Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

**Ing. Informatica, frontale e online, A.A.2016–2017**

**Giornale delle lezioni; materiale svolto a lezione e non presente sulle dispense**

**Gli esercizi per casa e non svolti a lezione sono contraddistinti con ♠**

**L'inizio di esercizi e/o argomenti svolti a lezione ma non presenti sulle dispense è contraddistinto con** • la fine con ••

**Lezione del 06/03/2017 integrali multipli**

Pag.1,2. Pag.3 da "si pone" fino a fine pagina. Pag.5 tranne il Teorema 1 e Teorema 2. Pag.6 ,7 e 8 (solo ESEMPIO 1). Tornare a 5 e studiare il Teorema 1 ma sostituire le parole "chiuso limitato e misurabile" con "semplice rispetto ad uno degli assi o tutti e due".

**Lezione del 09/03/2017 integrali multipli**

Esempio 2 fra pag.8 e 9. Esempio 3 fra pag.9 e 10. Esempio 4 pag.10 (volume della sfera di raggio $r$). Definizione di valor medio a pag.11.

• L'esempio di di pag.9 è stato risolto anche considerando $D$ come semplice rispetto all'asse delle $x$.

$$D = \{\underline{x}\colon 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\}$$

per cui

$$V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (1-x+y)dx = \int_0^1 dy \left[x - \frac{x^2}{2} + yx\right]_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} = \int_0^1 dy \left(2\sqrt{1-y} + 2y\sqrt{1-y}\right)$$

$$2\int_0^1 dy\sqrt{1-y} = 2\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}\Big|_1^0 = \frac{4}{3}$$

$$2\int_0^1 dyy\sqrt{1-y} = 2\int_0^1 dyy\left(-\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}\right)' = 2\left[y\frac{-2}{3}(1-y)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\int_0^1 dy(1-y)^{3/2} =$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^1 dy(1-y)^{3/2} = \frac{4}{3}\frac{2}{5}(1-y)^{5/2}\Big|_1^0 = \frac{8}{15}$$

La somma delle due quantità dà $\frac{4}{3} + \frac{8}{15} = \frac{28}{15}$ ••

♠ Calcolare $\int\int_D |y - x^2| dx\, dy$ dove $D$ è nell'orine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.12/5]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.41/30]** iii) L'insieme defnito fa $x^2 \le |y| \le 1$. **[R.8/5]**

♠ Calcolare $\int\int_D |\,x|y| - x^2| dx\, dy$ dove $D$ è il quadrato di centro l'origine e lato lungo 2. **[R.2/3]**

♠ Calcolare $\int\int_D |y - x^3| dx\, dy$ dove $D$ è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.16/7]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.8/7]** iii) L'insieme defnito fa $x^2 \le |y| \le 1$. **[R.8/5]**

♠ Calcolare il volume del seguente insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon 0 \leq z \leq r - \sqrt{x^2+y^2}\}$ (cono) $\mathbf{R.}\pi r^3\mathbf{/3}$

♠ Calcolare il volume dell'insieme in $\mathbf{R}^3$ definito da $x^2+y^2 \leq z \leq 1+x+y$. $\mathbf{R.}9\pi/8$

**Lezione del 13/03/2017 integrali multipli**

Calcolo del volume della sfera di raggio $r$ "pre strati." L'integrale da calcolare è

$$\int_{-1}^{1} dz\pi(r^2-z^2)dz = \frac{4}{3}\pi r^3$$

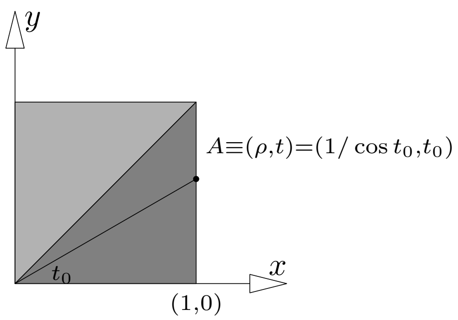
$\pi(r^2-z^2)$ è l'area del disco ottenuto "tagliando" la sfera con un piano orizzontale parallelo al piano $(x,y)$ ed di altezza $z$

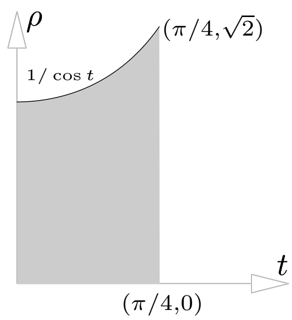
Cambiamento di variabili a pag.12,13,14 e coordinate polari nel piano a pag.14.

• Calcolo del volume dell'insieme in $\mathbf{R}^3$ definito da $x^2+y^2 \leq z \leq 1+x+y$. ••

**Lezione del 16/03/2017 integrali multipli**

• Calcolare l'area del quadrato usando coordinate polari.




L'area è due volte l'area della metà inferiore.

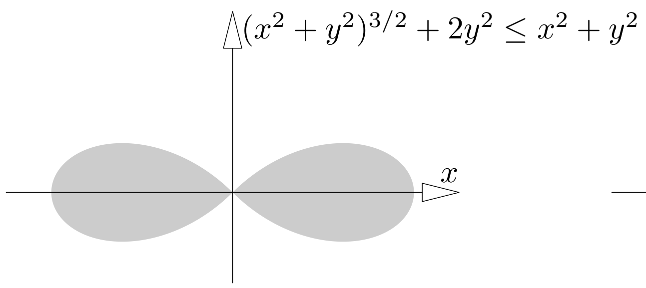
$$\int\int_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2: x\in[0,1],\ 0\leq y\leq x\}} dxdy = \int\int_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2: t\in[0,\pi/4],\ 0\leq\rho\leq 1/\cos t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano} d\rho\, dt =$$

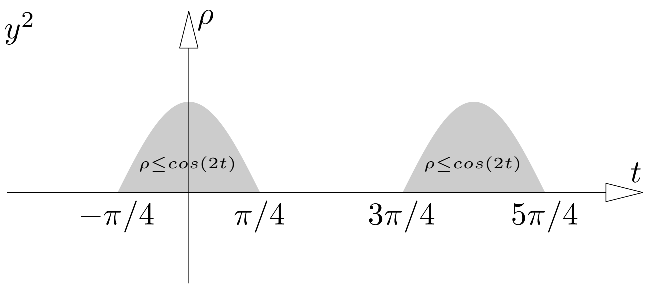
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{1/\cos t} \rho\, d\rho\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\cos t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'area è due volte la quantità trovata. ••

♠ Eseguire il calcolo trovando l'area della metà superiore anziché inferiore.

• Trovare l'area della figura definita da $(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2 \leq x^2+y^2$.



