Secondo minicompito

Il primo quesito vale 0.5 punti e 0.75 il secondo. Gli elaborati vanno consegnati alla fine della lezione dell'11/5/2017 su di un foglio protocollo oppure su più fogli slegati che in tal caso vanno spillati. Fogli sfusi non sono ammessi a meno che non siano contenuti all'interno di una cartellina (tipo quelle trasparenti)ed in tal caso il nome va messo su ogni foglio. Chi presenta un unico foglio protocollo è sufficiente che metta il nome solo sulla prima pagina. La risoluzione degli esercizi è breve, una volta capito cosa bisogna fare. **Il nome deve essere facilmente leggibile e la scrittura pure (evitare “zampe di gallina”)** . Non è possibile consegnare le risposte successivamente; eventualmente è possibile farlo alla fine della lezione dell'8/5/2017. Alternativamente è possibile lasciare l'elaborato, sempre entro le 17.30 dell'11/5/2017, nella mia buca delle lettere che si trova nel Dipartimento di Matematica (zona Sogene). La buca delle lettere si trova sullo stesso piano di “Focal Point” ed è distante 20 metri circa da esso (percorrere il corridoio alle spalle di “Focal Point”).

1) *È data la curva parametrica* $\underline{\gamma} = \underline{\zeta} \cup \underline{\sigma} \cup \underline{\eta} \cup \underline{\xi}$ *con*

$$\underline{\zeta}\colon [-2,-1] \to \mathbf{R}^2, \quad \zeta_1(t) = t^3 - t, \qquad \zeta_2(t) = t^2 - 1$$

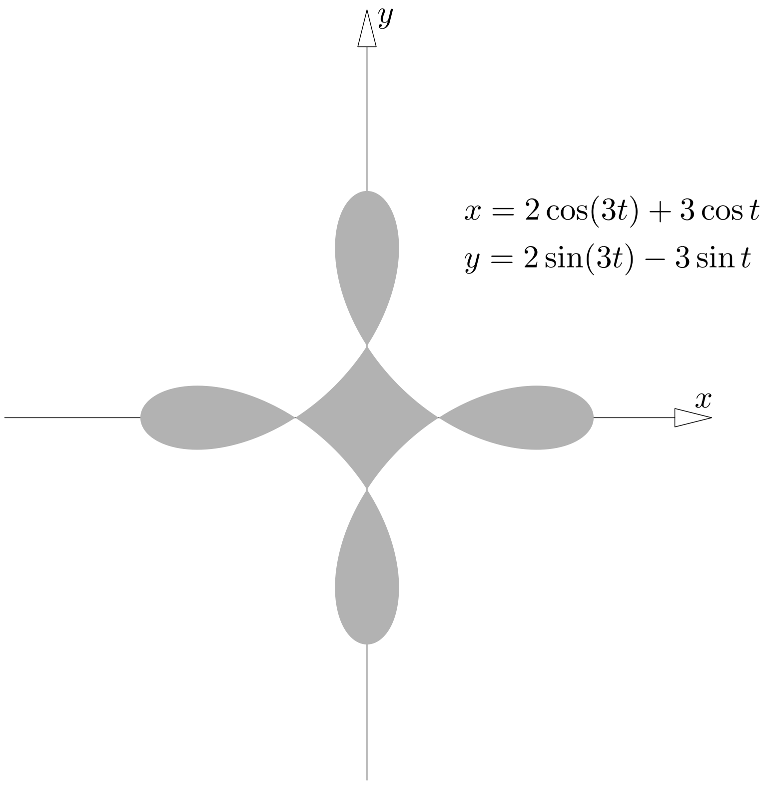
$$\underline{\sigma}\colon [-1,1] \to \mathbf{R}^2, \quad \sigma_1(t) = \sqrt{29}(t^3 - t), \qquad \sigma_2(t) = \sqrt{29}(t^2 - 1)$$

