Primo “minicompito” Ingegneria informatica analisi–II, A.A. 2016–2017.

Ogni risposta vale al massimo 0.75 Gli elaborati vanno consegnati alla fine della lezione del 6/4/2017 su di un foglio protocollo oppure su più fogli slegati che in tal caso vanno spillati. Fogli sfusi non sono ammessi a meno che non siano contenuti all'interno di una cartellina (tipo quelle trasparenti)ed in tal caso il nome va messo su ogni foglio. Chi presenta un unico foglio protocollo è sufficiente che metta il nome solo sulla prima pagina. La risoluzione degli esercizi è breve, una volta capito cosa bisogna fare. **Il nome deve essere facilmente leggibile e la scrittura pure (evitare “zampe di gallina”)** . Non è possibile consegnare le risposte successivamente. Eventualmente è possibile farlo alla fine della lezione del giorno precedente.

1) Calcolare il volume $|V|$ della regione definita da $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z \geq 5x^2 + 2y^2 - 4xy, z \leq x+2y+1\}$. [Si possono usare le forme quadratiche (diagonalizzazioni) per definire il volume in coordinate “comode”]
[R. $27\sqrt{6}\pi/64$]

2) Calcolare il volume $|W|$ della regione definita da $W = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z \geq x^2 + y^2, z \leq 1, x \geq z\}$.
[R. $\pi/32$]

3) Facciamo riferimento alla pagina https://en.wikipedia.org/wiki/Conical_surface per la definizione di superficie conica. Nel nostro caso il vertice è $\underline{P} = (0, 0, r)$ mentre la generatrice generica congiunge il vertice con i punti della parabola $(x, x^2/(2r), 0)$, $(r > 0)$. La formula che ci interessa è $S(t, u) = v + uq(t)$ con le dovute sostituzioni.

Detto (x, y, z) il punto generico della superficie conica, si calcoli l'area di quella parte di superficie conica che soddisfa la condizione $0 \leq y \leq y_0$. [R. $(r + \frac{y_0}{3})\sqrt{2ry_0}$]

Gli integrali che verranno trovati vanno risolti e non è sufficiente dare il risultato

1) soluzione Eliminando z e quadrando si ha

$$5x^2 + 2y^2 - 4xy = x + 2y + 1$$

Scriviamo la parte sinistra come $(x, y)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{x}, M\underline{x})$

Diagonalizzando la matrice si ottiene $D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e corrispondentemente si ha la trasformazione di coordinate (rotazione nel piano) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(u - 2v) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2u + v) \end{cases} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (le cui colonne sono le coordinate degli autovettori ossia $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Si ha

$$5x^2 + 2y^2 - 4xy \to u^2 + 6v^2$$

A questo punto

$$\int\int_D dx\, dy(x + 2y + 1 - 5x^2 - 2y^2 - 4xy) = \int\int_{D'} du\, dv(\sqrt{5}u + 1 - u^2 - 6v^2)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$$

$D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon 5x^2 + 2y^2 - 4xy \leq x + 2y + 1\}$ $D' = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \colon u^2 + 6v^2 \leq \sqrt{5}u + 1\}$

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = 1$$

da cui il risultato ponendo $u=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3}{2}r\cos t$, $v=\dfrac{3}{2}\dfrac{r}{\sqrt{6}}\sin t$

2) soluzione Conviene vedere la $z\geq x^2+y^2$ come $y^2\geq z-x^2$ da cui $z\geq x^2$. Il fatto che $x^2\leq z\leq 1$ implica che $|x|\leq 1$. Integriamo per fili la funzione $\sqrt{z-x^2}$ sull'insieme $D=\{\underline{x}\in \mathbf{R}^2\colon x^2\leq z\leq x, 0\leq x\leq 1\}$ e poi moltiplichiamo per 2 in quanto bisogna tener conto anche della parte $-\sqrt{z-x^2}\leq y\leq 0$ che dà lo stesso contributo. Il volume è

$$|W|=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dz\sqrt{z-x^2}=\int_0^1 \frac{1}{3}(x-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$x-x^2=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}$ da cui, ponendo $x-1/2=t$

$$\frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-t^2\right)^{\frac{3}{2}}dt\underbrace{=}_{t=\frac{1}{2}\sin u}\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2^3}\cos^3 u\cdot\frac{1}{2}\cos u du=\frac{\pi}{64}\to\frac{\pi}{32}$$

3) soluzione La superficie conica è data da

$$\lambda\cdot(0,0,r)+(1-\lambda)\cdot(x,\frac{x^2}{2r},0)=\left((1-\lambda)x,(1-\lambda)\frac{x^2}{2r},\lambda r\right),\doteq(\alpha(\lambda x),\beta(\lambda x),\gamma(\lambda x))\doteq\underline{\varphi}(\lambda,x)$$

Poi abbiamo $\dfrac{x^2}{2r}\leq y_0$ da cui $-\sqrt{2ry_0}\leq x\leq\sqrt{2ry_0}$ e $0\leq\lambda\leq 1$.

$$\underline{\varphi}_x\wedge\underline{\varphi}_\lambda=(1-\lambda)(\underline{i}x-\underline{j}r+\underline{k}\frac{x^2}{2r}),\qquad \|\underline{\varphi}_x\wedge\underline{\varphi}_\lambda\|=(1-\lambda)(\frac{x^2}{2r}+r)$$

per cui la superficie ha area

$$\int_0^1 d\lambda\int_{-\sqrt{2ry_0}}^{-\sqrt{2ry_0}}dx(1-\lambda)(\frac{x^2}{2r}+r)$$

da cui il risultato