Passiamo a coordinate polari (a questo livello stiamo facendo un tentativo. Non è detto che la scelta sia quella giusta anche se in realtà sappiamo che lo è ).
$(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2\le x^2+y^2$ diventa $(\rho^2)^{3/2}+2\rho^2\sin^2 t\le\rho^2$ ossia $\rho^2(\rho-\cos 2t)\le 0$ e quindi $\rho\le\cos 2t$. Il fatto che $\rho\ge 0$, implica $\cos 2t\ge 0$ ossia $-\pi/2+2k\pi\le 2t\le\pi/2+2k\pi$, ossia $-\pi/4\le t\le\pi/4$ con $k=0$ oppure $3\pi/4\le t\le 5\pi/4$ con $k=1$. Chiaramemte con $k=2$, si riottiene il primo caso e con $k=3$ il secondo. Infatti per $k=2$ e $k=3$ si ha rispettivamente

$$\frac{7}{4}\pi\le t\le\frac{9}{4}\pi \qquad\qquad \frac{11}{4}\pi\le t\le\frac{13}{4}\pi$$

che nel piano $(x,y)$ equivalgono a

$$-\frac{\pi}{4}\pi\le t\le\frac{\pi}{4} \qquad\qquad \frac{3}{4}\pi\le t\le\frac{5}{4}\pi$$

Siccome ad ogni punto $(x,y)$ dentro la parte di destra corrisponde $(-x,y)$ a sinistra, eseguiamo il calcolo solo a destra e moltiplichiamo per due. Matematicamente vuol dire che

$$(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2-x^2-y^2\le 0 \iff ((-x)^2+y^2)^{3/2}+2y^2-(-x)^2-y^2\le 0$$

$$\int\!\!\int_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2:(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2\le x^2+y^2,\ x\ge 0\}} dxdy = \int\!\!\int_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2:t\in[-\pi/4,\pi/4],\ 0\le\rho\le\cos 2t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano}\, d\rho\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt\int_0^{\cos(2t)}\rho\, d\rho = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt\frac{1}{2}\cos^2(2t) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt\frac{1}{4}(1+\cos(4t)) = \frac{\pi}{8}$$

Il risultato è $\pi/4$. ••

Integrale a pag.15 delle dispense di Tauraso.

**Lezione del 20/03/2017 integrali multipli**

Coordinate polari sferiche e cilindriche (pag.25 delle dispense di Tauraso)

• Cacolo del volume della sfera $x^2+y^2+z^2\le r^2$ usando sia coordinate polari sferiche che cilindriche. ••

• Sia dato il volume $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2\le r^2\}$ avente densità di massa costante $\delta$. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Sia $\underline{y}_0\equiv(\xi,\eta,\zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto $\underline{y}_0$ stia sull'asse $z$ ossia abbia coordinate $(0,0,\zeta)$. Il potenziale generato da $V$ in $\underline{y}_0$ è $I=\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_V\frac{\delta dxdydz}{dist(\underline{x},\underline{y}_0)}$.
L'integrale diventa $\displaystyle\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\int_0^r d\rho\frac{\rho^2\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2-2\rho\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}}=\frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho\rho(|\rho+\zeta|-|\rho-\zeta|)$.
Si è usato il fatto che

$$\left(\frac{1}{\rho\zeta}\sqrt{\rho^2-2\rho\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}\right)'=\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2-2\rho\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}}$$

Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta>r$ e $\zeta\le r$.

Primo caso. Sia $\zeta>r$. L'integrale è $\displaystyle\frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho\rho(\rho+\zeta-(\zeta-\rho)=\frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho 2\rho^2=\frac{4\pi}{3}\delta\frac{r^3}{\zeta}$. Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso. Se $r > \zeta > 0$ otteniamo invece $\displaystyle\frac{2\pi\delta}{\zeta}\left(\int_0^\zeta d\rho\rho(\rho+\zeta-(\zeta-\rho)+\int_\zeta^r(\rho+\zeta-(\rho-\zeta)\right) =$ $2\pi\delta(r^2-\frac{1}{3}\zeta^2)$ e si può notare che per $\zeta = r$ le due formule coincidono.••

• Calcolare $\displaystyle\int\int\int_D |z| dx\,dy\,dz$ dove $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ ••

♠ Come esercizi si possono svolgere, tra gli altri, tutti quelli a pag.21,22,23

♠ Calcolare $\displaystyle\int\int\int_D |x+y| dx\,dy\,dz$ dove $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$

♠ Calcolare il volume della regione dello spazio definita da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon x^2+y^2+z^2 \le 2z, z \le 2(x^2+y^2)\}$

♠ Calcolare $\displaystyle\int\int\int_D |x^2+y^2-z^2| dx\,dy\,dz$ dove $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$

♠ Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int\int_E dx\,dy\,\frac{(x+y)}{2+(y-x)^2}$ dove $E$ è il poligono i cui vertici sono i punti $(0,0)$, $\ (2,0,)$ $\ (0,2)$, $\ (1,1)$

♠ Calcolare il volume della regione definita in $\mathbf{R}^3$ da $(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2 \le z \le x^2+y^2$. Inoltre il volume cercato deve essere tale che se $y=0$, è contenuto all'interno delle rette $z = \pm\sqrt{3}x$ [**R.**$\pi\sqrt{3}/30$]

**Lezione del 23/03/2017 integrali multipli e superfici**

• Volumi di rotazione. Nel piano $(z,y)$ si abbia un insieme chiuso e limitato (ad esempio un poligono) che non intersechi né l'asse $z$ né l'asse $y$ e lo si ruoti intorno all'asse $z$ di $2\pi$ radianti. Il volume della regione ottenuta è

$$\alpha\int\int_D y\,dy\,dz$$

Se invece ruotiamo intorno all'asse $y$ abbiamo

$$\alpha\int\int_D z\,dy\,dz$$

**Ragionamento intuitivo** Sia $C_{y,z}$ la circonferenza ottenuta a partire da $(y,z)$ e ruotando di 360 gradi intorno a $z$. Possiamo pensare che il volume di rotazione sia $\displaystyle\bigcup_{y,z\in D} C_{y,z}$. Un facile disegno mostra che se $(y',z') \ne (y,z)$ allora $C_{y',z'} \cap C_{y,z} = \emptyset$. Per il calcolo del volume dovrei "sommare" la lunghezza di tutte le circonferenze $C_{y,z}$ al variare di $(y,z)$ in $D$. Ciascuna circonferenza è lunga $2\pi y$ e la "somma" è $\displaystyle\int\int_D 2\pi y\,dy\,dz$ appunto.

Se la rotazione avviene intorno all'asse $y$, allora il volume è

$$2\pi\int\int_D z\,dy\,dz$$

• Applicazione al volume della sfera. Rutiamo di 360 gradi intorno all'asse $z$ il semicerchio di raggio $r$, centrato in $(0,0,r)$ e contenuto nel primo quadrante del piano $(y,z)$. La figura appena ottenuta e l'asse $z$ hanno il segmento $(0,0,2\lambda r)$ $0 \le \lambda \le 1$ in comune con l'asse di rotazione ma il segmento appena descritto ha area nulla e quindi le formule valgono ancora. Il semicerchio si parametrizza come $y = r\rho\cos t$, $z = r + r\rho\sin t$ con $0 \le \rho \le r$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. Il volume cercato è l'integrale

$$2\pi \int_0^1 d\rho r^2\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\rho\cos t = \frac{4}{3}\pi r^3$$

• **Superfici** Sia $\underline{\varphi}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ (ci limitiamo a superfici che dipendono da due parametri ed il cui grafico è contenuto in $\mathbf{R}^3$.)

