Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
25–02–2017, A.A.2016-2017

1) (8–punti) Sia dato l'insieme $D=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \colon x^2+y^2\le -x-y\}$.

1) Se ne calcoli l'area.

2) Sia E quella parte di D che giace nel secondo e terzo quadrante. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando E intorno all'asse delle y nello spazio $\mathbf{R}^3=\{x,y,z\}$

3) Sia E quella parte di D che giace nel terzo quadrante. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando E intorno all'asse delle x nello spazio $\mathbf{R}^3=\{x,y,z\}$

4) Si calcoli $\int_{\gamma^+}\omega$ dove γ^+ è il bordo di D percorso in senso antiorario e $\omega=(x^3+xy)dx+(y^3-xy)dy$

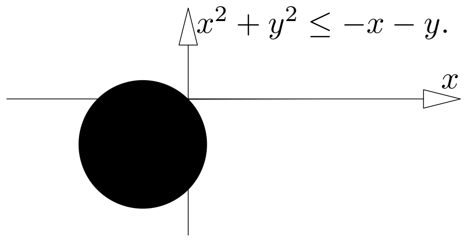
Può essere utile ricordare che $\sin^2 x=(1-\cos(2x))/2$, $\cos^2 x=(1+\cos(2x))/2$,

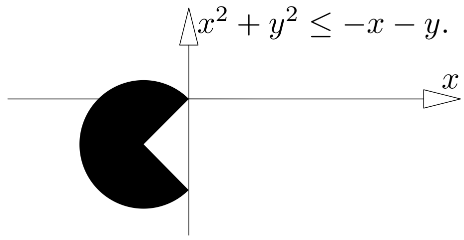
1.1) Prima dimostrazione Il bordo della figura è dato dalla equazione $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ per cui l'area è $\pi/2$.

Seconda dimostrazione In coordinate polari centrate nell'origine (r,t) si ha

$$x^2+y^2=r^2\le -x-y=-r(\sin t+\cos t)\quad\Longleftrightarrow\quad r\le -\sin t-\cos t$$

e ciò è possibile solo se $\cos t+\sin t\le 0$ da cui $3\pi/4\le t\le 7\pi/4$.





L'area è

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}dt\int_0^{-\sin t-\cos t}rdr=\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(1+\sin(2t))dt=\frac{\pi}{2}$$

1.2) Prima dimostrazione L'insieme E è definito da $3\pi/4\le t\le 3\pi/2$. Il volume è

$$\int\int_E 2\pi|x|dxdy=2\pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}dt\int_0^{-\sin t-\cos t}\underbrace{r}_{iacob.}\ \underbrace{-r\cos t}_{-x}dr=(C=\cos t,\ S=\sin t)$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}dtC(C+S)^3dt=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}dtC(C^3+S^3+3C^2S+3CS^2)dt$$

$$C^4=C^2(1-S^2)=\frac{1+\cos(2t)}{2}-\frac{\sin^2(2t)}{4}\implies\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}C^4dt=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}C^2(1-S^2)dt=$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x)}{4}dx=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\cos(4x)}{8}dx$$

$$=\frac{3}{8}\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{32}\sin(4t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{9}{32}\pi+\frac{1}{4}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} CS^3 dt = \frac{1}{4} S^4\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} 3C^3 S dt = \frac{3}{4} C^4\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{4}\frac{1}{4}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} 3C^2S^2 dt = \frac{3}{4}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2(2x)dx = \frac{3}{8}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (1-\cos(4x))dx = \frac{9}{32}\pi$$

Sommando il tutto si ha $\frac{2}{3}\pi\left(\frac{9}{32}\pi + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{32}\pi\right) = \frac{3}{8}\pi^2 + \frac{5}{12}\pi$

Seconda dimostrazione Adottiamo le coordinate centrate in $(-1/2,-1/2)$, $x = -1/2 + (r\cos t)/\sqrt{2}$, $y = -1/2 + (r\sin t)/\sqrt{2}, \ldots\ldots$ **Apparentemente le coordinate polari centrate in** $(-1/2,-1/2)$ **dovrebbero essere più indicate ma non è così . Gli studenti provino a completare il conto. C'è da imparare**

1.3) L'insieme E è definito da $\pi \le t \le 3\pi/2$. Il volume è

$$\int\int_E 2\pi|y|dxdy = 2\pi\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} dt \int_0^{-\sin t - \cos t} \underbrace{r}_{iacob.}\ \underbrace{-r\sin t}_{-y}\, dr = (C=\cos t,\ S=\sin t) =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} dt S(C+S)^3 dt = \frac{2}{3}\pi\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{(SC^3 + S^4 + 3S^3C + 3C^2S^2)}_{S=\sin t,\ C=\cos t} dt =$$

$$S^4 = S^2(1-C^2) = \frac{1-\cos(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{4} = \frac{1-\cos(2t)}{2} - \frac{1-\cos(4t)}{8} \implies$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} S^4 dt = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\right) = \frac{3}{16}\pi$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} CS^3 dt = \frac{1}{4}S^4\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} C^3 S dt = \frac{1}{4}C^4\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} 3C^2S^2 dt = \frac{3}{4}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2(2x)dx = \frac{3}{8}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} (1-\cos(4x))dx = \frac{3}{16}\pi$$

