**Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (A)**
**21–09–2017, A.A.2016-2017**

**1)** (9.5–punti) Calcolare

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 2} \Big| y^2-|x| \Big| dx\, dy$$

L'integrale è somma di diversi contributi che vanno scritti con chiarezza.

**2)** (6.5–punti) Calcolare $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}(1-4z+6z^2)dz$ (percorso antiorario)

**3)** (7.5–punti) Si calcoli

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+x+1)}dx$$

evidenziando il cammino nel piano complesso su cui si intende integrare

**4)** (6.5–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t)=H(t-2)$, $x(0)=a$, $x'(0)=b$.
Si calcoli $x''(2^+)$.

**Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (B)**
**21–09–2017, A.A.2016-2017**

**1)** (9.5–punti) Calcolare
$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1/2}\Big|2y^2-|x|\Big|dx\,dy$$
L'integrale è somma di diversi contributi che vanno scritti con chiarezza

**2)** (6.5–punti) Calcolare $\oint_{|z|=1} e^{\frac{-1}{z}}(1+4z+6z^2)dz$ (percorso antiorario)

**3)** (7.5–punti) Si calcoli
$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+x+1)}dx$$
evidenziando il cammino nel piano complesso su cui si intende integrare

**4)** (6.5–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t)=-H(t-3)$, $x(0)=a$, $x'(0)=b$. Si calcoli $x''(3^+)$.

## Soluzioni compito A

**1)** Innanzitutto osserviamo che sia l'integrando che il dominio sono simmetrici rispetto a ciascuno dei cambiamenti $x \to -x$, $y \to -y$ e quindi ci basta calcolare l'integrale nel primo quadrante e moltiplicare per 4.

$y^2 \geq |x|$ se e solo se $y \leq -\sqrt{|x|}$, oppure $y \geq \sqrt{|x|}$. Solo la seconda ci interessa per cui $y \geq \sqrt{x}$. Inoltre

$$x^2 + (\sqrt{x})^2 = 2 \iff x = -2, \ \vee \ x = 1$$

**Prima soluzione** Ne segue che l'integrale diventa

$$4\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} (y^2 - x)dy + 4\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (-y^2 + x)dy + 4\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (-y^2 + x)dy =$$

$$= 4\int_0^1 dx \left[\frac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\sqrt{2-x^2} + x^{\frac{3}{2}}\right] + 4\int_0^1 dx \left[\frac{-1}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right] +$$

$$+ 4\int_1^{\sqrt{2}} dx \left[\frac{-1}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}} + x\sqrt{2-x^2}\right]$$

$$\int_0^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \underbrace{=}_{x=\sqrt{2}\sin t} 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 t - \frac{\sin^2(2t)}{4}\right) dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2} - \frac{1-\cos(4t)}{8}\right) dt = 4\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{32}\right) = \frac{3}{8}\pi + 1$$

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}dx = \frac{1}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) \qquad \int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \underbrace{=}_{x=\sqrt{2}\sin t} 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - \frac{\sin^2(2t)}{4}\right) dt =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2} - \frac{1-\cos(4t)}{8}\right) dt = 4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{32}\right) = \frac{3}{8}\pi - 1$$

Alla fine otteniamo

$$\frac{32}{15} - \frac{4}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{112}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Si poteva pure scrivere

$$\int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} (y^2 - x) + \int_0^1 dy \int_0^{y^2} (y^2 - x)dx + \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} (-y^2 + x)dx$$

**Seconda soluzione** (da completare) Usiamo coordinate polari. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. ($\cos t \doteq C$, $\sin t \doteq S$.

$$y^2 = x \iff r^2 S^2 = rC \iff r = C/S^2$$

L'integrale diventa

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4dt \int_{\frac{C}{S^2}}^{\sqrt{2}} (r^2 S^2 - rC)r\, dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4dt \int_0^{\frac{C}{S^2}} (-r^2 S^2 + rC)r\, dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4dt \int_0^{\sqrt{2}} (-r^2 S^2 + rC)r\, dr$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4dt \int_{\frac{C}{S^2}}^{\sqrt{2}} (r^2S^2 - rC)r\,dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4dt \left[\frac{S^2}{4}4 - \frac{S^2}{4}\frac{C^4}{S^8} + \frac{C}{3}\frac{C^3}{S^6} - \frac{C}{3}2\sqrt{2}\right]$$

L'unico integrale non evidente è

$$\int \frac{C^4}{S^6}dt = \int \frac{\cot^4 t}{\sin^2 t}dt = \frac{-1}{5}\cot^5 t$$

**2)**

Basta scrivere $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots$ ed applicare il teorema dei residui per $z = 0$. Il risultato è zero.