**Definizione** *Sia $D = \overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$ un insieme in $\mathbf{R}^2$ e sia $\underline{\varphi}$ una applicazione da $D$ a valori in $\mathbf{R}^3$. $\underline{\varphi} = \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v))$ con le seguenti condizioni: i) $\alpha, \beta, \gamma, \in C^1(D; \mathbf{R})$ ii) il rango della matrice $J = \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}$ è due iii) $(u,v) \ne (u',v')$ implica $\underline{\varphi}(u,v) \ne \underline{\varphi}(u',v')$ per ogni $(u,v), (u',v') \in \overset{\circ}{D}$*

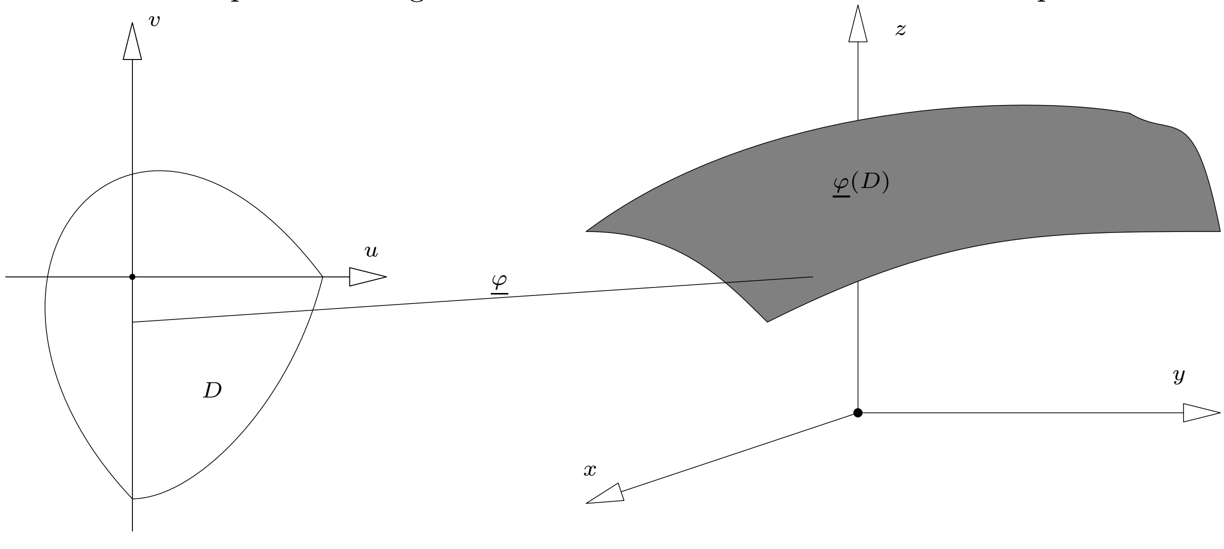
*La ii) è equivalente a dire è la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine due è non nulla ossia*

$$\sqrt{\left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|^2} \ne 0$$

*La superficie descritta è detta regolare.*

Sia $I_1 = \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}\right|$, $I_2 = \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|$, $I_3 = \left|\begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|$

*Osservazion1* La matrice $J$ definisce un operatore lineare che manda vettori a due componenti in vettori a tre componenti. Il fatto che il rango della matrice sia due, significa che due vettori linearmente indipendenti vengono mandati in due vettori linearmente indipendenti.




La matrice $J$ applicata al vettore $(1,0)$ produce il vettore $\underline{\varphi}_u \doteq (\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ mentre applicata al vettore $(0,1)$ produce $\underline{\varphi}_v \doteq (\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$

$$\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_u & \beta_u & \gamma_u \\ \alpha_v & \beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \underline{i}(\beta_u\gamma_v - \beta_v\gamma_u) - \underline{j}(\alpha_u\gamma_v - \gamma_u\alpha_v) + \underline{k}(\alpha_u\beta_v - \beta_u\alpha_v)$$

per cui il modulo delle componenti del prodotto vettoriale corrispondono a $(I_1, I_2, I_3)$.

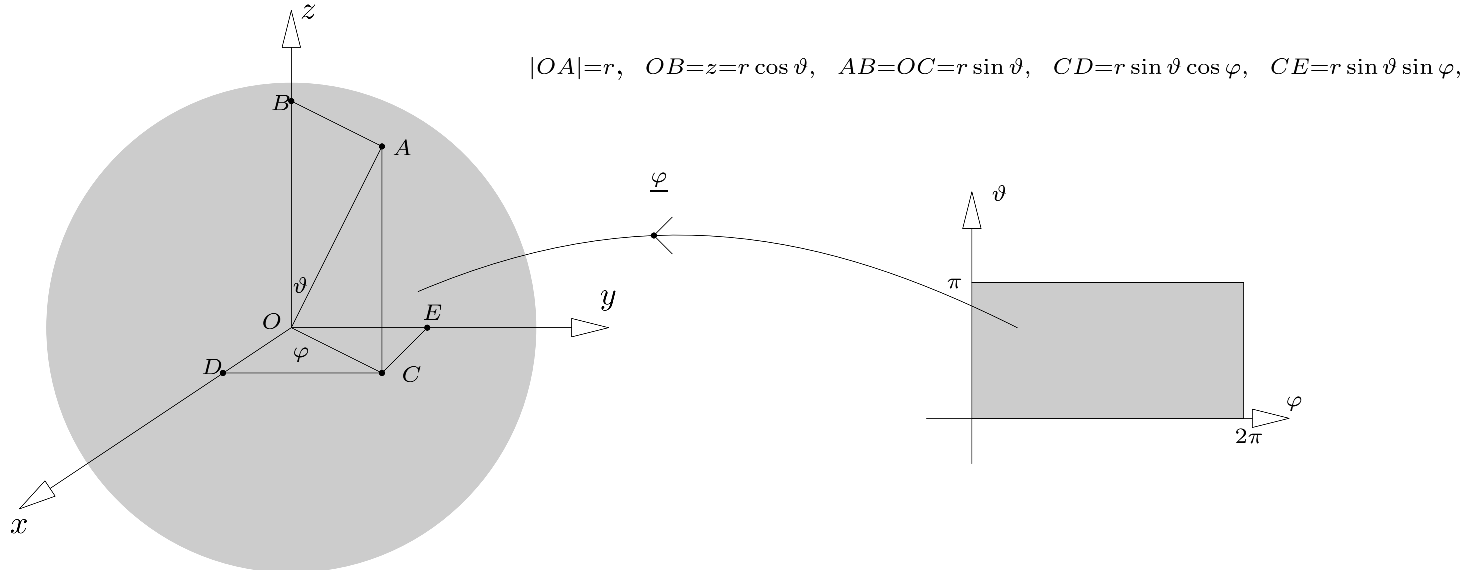
**Definizione** *Si definisce area della superficie l'integrale doppio* $\int\int_D dudv\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^3}$

**Esempi** L'esempio più frequente è quello di una *superficie cartesiana* ossia il grafico della superficie $z = f(x,y)$ $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. In tal caso la parametrizzazione è del tutto ovvia, $x = \alpha(u,v) = u$, $y = \beta(u,v) = v$, $z = \gamma(u,v) = f(u,v)$. In forma vettoriale si ha $u\underline{i} + v\underline{j} + f(u,v)\underline{k}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$ ; $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$. Se $f(x,y) \in C^1(D)$ allora la superficie cartesiana soddisfa tutte le tre condizioni $i), ii)$ e $iii)$. Infatti la $i)$ è chiaramente verificata. Per la $ii)$ basta verificare ad esempio che la matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inoltre la $iii)$ è verificata sempre grazie al fatto che sia la prima che la seconda componente della superficie è data da funzioni iniettive.