Sommando abbiamo

$$\int\int_E 2\pi|y|dxdy = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{3}{16}\pi + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\pi\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{3}\pi$$

1.4) La forma $x^3dx + y^3dy$ è esatta e quindi l'integrale è nullo essendo il cammino chiuso. Rimaniamo con $\omega = xydx - xydy$ ed applichiamo Gauss-Green per cui

$$\oint_{\gamma^+}\omega = \int\int_D ((-xy)_x - (xy)_y))\, dx\, dy = \int\int_D (-y-x)dx\, dy$$

ossia

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dt \int_0^{-\sin t-\cos t} drrr(-\cos t-\sin t)=\frac{1}{3}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dt(C+S)^4=\frac{4}{3}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dt\sin^4(t+\frac{\pi}{4})=$$
$$=\frac{4}{3}\int_{\pi}^{2\pi} dt\sin^4 ydy=\frac{4}{3}\frac{3}{8}\pi=\frac{\pi}{2}$$

Stavolta le coordinate polari centrate in $(-1/2,-1/2)$ sarebbero un'ottima scelta. Si cerchi di capire la differenza coi punti precedenti.

2) (6–punti) Si valuti volume della regione di spazio in $\mathbf{R}^3$ compresa fra il paraboloide di equazione $z=x^2/4+y^2/9$ ed il piano $z=2+x+2y/3$

L'intersezione fra il paraboloide ed il piano genera una curva in $\mathbf{R}^3$ la cui proiezione sul piano (x,y) è ciò che ci interessa. Eliminando z fra le due funzioni arriviamo a $(\frac{x}{2}-1)^2+(\frac{y}{3}-1)^2=4$ per cui l'integrale che cerchiamo è

$$I=\int\int_{(\frac{x}{2}-1)^2+(\frac{y}{3}-1)^2\le 4}(2+x+\frac{2y}{3}-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9})dx\,dy$$

Parametrizziamo il disco $(\frac{x}{2}-1)^2+(\frac{y}{3}-1)^2=4$

$$x=2+4r\cos t,\quad y=3+6r\sin t,\qquad 0\le t\le 2\pi,\qquad 0\le r\le 1$$

Chiaramente

$$\int\int_{(\frac{x}{2}-1)^2+(\frac{y}{3}-1)^2\le 4}\left(2+x+\frac{2y}{3}\right)dx\,dy=144\pi$$

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1-4r^2\cos^2 t-4r\cos t-1-4r^2\sin^2 t-4r\sin t$$

per cui

$$I=144\pi-\int_0^{2\pi} dt\int_0^1 drr(2+4r^2)=144\pi-96\pi=48\pi$$

3) (8–punti) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=3/2} e^{(\frac{z}{z-1})^2}\frac{(z-1)^3}{\sin(\pi z^2)}dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario).

3 poli, $z=0$, $z=\pm 1$.

$z=0$. Sviluppiamo la funzione nell'intorno del punto $z=0$.

$$f(z)=\left[1+\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{z^4}{(z-1)^4}+O(\frac{z^5}{(z-1)^5})\right]\frac{(z-1)^3}{\pi z^2}\frac{\pi z^2}{\sin\pi z^2}$$

Per cui ci serve il terime di ordine 1 della funzione

$$f(z)=\frac{1}{\pi z^2}\left[1+\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{z^4}{(z-1)^4}+O(\frac{z^5}{(z-1)^5})\right](z-1)^3\frac{\pi z^2}{\sin\pi z^2}=$$
$$=\frac{1}{\pi z^2}\left[1+\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{z^4}{(z-1)^4}+O(\frac{z^5}{(z-1)^5})\right](z-1)^3(1+g(z^2))$$

$g(z^2)$ è olomorfa in z^2 e comincia con l'ordine 1 (in z^2) e quindi comincia con l'ordine 2 in z. Ne segue che il termine di ordine 1 è

$$\underbrace{\left[1+\frac{z^2}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{z^4}{(z-1)^4}+O(\frac{z^5}{(z-1)^5})\right]}_{1}\underbrace{(z-1)^3}_{3(-1)^2 z}\underbrace{(1+g(z^2))}_{1}=3z$$

e quindi $Resf(0)=3/\pi$

$z=-1$.
$$\sin\pi z^2=\sin\pi(z^2-1+1)=-\sin\pi(z^2-1)=-\sin\pi(z+1)(z-1)$$

per cui
$$f(z)=\underbrace{e^{\frac{z^2}{(z-1)^2}}(z-1)^3\frac{-(z+1)(z-1)}{\sin\pi(z+1)(z-1)}\frac{1}{(z-1)}}_{olomorfa\ in\ z=-1}\frac{1}{(z+1)}$$

e quindi
$$Resf(-1)=e^{\frac14}(-2)^2\frac{-1}{\pi}$$

$z=1$.
$$f(z)=\frac{-(z+1)(z-1)}{\sin\pi(z+1)(z-1)}\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}e^{\frac{z^2}{(z-1)^2}}(z-1)^2=$$

Il calcolo del residuo è fuori dalla portata degli studenti.