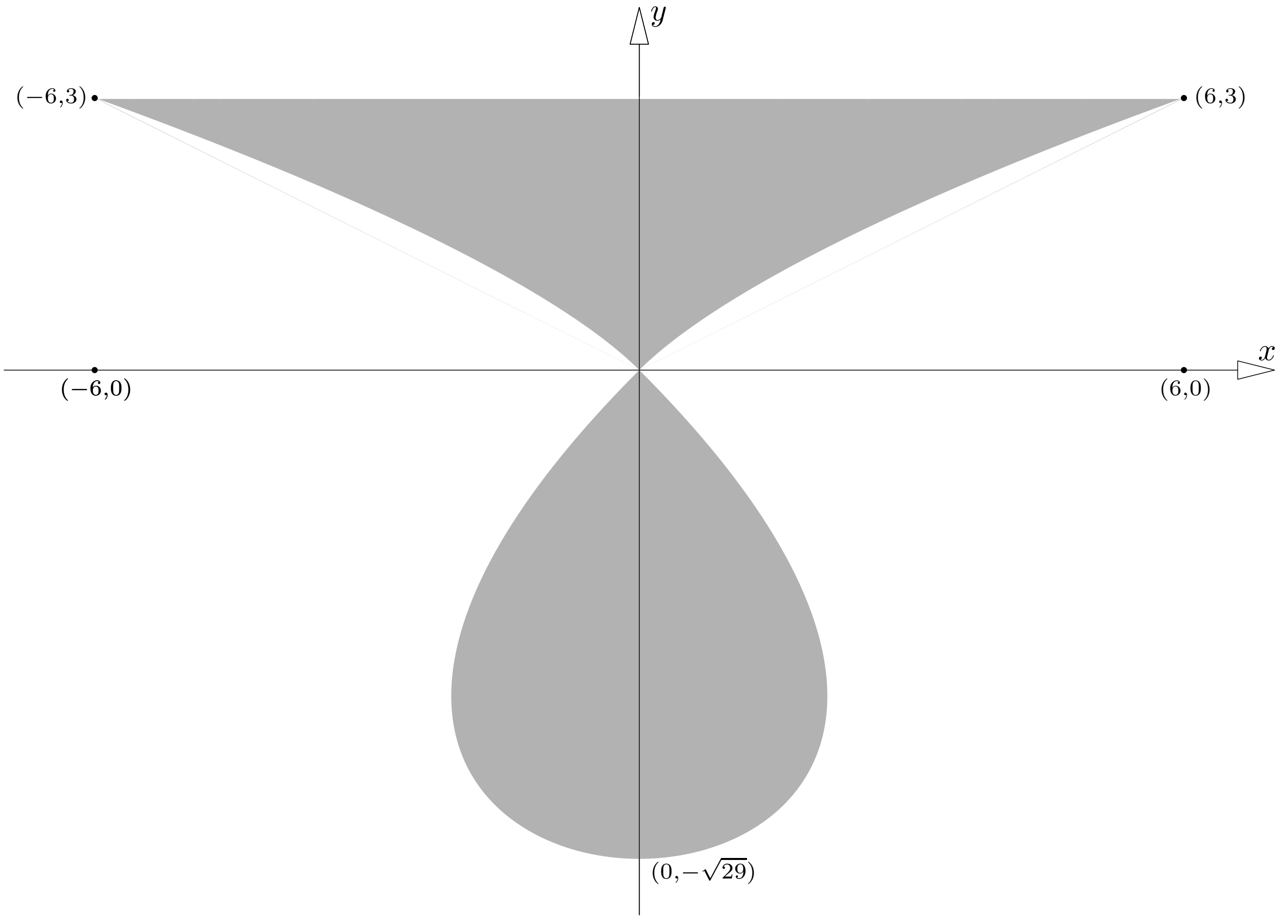
$$\underline{\eta}\colon [1,2] \to \mathbf{R}^2, \quad \eta_1(t) = t^3 - t, \qquad \eta_2(t) = t^2 - 1$$

$$\underline{\xi}\colon [2,3] \to \mathbf{R}^2, \quad \xi_1(t) = -12t + 30, \qquad \xi_2(t) = 3$$

Si calcoli l'area della regione racchiusa dalla curva.