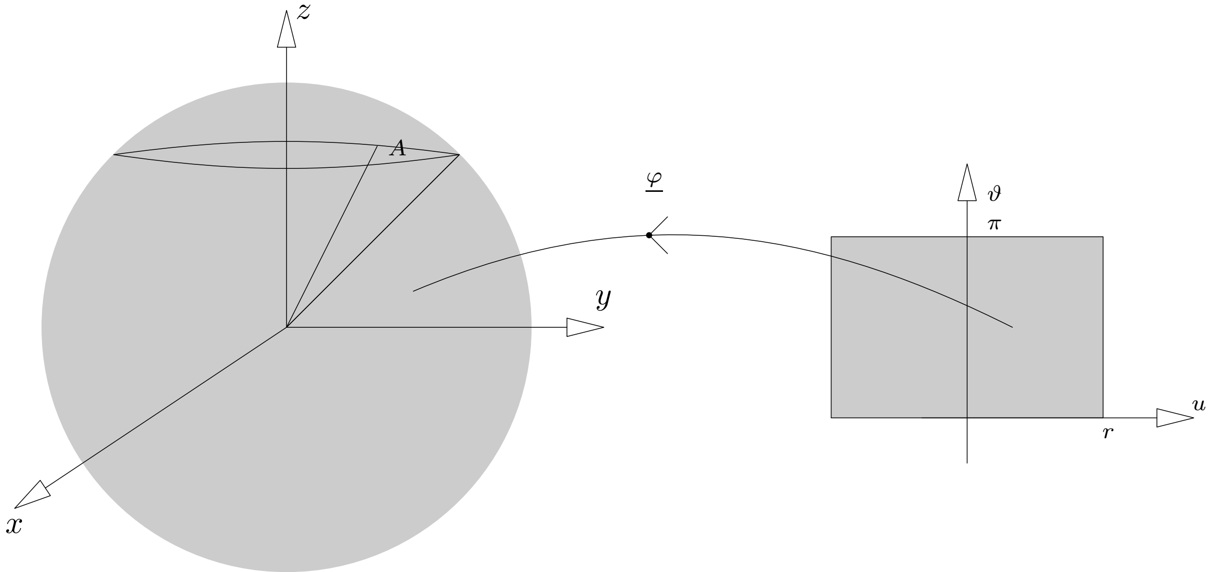
• Un esempio di superficie *non cartesiana* è data dalla sfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Per parametrizzare la sfera si possono effettuare diverse scelte.

1) Coordinate cartesiane. In tal caso bisogna “spezzare” in due parti. Per $z \geq 0$ si può parametrizzare $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$ mentre per $z < 0$ si ha $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$ .In ambedue i casi $D = \{x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset \mathbf{R}^2$.

2) Coordinate polari. $\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$ In questo caso si ha $D = \{(\varphi, \vartheta) \in \mathbf{R}^2 \colon \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0,\pi]\}$ ed è un rettangolo a differenza di quanto accade con le coordinate cartesiane. La condizione $ii)$ non è sempre verificata. In tal caso si ha $J = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$ e $I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = (r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta + r^2\cos\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varphi)^2 + r^4\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^4\sin^2\vartheta\cos^2\varphi = r^4\sin^2\vartheta$. Come si può notare la $ii)$ non è verificata per i valori $\vartheta = 0, \pi$. In effetti, se $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$, qualunque sia il valora di $\varphi$, si sta sempre posizionati al “Polo Nord” per $\vartheta = 0$ oppure al “Polo Sud” per $\vartheta = \pi$. Anche la $iii)$ non è verificata per $\vartheta = 0, \pi$. I punti $(0,\varphi)$ e $(0,\varphi')$ hanno la stessa immagine così come $(\pi,\varphi)$ e $(\pi,\varphi')$



3) Vi è un terzo tipo di parametrizzazione che consiste nel porre $\begin{cases} x = \sqrt{r^2-u^2}\sin\vartheta \\ y = \sqrt{r^2-u^2}\cos\vartheta \\ z = u \end{cases}$ $-r \leq u \leq r$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Anche in questo caso la *iii*) è violata. Se $u = \pm r$ allora qualsiasi punto $(u,\vartheta)$ viene mandato nel punto $(0,0,\pm r)$. $J = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{r^2-u^2}}\cos\vartheta & -\sqrt{r^2-u^2}\sin\vartheta \\ -\frac{u}{\sqrt{r^2-u^2}}\sin\vartheta & \sqrt{r^2-u^2}\cos\vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_1^2+I_2^2+I_3^2 = r^2$ e quindi la *ii*) è verificata.




• Un altro esempio di superficie non cartesiana è il toro ossia la “ciambella” la cui proiezione sul piano $z = 0$ è data dalle due ellissi di semiassi rispettivamente $r_1 < r_2$ e $R_1 < R_2$ con $R_2 - r_2 = R_1 - r_1$. La parametrizzazione della superficie è
$a = \frac{1}{2}(r_2+R_2)$, $a' = \frac{1}{2}(R_1+r_1)$, $b = \frac{1}{2}(R_2-r_2) = \frac{1}{2}(R_1-r_1)$

$$x = a\cos\vartheta + b\cos\varphi\cos\vartheta = \cos\vartheta(a+b\cos\varphi) \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$y = a'\sin\vartheta + b\cos\varphi\sin\vartheta = \sin\vartheta(a'+b\cos\varphi)$$
$$z = b\sin\varphi$$

• Calcolo dell’area della sfera di raggio $r$ parametrizzando la superficie con le coordinate sferiche ($4\pi r^2$) e della superficie laterale del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ usando la parametrizzazione cartesiana

♠ Calcolo dell’area della sfera di raggio $r$ parametrizzando la superficie con le coordinate cilindriche

♠ Risolvere gli esercizi di Tauraso tranne il numero 15.

♠ Calcolare l’area di quella parte di superficie conica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ contenuta all’interno della regione definita da $x+y+z \leq 1$, $x,y,z \geq 0$. [**R.** $(1-\ln 2)/\sqrt{2}$]

♠ Sia data la figura piana definita da $(x^2+y^2)^2 \leq 2(x^2-y^2)$. Trovare il volume del solido ottenuto ruotandola intono all’asse delle $y$ [**R.** $\pi\ln(1+\sqrt{2}) - \pi\sqrt{2}/3$ gli integrali non sono immediati]

♠ Sia data la figura piana definita da $(x^2+y^2)^2 \leq 2(x^2-y^2)$. Trovare il volume del solido ottenuto ruotandola intono all’asse delle $x$ [**R.** $\pi^2/2$ gli integrali non sono immediati]

**Lezione del 27/03/2017 integrali multipli e superfici**

• Calcolo del potenziale elettrico generato da una sfera in un punto interno ed esterno alla sfera.

