figura 23



$\boxed{M \equiv (\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \ln 4), \quad \text{fig.23}}$

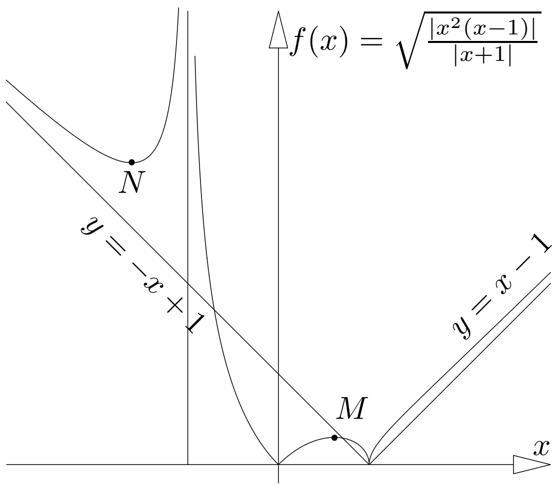
$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{|x^2(x-1)|}{|x+1|}}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$, $f(x) = |x|\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}$ e la funzione è data da:

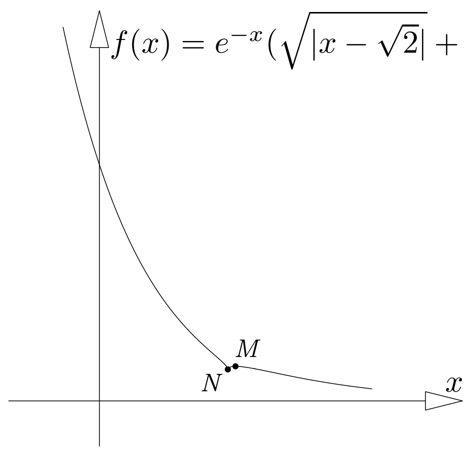
$x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ se $x \ge 1$, $\quad x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ se $0 \le x \le 1$, $\quad -x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ se $-1 \le x \le 0$, $\quad -x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ se $x < -1$

$\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$. Per $x \to +\infty$ la funzione è data da $f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2}{x+1}} = x(1 - \frac{1}{x+1} +$

$O(\frac{1}{x^2}) = x - \frac{1}{1+\frac{1}{x}} + O(\frac{1}{x}) = x-1+O(\frac{1}{x})$ da cui l'esistenza dell'asintoto obliquo di equazione $y = x-1$. Per $x \to -\infty$ l'asintoto è dato da $y = -x+1$. Per $x > 1$ la derivata è $f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$ da cui segue che la funzione è sempre crescente. Inoltre risulta $f(x) > x-1$ e quindi sta sempre sopra l'asintoto. $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$. Per $0 \le x \le 1$ $f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1-x-x^2}{1-x^2} \ge 0$ per $0 \le x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e quindi $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è un massimo. Inoltre si ha $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$. Per $-1 \le x \le 0$ abbiamo $f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{-1+x+x^2}{1-x^2} < 0$ sempre da cui la decrescenza della funzione. Inoltre si ha $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$. Per $x < -1$ si ha $f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}\frac{1-x-x^2}{x^2-1}$ da cui segue che vi è un minimo in $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Il grafico è in figura 24

$\boxed{f(x) = e^{-x}(\sqrt{|x-\sqrt{2}|}+\sqrt{2})}$ $Dom(f) = \mathbf{R}$, $f > 0$ per ogni x, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Non ci sono asintoti verticali nè obliqui. Per $x > \sqrt{2}$ si ha $f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x-\sqrt{2}}}(1 - 2x + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{x-\sqrt{2}}) \ge 0$. La parentesi tonda può riscriversi come $1 - 2(x-\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\sqrt{x-\sqrt{2}} \ge 0$ e ponendo $t = x - \sqrt{2}$ si perviene ad una disequazione di secondo grado $1 - 2t^2 - 2\sqrt{2}t \ge 0$ che è risolta per $-1-\frac{1}{\sqrt{2}} \le t \le 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \le x \le -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2}$. Ne segue che la funzione è crescente per $\sqrt{2} \le x \le -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2}$ e decrescente per $x > -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2}$ e quindi per $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2}$ c'è un massimo. Per $x \le \sqrt{2}$ la derivata è $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{-x+\sqrt{2}}}(1 - 2x + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{-x+\sqrt{2}})$ e la parentesi tonda può scriversi come $(1+\sqrt{2}(\sqrt{2}-x))^2$ che è sempre positivo e la funzione è decrescente. Il punto di ascissa $x = \sqrt{2}$ è un minimo. Il grafico è in figura 25.



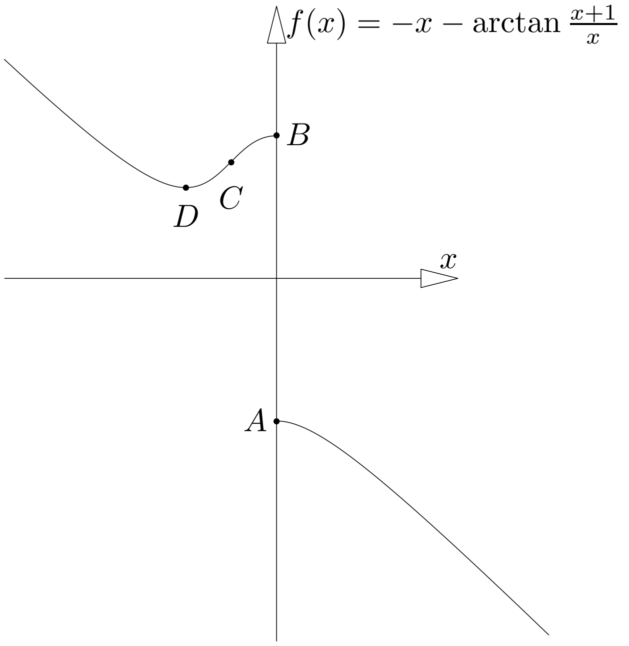


$$M \equiv (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22})$$
$$N \equiv (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{\sqrt{5}+2}) \quad \text{fig.24}$$

$$M \equiv (\frac{3}{2}, e^{-3/2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}))$$
$$N \equiv (\sqrt{2}, e^{-\sqrt{2}}\sqrt{2}) \quad \text{fig.25}$$

