Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (A)
26–06–2017, A.A.2016-2017

1) (7–punti) Si calcoli il volume della regione V dello spazio definita da

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}\le z\le 2x+2y+1$$

Soluzione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2x+2y+1 \iff \Big(\frac{x}{a}-a\Big)^2+\Big(\frac{x}{b}-b\Big)^2=1+a^2+b^2(\text{ellisse})$$

da cui

$$x(r,t)=a(a+r\sqrt{1+a^2+b^2}\cos t),\quad y(r,t)=b(b+r\sqrt{1+a^2+b^2}\sin t)\quad 0\le r\le 1,\ 0\le t\le 2\pi$$

Il volume che cerchiamo è

$$\int\int_{\left(\frac{x}{a}-a\right)^2+\left(\frac{x}{b}-b\right)^2\le 1+a^2+b^2}\left(2x+2y+1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy \underbrace{=}_{solo\ termini\ non\ nulli}$$
$$\int\int_{\left(\frac{x}{a}-a\right)^2+\left(\frac{x}{b}-b\right)^2\le 1+a^2+b^2}\left[1+2a^2+2b^2-a^2-b^2-r^2(1+a^2+b^2)(C^2+S^2)\right]dt$$
$$=\int_0^1 drrab(1+a^2+b^2)\int_0^{2\pi}dt\left[1+a^2+b^2-r^2(1+a^2+b^2)\right]=$$
$$=\frac{2\pi ab(1+a^2+b^2)^2}{4}=2500\pi\sqrt{2}$$

2) (5–punti) La regione V è superiormente racchiusa da una porzione di piano. Se ne calcoli l'area.

Soluzione Si sta chiedendo l'area dell'ellisse di cui sopra moltiplicata per $\sqrt{1+4+4}$ che dà $ab(1+a^2+b^2)3\pi$ e nel primo caso diventa $600\sqrt{2}\sqrt{\pi}$.

3) (9–punti) Si calcoli

$$\oint_{|z|=3}\frac{z\cdot\mathrm{Im}(z^2)}{z^2+4}dz$$

Soluzione $z=3e^{it}$ da cui

$$\int_0^{2\pi}\frac{3e^{it}9\sin(2t)}{9e^{2it}+4}3ie^{it}dt=\frac{81}{2}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i4t}-1}{9e^{2it}+4}dt\underbrace{=}_{u=e^{it}}\frac{81}{2i}\oint_{|u|=1}\frac{u^4-1}{u(9u^2+4)}du\underbrace{=}_{Residui}$$
$$=2\pi i\frac{81}{2i}\left[\frac{-1}{4}+2\frac{\frac{2^4}{3^4}-1}{\frac{2i}{3}18\frac{2i}{3}}\right]=-4\pi$$

4) (9–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t)+2x'(t)+x(t)=\delta(t-2)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

Soluzione Si vede subito che $x(t)=(t-2)e^{-(t-2)}H(t-2)$.

Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (B)
26–06–2017, A.A.2016-2017

1) (7–punti) Si calcoli il volume della regione V dello spazio definita da

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{7} \leq z \leq 2x + 2y + 1$$

Risultato $256\sqrt{14}\pi$.

2) (5–punti) La regione V è superiormente racchiusa da una porzione di piano. Se ne calcoli l'area.

Soluzione $96\sqrt{14}\pi$

3) (9–punti) Si calcoli

$$\oint_{|z|=4} \frac{z \cdot \operatorname{Im}(z^2)}{z^2+9} dz$$

Soluzione $z = 4e^{it}$ da cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{4e^{it} 16\sin(2t)}{16e^{2it}+9} 4ie^{it} dt = 128 \int_0^{2\pi} \frac{e^{i4t}-1}{16e^{2it}+9} dt \underbrace{=}_{u=e^{it}} 128 \oint_{|u|=1} \frac{u^4-1}{iu(16u^2+9)} du \underbrace{=}_{Residui}$$

$$= 2\pi i \frac{128}{i} \left[\frac{-1}{9} + 2\frac{\frac{81}{256}-1}{\frac{3i}{4} 32 \frac{3i}{4}} \right] = -9\pi$$

4) (9–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \delta(t-2)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Soluzione $x(t) = (t-2)e^{t-2} H(t-2)$.