Sia $S$ la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ (vuota all'interno). $\underline{y}_0 \equiv (\xi,\eta,\zeta)$ un punto dello spazio. Il potenziale nel punto $\underline{y}_0$ generato da un "pezzettino" della sfera intorno al punto della sfera $\underline{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ è dato da ($\delta$ è la densità di carica elettrica o gravitazionale ossia densità di massa che assumiamo costante)

$$\frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)} = \frac{\delta \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| dudv}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)} =$$

Il potenziale generato dalla sfera in $\underline{y}_0$ è $I = \displaystyle\int\int_S \frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}$. Con la parametrizzazione in coordinate polari *avente l'asse $z$ posto lungo la retta congiungente il centro di $V$ con il punto $\underline{y}_0$*, l'integrale diventa

$$r^2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-2r\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}} = \frac{2\pi r\delta}{\zeta}(|r+\zeta|-|r-\zeta|)$$

Se $\zeta > r$ abbiamo $I = \frac{4\pi r^2\delta}{\zeta} = \frac{Q}{\zeta}$ dove $Q = 4\pi r^2$ è la carica della superficie sferica. Se $\zeta < -r$ la formula è la stessa $I = \frac{Q}{-\zeta}$. Se $|\zeta| < r$ abbiamo $I = 4\pi\delta r$. Come si vede, in ambedue i casi le dimensioni del risultato sono pari a una massa fratto una distanza. Inoltre all'interno della sfera non vi è campo gravitazionale ossia un corpo materiale non sarebbe soggetto ad alcuna forza. ••

• Calcolare l'area della superficie definita da $x^2+y^2+z^2=a^2$, $2az \geq x^2+y^2$ parametrizzando la superficie stessa in coordinate sia sferiche che cartesiane.

Il sistema $\{x^2+y^2+z^2=a^2,\ z=(x^2+y^2)/(2a)\}$ dà come risultato $(x^2+y^2)^2+4a^2(x^2+y^2)-4a^2=0$ ossia $x^2+y^2=-2a^2+2a^2\sqrt{2}$ per cui la porzione di superficie di cui vogliamo l'area è

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad x^2+y^2 \leq a^2(2\sqrt{2}-2)$$

Prametrizziamo in coordinate sferiche

$$x = a\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = a\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = a\cos\vartheta, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \arcsin(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1})$$

L'integrale che cerchiamo è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1})} a^2\sin\vartheta d\vartheta = 2\pi a^2 \cos\vartheta\Big|^0_{\arcsin(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1})} =$$

$$= 2\pi a^2\left(1-\cos\arcsin(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1})\right) = 2\pi a^2\left(1-\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\left(\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}\right) =$$

$$= 2\pi a^2\left(1-\sqrt{1-2(\sqrt{2}-1)}\right) = 2\pi a^2(1-\sqrt{3-2\sqrt{2}})$$

••

♠ Si consideri il disco $x^2+y^2 \leq r^2$ sul piano $(x,y)$ e immerso in $\mathbf{R}^3$. Si immagini il disco carico elettricamente con densità costante $\sigma$. 1) Si calcoli il potenziale elettrico lungo i punti dell'asse del disco $(0,0,z)$, $z \geq 0$ e si verifichi che il potenziale tende a zero se $z \to +\infty$. [R. $2\pi\sigma(\sqrt{z^2+r^2}-|z|)$] 2) Si calcoli il potenziale in un qualsiasi punto del bordo del disco [R.$4\sigma r$].

Si può notare che il potenziale è inferiore al potenziale nel centro del disco; fisicamente se ne ricava che il disco uniformemente carico non è una superficie equipotenziale.

**Lezione del 30/03/2017 Curve**

Pagine1–5 (escluso esempio 2) delle lezioni di Tauraso

A pag.1 a "$\gamma$ è iniettiva", sostituire la frase: *se per ogni* $t_1 \in I, t_2 \in I$, $t_1$ *e/o* $t_2$ *non appartenenti al bordo di* $I$, *allora* $\underline{\gamma}(t_1) \neq \underline{\gamma}(t_2)$.

Altrimenti dovremmo dire che la curva a pag.2, ellisse, non è iniettiva.

A pag.3 a $\forall t \in I$; sostituire $\forall t \in \overset{\circ}{I}$.

• Lunghezza della curva $x = t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$ (tratto di parabola). ••

**Lezione del 05/04/2017 (recupero della lezione del 03/04/2017) Curve**

Pag.7, pag.8 fino a "Esempio 4". Pag.9 e 10 fino a "Esempio 6".
• Esercizio: Calcolo del baricentro del triangolo di vertici $(a, 0)$, $(0, b)$, $(-a, 0)$.

Eseguiamo tutti calcoli, anche quelli il cui risultato è a priori ovvio come ad esempio l'ascissa del baricentro che è chiaramente nulla.

Siano

$$\underline{\gamma}_1(t) = \begin{cases} t & -a \leq t \leq a \\ 0 \end{cases} \qquad \underline{\gamma}_2(t) = \begin{cases} -t & -a \leq t \leq 0 \\ b + \dfrac{b}{a}t \end{cases} \qquad \underline{\gamma}_3(t) = \begin{cases} -t & 0 \leq t \leq a \\ b - \dfrac{b}{a}t \end{cases}$$

$\underline{\gamma}_1$ viene percorsa da sinistra verso destra, $\underline{\gamma}_1$ dal basso verso l'alto e $\underline{\gamma}_3$ dall'alto verso il basso. La lunghezza del triangolo è chiaramente $L(a, b) \doteq 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Ascissa del baricentro.

$$\int_{\underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2 \cup \underline{\gamma}_3} x ds = \int_{\underline{\gamma}_1} x ds + \int_{\underline{\gamma}_2} x ds + \int_{\underline{\gamma}_3} x ds$$

$$\int_{\underline{\gamma}_1} x ds = \int_{-a}^{a} t\sqrt{1^2 + 0^2} dt = 0, \qquad \int_{\underline{\gamma}_2} x ds = \int_{-a}^{0} (-t)\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} dt$$

$$\int_{\underline{\gamma}_3} x ds = \int_{0}^{a} (-t)\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} dt$$

e la somma degli ultimi due fa zero come ci aspettavamo.

Ordinata del baricentro.

$$\int_{\underline{\gamma}_1} y ds = \int_{-a}^{a} 0 \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} dt = 0$$

$$\int_{\underline{\gamma}_2} y ds = \int_{-a}^{0} \left(b + \frac{b}{a}t\right) \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} dt$$

$$\int_{\underline{\gamma}_3} y ds = \int_{0}^{a} \left(b - \frac{b}{a}t\right) \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} dt$$

la cui somma dà

$$2ab\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}-a^2\frac{b}{a}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=ab\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

Le coordinate del baricentro sono quindi

$$\left(0,\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

La scelta del verso di percorrenza su $\underline{\gamma}_1,\underline{\gamma}_2,\underline{\gamma}_3$, è del tutto irrilevante dato il risultato del teorema appena dimostrato.