2) *È data la curva parametrica qui sotto il cui sostegno è il bordo della regione in grigio. Si trovi l'area della regione.* *[Sugg. non è $3\pi/2$]*





Problema 1 Per capire che il sostegno della curva è il bordo della figura data così come per il verso di percorrenza, si scriva il vettore tangente, lo si disegni per un certo numero di punti significativi e lo si segua al variare di t. Si noterà che il verso va da $A \equiv (-6,3)$ a $(0,0)$. Poi si gira in senso orario intorno alla parte bassa. Poi si va dall'origine al punto $B \equiv (6,3)$ e quindi in orizzontale fino al punto di partenza. La parte superire è percorsa in senso antiorario. Quella inferiore in senso orario. Alternativamente, per $\underline{\zeta}$ si scriva $t^2 = 1 + y$ ossia $t = \sqrt{1+y}$ da cui $x = (1+y)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+y}$ e si disegni il grafico della funzione. Per il verso di percorrenza si va chiaramente dal punto in altro a sinistra all'origine. Si proceda analogamente negli altri casi.

Siccome $(\eta_1(t), \eta_2(t)) = (-\eta_1(t'), \eta_2(t'))$ con $t' = -t$, la curva, nel semipiano superiore, è simmetrica rispetto all'asse delle y. Lo stesso accade nel semipiano inferiore. Per il tartto orizzontale si verifichi che $\underline{\xi}(2+a) = -\underline{\xi}(3-a)$.

Calcoliamo l'area della metà superiore destra usando Gauss–Green. Per questo chiudiamo la curva con le due curve (segmenti)

$$\gamma_1(t) = (-t, 3),\ -6 \le t \le 0, \qquad \gamma_2(t) = (0, -t),\ -3 \le t \le 0$$

La curva $\underline{\eta} \cup \underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2$ non è definita in un intervallo ma un integrale curvilineo non cambia valore se si cambia parametrizzazione e $\underline{\gamma}_1$, $\underline{\gamma}_2$ si ottengono tramite una riparametrizzazione a partire dalla curva $\underline{\eta} \cup \underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2$ ma definita su di un intervallo $[a,b]$.

Semplici calcoli danno

$$\frac{1}{2}\int_{\underline{\zeta} \cup \underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2} (xdy - ydx) = \frac{161}{15}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\underline{\sigma}} (xdy - ydx) = \frac{232}{15}$$

per cui il risultato è 464/15.

Problema 2 In questo caso ciascuno dei quattro petali è percorso in senso antiorario ma la parte centrale in senso orario. Dobbiamo far vedere che i petali hanno la stessa area e per questo mostriamo come il secondo petalo si ottinene dal primo petalo per rotazione di $\pi/2$. Infatti

$$x(t+\frac{\pi}{2}) = 2\cos(3t+\frac{3}{2}\pi) + 3\cos(t+\frac{\pi}{2}) = 2\sin(3t) - 3\sin t$$
$$y(t+\frac{\pi}{2}) = 2\sin(3t+\frac{3}{2}\pi) - 3\sin(t+\frac{\pi}{2}) = -2\cos(3t) - 3\cos t$$

D'altra parte la rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario nel piano $x' = y$ e $y' = -x$ ed è esattamente quanto ottenuto. Per gli altri petali si procede allo stesso modo.

Se applicassimo Gauss–Green alla curva senza "accorgimenti" otterremmo

$$\frac{1}{2}\int (xdy - ydx) = \frac{3}{2}\pi$$

Sia I l'area del primo petalo e $A > 0$ l'area della parte centrale. Chiaramente

$$\frac{1}{2}\int (xdy - ydx) = 4I - A = \frac{3}{2}\pi$$

da cui $A = 4I - 3\pi$ e quindi l'area cercata è $4I + 4I - 3\pi$. Sia P il punto più a sinistra sull'asse delle x in cui il primo petalo è tagliato dall'asse. La sua ordinata è chiaramente zero da cui

$$2\sin(3t) - 3\sin t = 2\sin t(8\cos^2 t - 5) = 0 \implies t = \arccos\sqrt{\frac{5}{8}}$$

e quindi

$$I = \frac{1}{2}2\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{5}{8}}} (xdy - ydx) = 3\arccos\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{15}$$

Il risultato è

$$24\arccos\frac{\sqrt{10}}{4} + 3\sqrt{15} - 3\pi \sim 18,01$$