**3)**

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+x+1)}dx = V.P.\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx = \mathrm{Re}\left(V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx\right)$$

Si utilizzi il cammino a pag.13 del "Giornale delle lezioni" e si ottiene

$$2\pi i Res\left[\frac{e^{iz}}{z(z^2+z+1)}\right]\Big|_{z=(-1+i\sqrt{3})/2} = \frac{-i\pi e^{iz}}{z^2+z+1}\Big|_{z=0} + V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx$$

e quindi

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx = i\pi + 2\pi i\frac{e^{i(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})i\sqrt{3}} = i\pi + 2\pi i\frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}e^{i(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

da cui

$$\mathrm{Re}\left(V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}\cos\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{2}\right]e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\cos(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6})$$

oppure $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\cos(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2})$

**4)**

$$\mathcal{L}(x) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^3} \implies x(t) = a + bt + \frac{(t-2)^2}{2}H(t-2)$$

$$x''(2^+) = \lim_{t\to 2^+} x''(t) = \lim_{t\to 2^+} H(t-2) = 1$$

oppure osservare che

$$x'(t) = b + (t-2)H(t-2) + \frac{1}{2}(t-2)^2\delta(t-2) = b + (t-2)H(t-2)$$

$$x''(t) = H(t-2) + (t-2)\delta(t-2) = H(t-2)$$

**Soluzioni compito B**

**1)** Innanzitutto osserviamo che sia l'integrando che il dominio sono simmetrici rispetto a ciascuno dei cambiamenti $x \to -x$, $y \to -y$ e quindi ci basta calcolare l'integrale nel primo quadrante e moltiplicare per 4.

$2y^2 \geq |x|$ se e solo se $y \leq -\sqrt{|x|/2}$, oppure $y \geq \sqrt{|x|/2}$. Solo la seconda ci interessa per cui $y \geq \sqrt{x/2}$. Inoltre

$$x^2 + \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{1}{2} \iff x = -1, \ \vee \ x = \frac{1}{2}$$

Ne segue che l'integrale diventa

$$4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (2y^2 - x)dy + 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} (-2y^2 + x)dy + 4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (-2y^2 + x)dy =$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \left[\frac{2}{3}(\frac{1}{2} - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} - x\sqrt{\frac{1}{2} - x^2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\right] + 4\int_0^{\frac{1}{2}} dx \left[\frac{-x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\right] +$$

$$+ 4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \left[\frac{-2}{3}(\frac{1}{2} - x^2)^{\frac{3}{2}} + x\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}\right]$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \underbrace{=}_{x=\sin t/\sqrt{2}} \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 t - \frac{\sin^2(2t)}{4}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} - \frac{1 - \cos(4t)}{8}\right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{32}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{32}\pi + \frac{1}{4}\right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{10\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}dx = \frac{1}{3}(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{8}) \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}dx = \frac{1}{24}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{1}{2} - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \underbrace{=}_{x=\sin t/\sqrt{2}} \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - \frac{\sin^2(2t)}{4}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} - \frac{1 - \cos(4t)}{8}\right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{32}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{32}\pi - \frac{1}{4}\right)$$

Alla fine otteniamo

$$\frac{4}{15} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6} = \frac{14}{15} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Si poteva pure scrivere

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-y^2}} (2y^2 - x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{2y^2} (2y^2 - x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y^2}^{\sqrt{\frac{1}{2}-y^2}} (-2y^2 + x)dx$$

**2)**

Basta scrivere $e^{\frac{-1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{6z^3} + \ldots$ ed applicare il teorema dei residui per $z = 0$. Il risultato è zero.

**3)**

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+x+1)}dx = V.P. \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx = \mathrm{Im}\left( V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx \right)$$

Si utilizzi il cammino a pag.13 del "Giornale delle lezioni" e si ottiene

$$2\pi i Res\left[\frac{e^{iz}}{z(z^2+z+1)}\right]\Big|_{z=(-1+i\sqrt{3})/2} = \frac{-i\pi e^{iz}}{z^2+z+1}\Big|_{z=0} + V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx$$

e quindi

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx = i\pi + 2\pi i \frac{e^{i(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})i\sqrt{3}} = i\pi + 2\pi i \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} e^{i(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

da cui

$$\mathrm{Im}\left( V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+x+1)}dx \right) = \pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}(\cos\frac{1}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{1}{2}) = \pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}} \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2})$$

oppure

$$\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}} \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2})$$

**4)**

$$\mathcal{L}(x) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} - \frac{e^{-3p}}{p^3} \implies x(t) = a + bt - \frac{(t-3)^2}{2} H(t-3)$$

$$x''(3^+) = \lim_{t\to 3^+} x''(t) = \lim_{t\to 3^+} H(t-3) = 1$$

oppure osservare che

$$x'(t) = b - (t-3)H(t-3) - \frac{1}{2}(t-3)^2\delta(t-3) = b - (t-3)H(t-3)$$

$$x''(t) = -H(t-3) - (t-3)\delta(t-3) = -H(t-3)$$