Anche la lunghezza del triangolo, volendo, si può trovare attraverso gli integrali curvilinei. ••

• Sia $\underline{\gamma}$, la curva $y=t$, $z=g(t)$ $0<a\le t\le b$. Vogliamo calcolare l'area della superficie di rotazione di $2\pi$ intorno all'asse $z$. La superficie ha parametrizzazione $x=t\cos\varphi$, $y=t\sin\varphi$, $z=g(t)$, $a\le t\le b$, $0\le\varphi\le 2\pi$, e l'area che cerchiamo è

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b dt\sqrt{t^2+t^2(g')^2}=2\pi\int_a^b dt\ |t|\sqrt{1+(g')^2}=2\pi\int_a^b dt\ t\sqrt{1+(g')^2}\doteq 2\pi\int_{\underline{\gamma}}tds$$

che è l'integrale della lunghezza della circonferenza di raggio $y$ integrata lungo la curva. Osservare che la superficie cercata è esattamente l'unione di tutte le circonferenze ottenute ruotando di $2\pi$ ogni punto della curva. ••

## Lezione del 06/04/2017 Curve e forme differenziali

• Sia $\underline{\gamma}$, la curva $y=t$, $z=g(t)$ $0<a\le t\le b$. Vogliamo calcolare l'area della superficie di rotazione di $2\pi$ intorno all'asse $y$ (prima era $z$). La superficie ha parametrizzazione $x=g(t)\cos\varphi$, $z=g(t)\sin\varphi$, $y=t$, $a\le t\le b$, $0\le\varphi\le 2\pi$, e l'area che cerchiamo è

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b dt\sqrt{g^2+g^2(g')^2}=2\pi\int_a^b dt\,|g(t)|\sqrt{1+(g')^2}=2\pi\int_a^b dt\,g(t)\sqrt{1+(g')^2}\doteq 2\pi\int_{\underline{\gamma}}g(t)ds$$

che è l'integrale della lunghezza della circonferenza di raggio $g(y)$ integrata lungo la curva. Osservare che la superficie cercata è esattamente l'unione di tutte le circonferenze ottenute ruotando di $2\pi$ ogni punto della curva. Questa è la formula che trovate a pag.32–22 delle dispense di Tauraso con la sola inessenziale differenza che lì la curva giace sul piano $(x,z)$. Inoltre Tauraso la ricava in modo diverso in quanto non dà la formula generale del calcolo delle aree di superfici non cartesiane. ••

• Gli stessi calcoli si eseguono se la curva fosse cartesiana del tipo $y=h(z)$, $c\le z\le d$, per cui $z=t$, $y=h(t)$. Ruotando intorno all'asse $z$ avremmo $x=h(t)\cos\varphi$, $y=h(t)\cos\varphi$, $z=t$ e l'area della superficie di totazione sarebbe

$$2\pi\int_{\underline{\gamma}}g(t)ds=2\pi\int_c^d g(t)\sqrt{1+(g')^2}dt$$

Se la stessa curva $y=h(z)$ la ruotiamo intorno all'asse $y$ abbiamo $x=t\cos\varphi$. $z=t\sin\varphi$, $y=h(t)$ ed otteniamo

$$2\pi\int_{\underline{\gamma}}tds=2\pi\int_c^d t\sqrt{1+(g')^2}dt$$

• Tutti e due i casi precedenti sono di curve cartesiane. La seguente curva assolutamente non lo è per cui dobbiamo generalizzare $y = 2 + e^{-t}\cos t$, $z = e^{-t}\sin t$, $t > 0$. La generalizzazione è $y = \gamma_1(t)$, $z = \gamma_2(t)$, $a \leq t \leq b$, $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \geq 0$. Se ruotiamo intorno all'asse $z$ abbiamo

$$2\pi \int_{\underline{\gamma}} \gamma_1 ds = 2\pi \int_a^b \gamma_1 \|\underline{\gamma}'\| dt = 2\pi \int_a^b \gamma_1 \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2} dt$$

Se ruotiamo intorno all'asse $y$ abbiamo

$$2\pi \int_{\underline{\gamma}} \gamma_2 ds = 2\pi \int_a^b \gamma_2 \|\underline{\gamma}'\| dt = 2\pi \int_a^b \gamma_2 \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2} dt \qquad \bullet\bullet$$

• Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando intorno all'asse $z$ di $2\pi$ la curva $y = 2 + e^{-t}\cos\varphi$, $z = e^{-t}\sin\varphi$.

$$2\pi \int_0^{+\infty} (2 + e^{-t}\cos t)\sqrt{2e^{-2t}} = \frac{12}{5}\sqrt{2} \qquad \bullet\bullet$$

Pag.11 delle dispense di Tauraso. Nozione di campo vettoriale ed integrale curvilineo di seconda specie o forma differenziale.

• Data la forma differenziale $\omega = xdx + 1 \cdot dy$,calcolare l'integrale curvilineo lungo la curva data dall'unione dei cateti del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ andando da $(0,0)$ a $(1,1)$.

Eseguire lo stesso integrale curvilineo ma lungo la curva $\underline{\gamma}(t) = (t,t)$, $0 \leq t \leq 1$ e lungo la curva $\underline{\gamma}(t) = (t, \sqrt{t})$, $0 \leq t \leq 1$ constatare che si ottiene lo stesso valore $3/2$.

Eseguire il calcolo di prima ma con la forma differenziale $\omega = xdx + x^2dy$ e constatare che non si ottiene lo stesso valore. ••

**Lezione del 10/04/2017 Curve e forme differenziali**

Teorema 2 pag.15. Da pag.16 (paragrafo 4) a pag.20 (esempio 10 escluso). Pag. 21 fino a “Inoltre”.
♠ Svolgere gli esercizi delle dispense di Tauraso: 8,9, 10 (senza tenere conto della parte compresa fra “La forma differenziale” e $\int_\gamma \omega_2$.), 11, 12 (fino a “Allo stesso risultato”), 13 (solo lunghezza della curva)

• Data la forma differenziale in $\mathbf{R}^2$ $\omega(x,y) = 4x^3ydx + (2y + x^4)dy$ calcolare $\displaystyle\int_{\underline{\varphi}} \omega$ dove $\underline{\varphi}$ è la curva $\underline{\varphi}: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}^2$ $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} t \\ \arctan(\sin t) \end{cases}$
Allo stato, tale esercizio si può considerare non facile (e neppure troppo difficile) ••

**Lezione del 20/04/2017 Curve e forme differenziali**

Esempio 11 pag.20. Pag.21 e 22 fino all'esempio 12 escluso. Esempi 13 e 14.