4) 8–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x'''(t)-2x''(t)-x'(t)+2x(t)=H(t-1)-H(t-2)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=1$,

Si calcoli: $x(1^+),x'(1^+),x''(1^+)$, $x(2^-),x'(2^-),x''(2^-)$.

(Soluzione) Sia $\mathcal{L}(x)\doteq X(p)$. $\mathcal{L}(x')=-x(0)+p\mathcal{L}(x)=pX(p)$, $\mathcal{L}(x'')=-x'(0)+p\mathcal{L}(x')=p^2X(p)$, $\mathcal{L}(x''')=-x''(0)+p\mathcal{L}(x'')=-1+p^3X(p)$. Otteniamo

$$(p^3-2p^2-p+2)X(p)=1+\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-2p}}{p}$$

$$x(t)=\sum_{Residui}\frac{e^{pt}}{(p-1)(p+1)(p-2)}+\frac{e^{-p+pt}}{p(p-1)(p+1)(p-2)}H(t-1)-\frac{e^{-2p+pt}}{p(p-1)(p+1)(p-2)}H(t-2)$$

$$x(t)=\frac{e^t}{2}-\frac{e^{-t}}{6}-\frac{e^{-2t}}{3}+H(t-1)\left[\frac12-\frac{e^{(t-1)}}{2}-\frac{e^{-(t-1)}}{6}+\frac{e^{2(t-1)}}{6}\right]-H(t-2)\left[\frac12-\frac{e^{t-2}}{2}-\frac{e^{-t+2}}{6}+\frac{e^{2t-4}}{6}\right]$$

$$x(1^+)=\frac{e}{2}-\frac{1}{6e}-\frac{1}{3e^2},\qquad x(2^-)=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{6e^2}-\frac{1}{3e^4}+\frac12-\frac{e}{2}-\frac{1}{6e}+\frac{e^2}{6}$$

$$\begin{aligned}x'(t)&=\frac{e^t}{2}+\frac{e^{-t}}{6}+\frac{2e^{-2t}}{3}+\delta(t-1)\left[\frac12-\frac{e^{(t-1)}}{2}-\frac{e^{-(t-1)}}{6}+\frac{e^{2(t-1)}}{6}\right]+\\&+H(t-1)\left[-\frac{e^{(t-1)}}{2}+\frac{e^{-(t-1)}}{6}+\frac{2e^{2(t-1)}}{6}\right]+\\&-\delta(t-2)\left[\frac12-\frac{e^{t-2}}{2}-\frac{e^{-t+2}}{6}+\frac{e^{2t-4}}{6}\right]-H(t-2)\left[-\frac{e^{t-2}}{2}+\frac{e^{-t+2}}{6}+\frac{2e^{2t-4}}{6}\right]=\\&=\frac{e^t}{2}+\frac{e^{-t}}{6}+\frac{2e^{-2t}}{3}++H(t-1)\left[-\frac{e^{(t-1)}}{2}+\frac{e^{-(t-1)}}{6}+\frac{e^{2(t-1)}}{3}\right]+\\&-H(t-2)\left[-\frac{e^{t-2}}{2}+\frac{e^{-t+2}}{6}+\frac{e^{2t-4}}{3}\right]\end{aligned}$$

$$x'(1^+) = \frac{e}{2} + \frac{1}{6e} + \frac{2}{3e} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}, \qquad x'(2^-) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{6e^2} + \frac{2}{3e^4} - \frac{e}{2} + \frac{1}{6e} + \frac{e^2}{3}$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{6} - \frac{4e^{-2t}}{3} + \delta(t-1)\left[-\frac{e^{(t-1)}}{2} + \frac{e^{-(t-1)}}{6} + \frac{e^{2(t-1)}}{3}\right] + \\ &+ H(t-1)\left[-\frac{e^{t-1}}{2} - \frac{e^{-t+1}}{6} + \frac{2}{3}e^{2t-2}\right] - \delta(t-2)\left[-\frac{e^{t-2}}{2} + \frac{e^{-t+2}}{6} + \frac{e^{2t-4}}{3}\right] + \\ &+ H(t-2)\left[-\frac{e^{t-2}}{2} - \frac{e^{-t+2}}{6} + \frac{2e^{2t-4}}{3}\right] = \\ &= \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{6} - \frac{4e^{-2t}}{3} + + H(t-1)\left[-\frac{e^{t-1}}{2} - \frac{e^{-t+1}}{6} + \frac{2}{3}e^{2t-2}\right] + \\ &+ H(t-2)\left[-\frac{e^{t-2}}{2} - \frac{e^{-t+2}}{6} + \frac{2e^{2t-4}}{3}\right] \end{aligned}$$

$$x''(1^+) = \frac{e}{2} - \frac{1}{6e} - \frac{4}{3e^2} + \frac{2}{3}, \qquad x''(2^-) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{6e^2} - \frac{4}{3e^2} - \frac{e}{2} - \frac{1}{6e} + \frac{2e^2}{3}$$