$\boxed{f(x) = -x - \arctan\frac{x+1}{x}}$ $Dom(f) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, $y = -x + \frac{\pi}{4}$ è l'asintoto obliquo a $+\infty$ mentre $y = -x - \frac{\pi}{4}$ è l'asintoto obliquo a $-\infty$. $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. $f'(x) =$

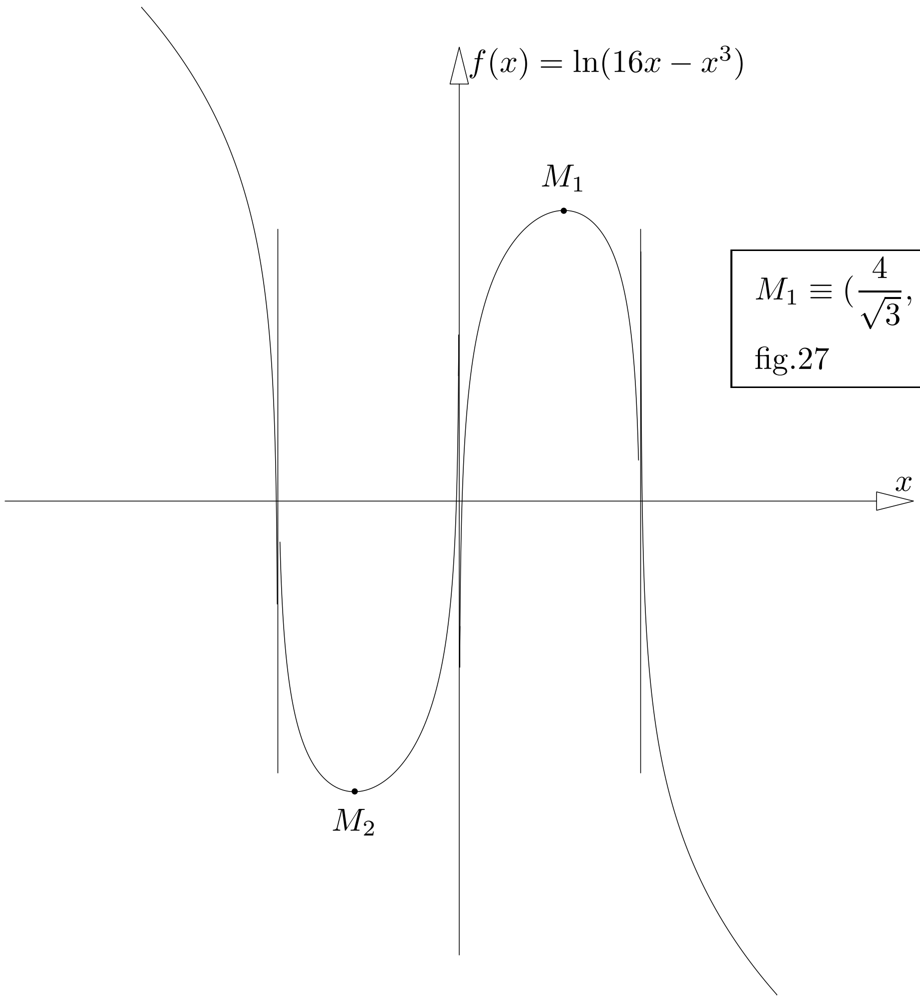
$-1+\frac{1}{(x-1)^2+x^2}$, da cui la funzione è crescente per $-1 \le x \le 0$ ed inoltre $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$; $f''(x) = -\frac{2+4x}{x^2+(1-x)^2}$ per cui la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$. Il grafico è dato in figura 26.



$A \equiv (0, -\frac{\pi}{2}), \quad B \equiv (0, \frac{\pi}{2})$
$C \equiv (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}), \quad D \equiv (-1, 1)$ fig.26

3.6

$\boxed{f(x) = \ln(16x - x^3)}$ $Dom(f) = (-\infty, -4) \cup (0, 4)$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = \frac{16-3x^2}{16x-x^3} \ge 0$ per $0 < x \le \frac{4}{\sqrt{3}}$ e quindi si ha un massimo nel punto $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \ln(\frac{64}{\sqrt{3}} - \frac{64}{3\sqrt{3}}))$. La derivata seconda è data da $f''(x) = \frac{-9x^4+6x^3-256}{x^2(16-x^2)^2}$. Per avere la funzione in $(-4, 0) \cup (4, +\infty)$ basta fare $f(x) = -f(-x) = -\ln(x^3 - 16x)$. Il grafico è il seguente



$M_1 \equiv (\frac{4}{\sqrt{3}}, \ln\frac{128}{3\sqrt{3}}),\ M_2 \equiv -M_1$

fig.27

5.6

$\boxed{f(x) = \frac{(x+1/x)^6 - x^6 - 1/x^6 - 2}{(x+1/x)^3 - x^3 - 1/x^3}}$ Rimaneggiando (si può definire $t = x+1/x$) si vede che la funzione è in realtà $f(x) = 3(x + \frac{1}{x})$ il cui grafico è immediato.