• Calcolo della primitiva della forma differenziale $\omega(x,y) = 4x^3ydx + (2y + x^4)dy$ ••

Studio della forma differenziale $\omega = \dfrac{xdx + ydx}{x^2 + y^2}$

• È data la forma differenziale $\omega(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$. Se ne trovi il dominio e si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$, orientata in senso antiorario, è nell'ordine

$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2+y^2=1\}$, $\quad \gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ (x-1)^2+(y-1)^2=1\}$,
$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2+(y-1)^2=4\}$, ••

**Lezione del 27/04/2017 Curve e forme differenziali, Lemma di Gauss–Green**

Pag.26 Teorema 5 (solo enunciato). **Tutti gli esercizi di Tauraso vanno bene così come i compiti d'esame sempre di Tauraso parte dei quali è risolta nel file "Giornale delle lezioni" dell'anno precedente (verso la fine). I compiti d'esame di Tauraso potete trovarli nella sua pagina web. Vanno bene ed anzi meglio anche i compiti d'esame dati da chi scrive lo scorso anno accademico.**

**Lezione del 04/05/2017 Numeri complessi**

Richiamo sui numeri complessi e loro proprietà . Rappresentazione algebrica $z = a + ib$, rappresentazione trigonometrica $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, rappresentazione esponenziale $z = |z|e^{i\varphi}$.

Definizione di $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ e quindi definizione di serie di funzioni. Come sottoprodotto definizione di serie numerica.

**Lezione del 08/05/2017 Funzioni olomorfe**

Pag.1 fino a "ad esempio". Pag.2 esempio 1) e 4). Pag. 3) esempio 6). Pag.5) fino a pag.9). La dimostrazione del teorema 3 a pag.7 è data solo per metà . L'altra metà si trova qui *http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/ analisi-II-frontale-2015-2016-ing-informatica/-Giornale-delle-lezioni-e-materiale-non-presente-ing- informatica-analis-II-2015-2016.pdf* fra le pagine 20 e 21.

**Lezione del 11/05/2017 Funzioni olomorfe**

Soluzione della equazione in $z$, $z^n = w$, $w \in \in C$ è un numero complesso dato. Pag. 10, 11, 13, 15, 17, 18, 19 fino all'esempio 5 escluso.

♠ Gli esercizi fino a pag.8 compresa

**Lezione del 15/05/2017 Funzioni olomorfe**

Prima formula a pag.21. Nozione di primitiva di una funzione olomorfa. Pag.28 fino a "Osservazione".

**Lezione del 18/05/2017 Serie numeriche reali**

Pag.23, 24 delle dispense di Tauraso

**Lezione del 22/05/2017 Serie di potenze**

Pag.25, 26, 27.

**Lezione del 25/05/2017 Serie di potenze**

Serie si Laurent. Teorema dei residui. Classificazione delle singolarità di una funzione complessa.

• Calcolare $\displaystyle\oint_{\gamma^+} \frac{z^2}{z-2}dz$ dove $|\gamma| = 1$, e $|\gamma| = 3$. ••

Si possono fare tutti gli esercizi fino a pag.24 compresa.

Si possono risolvere tutti gli esercizi d'esame dati da Tauraso e da chi scrive tranne: equazioni differenziali, trasformata di Laplace, integrali real. Sul "Giornale delle lezioni" dello scorso anno, verso la fine, sono risolti numerosi compiti dati da Tauraso.

**Lezione del 29/05/2017 Integrali di funzioni olomorfe**

Teorema 10 pag.37. Pag.41, 42.

• $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t} dt \; |a|>1, \; \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{1+p^2-2p\cos t} \; |p| \neq 1.$ ••

**Lezione del 01/06/2017 Integrali di funzioni olomorfe**

Pag.43 fino a esempio 18 escluso. Pag.39 a partire da osservazione.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ax)\frac{x}{x^2+b^2},$ ••

• Esercizio: trovare i primi quattro valori interi $p$ per cui è diverso da zero l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z^p}{z(z-1)(z^2-4)(z^3-27)}dz$. L'esercizio si può risolvere sia calcolando i residui nei poli della funzione, sia passando attraverso il punto all'infinito ••

**Lezione del 06/06/2017 Integrali di funzioni olomorfe**

• Valor principale di un integrale (V.P.) (non presente sulle dispense di Tauraso e non so se è presente nelle videolezioni; ne dubito). ••

Esercizio sul valor principale •

$$
\begin{aligned}
J &\doteq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = \\
&= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx \doteq I_1+I_2+I_3
\end{aligned}
$$

$I_2$ non è in realtà un intgrale improprio in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$ ed inoltre

$$\left|\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\right| \leq \frac{1}{x^3}$$

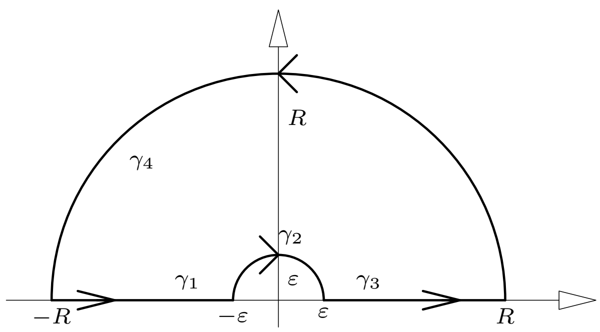
per cui anche $I_1$ ed $I_3$ convergono. L'integrale improprio $J$ dunque esiste ma per poterlo calcolare dobbiamo scrivere la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

**ed a questo punto l'origine diventa un punto di singolarità per la funzione da cui il dover definire l'integrale solo come valor principale ossia**

$$VP\ \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

Il cammino su cui integrare è il seguente se $a>0$ e quello opposto (che gira in senso orario) se $a<0$.



Eseguendo gli integrali e prendendo i limiti $\varepsilon \to 0$ $R \to +\infty$, si ottiene

$$\oint_\gamma \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) - i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0}$$

e quindi

$$\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) - i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0} = 2\pi i Res\left(\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\right) = 2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib}$$

da cui

$$\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) = 2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib} + i\frac{\pi}{b^2} = i\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

La parte immaginaria è $\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$ ed è il valore dell'integrale cercato. Notare che per $a \to 0$, il risultato tende a zero come ci aspettiamo che sia ponendo $a = 0$ nell'integrale originale. Se invece $b \to 0$, il risultato è illimitato come ci si aspetta dal fatto che l'integrale originario diventa un integrale improprio non convergente.

**Ove non fosse chiaro, siamo passati da** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$ **a** $\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$ **in quanto** $\sin z$, **è illimitata sia nel semipiano superiore che nel semipiano inferiore e quindi ci sarebbe impossibile usare la variabile complessa ••**

♠ Esercizi sul valor principale. $VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x(ax^2+bx+c)}dx$ con $b^2-4ac<0$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}\frac{a}{|a|}$

$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx = \pi\frac{1-a}{b^2} + \frac{\pi}{b^2}(e^{-b}-e^{-ab})$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2-x+1)}dx = \pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}}\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}(|b|-|a|)$

$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x(x^2+b^2)}dx,$

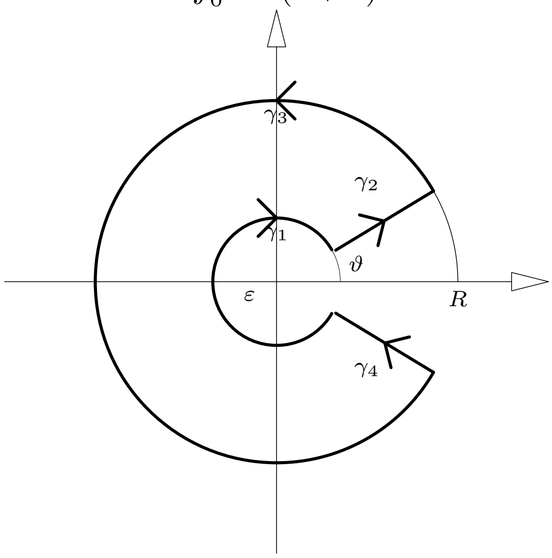
$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x(x^2-x+1)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}}\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

Calcoliamo il primo integrale. $az^2+bz+c=0$ se e solo se $z_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \doteq \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $z_1-z_2 = i\sqrt{-\Delta}/a$.

$$I = \frac{i\pi}{c} + 2\pi i Res\left(\frac{1}{z(az^2+bz+c)}\right)\Big|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{c} + 2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z_1(z-z_1)(z-z_2)} =$$
$$= \frac{i\pi}{c} + \frac{2\pi i}{a\frac{i\sqrt{-\Delta}}{a}\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}} = \frac{i\pi}{c} + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi}{-b+i\sqrt{-\Delta}} = \frac{i\pi}{c} + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi(-b-i\sqrt{-\Delta})}{4ac} =$$
$$= \frac{-\pi b}{\sqrt{4ac-b^2}c}$$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\frac{p}{q}}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con grado$(P) \geq$ grado$(Q) + 2 + \frac{p}{q}$, $Q(x) \neq 0$. (non presente sulle dispense di Tauraso e non so se è presente nelle videolezioni; ne dubito). ••

- Calcolo di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$,




$$\gamma_2(t) = te^{i\vartheta} \quad \varepsilon \leq t \leq R$$
$$\gamma_3(t) = Re^{it} \quad \vartheta \leq t \leq 2\pi - \vartheta$$
$$\gamma_4(t) = -te^{i(2\pi-\vartheta)} \quad -R \leq t \leq -\varepsilon$$
$$\gamma_1(t) = \varepsilon e^{-it} \quad \vartheta - 2\pi \leq t \leq -\vartheta$$

Si esegua $\displaystyle\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_\gamma \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$ con $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ e si dimostri che

$$\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_1} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = \lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_3} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = 0$$

Inoltre $\displaystyle\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_2} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = \lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_4} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$ (applicare il Teorema dei residui).••

♠ Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$, oppure $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}1+x^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x^2)^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)(1+x^2)}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)(1+x^2)^2}dx$,

**Lezione del 08/06/2017 Integrali di funzioni olomorfe**

Osservazione a fine pag.38

Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(x^3+1)}$. Si adotti lo stesso cammino nel campo complesso della lezione precedente e si integri la funzione $\displaystyle\frac{\text{Ln}(z)}{(1+z)(z^3+1)}$. Si ottiene

$$-2\pi i\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(x^3+1)} = 2\pi i\sum Res\frac{\text{Ln}(z)}{(1+z)(z^3+1)}$$

In tale classe di integrali rientrano quelli della forma $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, $P, Q$ polinomi, $Q(x) \neq 0$, e $P(x)/Q(x)$ funzione non pari. Se fosse pari opereremmo $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ e si usa il cammino di pagina 41 delle dispense di Tauraso.

♠ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(x^3+1)}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(x+1)}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(x^2-x+1)}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(x^2+x+1)}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(x^2+x+1)}$.

**Lezione del 12/06/2017 Trasformata di Laplace**

• $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ ••

Le dipense di Tauraso sulla trasformata di Laplace fino a pag.5, proprietà 5) compresa.

**Lezione del 14/06/2017 Trasformata di Laplace**

Proprietà 7) pag.5. Pag.7,8,9. pag.10 a partire dal paragrafo 3, pag.11, pag.12 fino a esempio 6 escluso. Pag.14.

• Risolvere la equazione $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=0$, $y(0)=a$, $y'(0)=b$. ••

**Lezione del 19/06/2017 Trasformata di Laplace**

Soluzione della equazione $mx''(t)=\delta(t-t_0),\ x(0)=a,\ x'(0)=b$

Soluzione della equazione $x^{(\mathrm{iv})}(t)+2x''(t)+x(t)=0$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x'''(0)=a$,

Soluzione della equazione $x''(t)+\alpha^2x(t)=\cos\omega t$, $x(0)=x'(0)=0$, con $\alpha,\omega\in\mathbf{R}$. Distinguere i due casi $|\omega|\neq|\alpha|$ e $|\omega|=|\alpha|$

**Lezione del 22/06/2017 (ultima lezione) Esercizi vari**

• Calcolare gli integrali $\oint\frac{Imz}{1+z^2}dz$ e $\oint\frac{Rez}{1+z^2}dz$ estesi al segmento di estremi $-2-2i$ e $2+2i$ ed alla semicirconferenza di raggio $2\sqrt{2}$ che collega i precedenti punti. Il cammino è percorso in senso antiorario.

*Soluzione (non unica) solo del primo*

Il segmento è parametrizzato da $z(t)=2(1+i)t$ e l'integrale diventa $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2t}{1+4(2i)t^2}2(1+i)dt=\int_{-1}^{1}\frac{4(1+i)t}{1+8it^2}dt=\frac{1+i}{4i}\ln(1+8it^2)\Big|_{-1}^{1}=0$ in quanto l'argomento del logaritmo assume lo stesso valore agli estremi. La parte di semicerchio è data da $z(t)=2\sqrt{2}e^{it}$ e l'integrale diventa $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{2\sqrt{2}\sin t}{1+8e^{2it}}2\sqrt{2}ie^{it}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{e^{it}-e^{-it}}{1+8e^{2it}}4e^{it}dt$. Cambiamo variabile $2t=u$ per cui $\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}du\frac{e^{iu}-1}{1+8e^{iu}}=\frac{1}{4i}\ln(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}du\frac{e^{-iu}}{e^{-iu}+8}=\frac{1}{4i}\ln(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}+\frac{2}{i}\ln(e^{-iu}+8)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}=\frac{2\pi i}{4i}-0=\frac{\pi}{2}$

Con $\displaystyle\oint\frac{Re(z)}{1+z^2}dz$ si ha $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}i\frac{e^{it}+e^{-it}}{1+8e^{2it}}4e^{it}dt=i\frac{\pi}{2}+0.$

Come conseguenza otteniamo $\displaystyle\oint\frac{Re(z)+iIm(z)}{1+z^2}dz=\oint\frac{z}{1+z^2}dz=i\pi$. L'ultimo integrale si può risolvere anche attraverso il teorema di Cauchy scrivendo $\displaystyle\oint\frac{z}{1+z^2}dz=\oint\frac{dz}{2(z-i)}+\frac{dz}{2(z+i)}$. Il secondo integrale è zero lasciando la curva fuori il punto $z=i$. Il primo integrale è pari a $2\pi i\frac{1}{2}$.

*Osservazione* È importante notare come sarebbe un errore scrivere $\frac{1}{4i}\ln(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{1}{4i}\ln(1+8e^{i\frac{5}{2}\pi}) - \frac{1}{4i}\ln(1+8e^{i\frac{\pi}{2}}) = 0$ in quanto non si tiene conto del fatto che la curva $1+8e^{i\frac{5}{2}\pi}$ gira intorno all'origine al contario della curva $e^{-iu}+8$ ••