Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (A)
15–07–2017, A.A.2016-2017

1) (7.5–punti) Si calcoli il volume della porzione limitata, detta V, della regione in $\mathbf{R}^3$ definita da

$$5\sqrt{x^2+y^2} \le z \le x^2+y^2+4$$

Prima Soluzione Bisogna intersecare il cono di equazione $z = 5\sqrt{x^2+y^2}$ con il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2+4$. Definendo $\sqrt{x^2+y^2} = r$, si ha $r^2-5r+4 \ge 0$ se e solo se $r \le 1$, $r \ge 4$. La soluzione $r \ge 4$ corrisponde ad un volume infinito per cui solo $r \le 1$ va considerata. Integrando “per fili”, ll volume che cerchiamo è

$$\int\int_{0\le r\le 1} (x^2+y^2+4-5\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Passiamo a coordinate polari

$$\int_0^1 drr\int_0^{2\pi}(r^2+4-5r)dt = \frac{7}{6}\pi$$

Seconda soluzione Il volume che cerchiamo è ottenuto ruotando intorno all’asse z l’insieme nel primo quadrante del piano (y,z) dato da $5y \le z \le y^2+4$. Il volume è

$$2\pi\int_0^1 dy\int_{5y}^{4+y^2} dz = 2\pi\int_0^1 dyy(4+y^2-5y) = \frac{7}{6}\pi$$

Si veda il “Giornale delle lezioni”

2) (7.5–punti) Si calcoli l’area della superficie totale che racchiude V (superficie laterale e superiore)

Prima soluzione La superficie superiore appartiene al paraboloide e l’area è

$$\int\int_{0\le r\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_0^1 drr\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4r^2}dt = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

La superficie interna (inferiore) appartiene al cono

$$\int_0^{2\pi} dt\int_0^1 dr\, r\sqrt{26} = \pi\sqrt{26}$$

Seconda soluzione La superficie esterna si ottiene ruotando di 360 gradi intorno all’asse z la curva γ il cui sostegno è $\{(y,z)\in\mathbf{R}^2 \colon 0\le y\le 1,\ 0\le z\le y^2+4\}$. L’area che cerchiamo è

$$\int_\gamma 2\pi y ds = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+4y^2}dy$$

Per la superficie inferiore si ha

$$\int_\gamma 2\pi y ds = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+25}dy$$

posto che $z = 5y$ è la curva su cui integrare.

3) (7.5–punti) Si calcoli

$$\oint_{|z|=3} \frac{z \cdot \mathrm{Im}(z^2) \cdot \mathrm{Im}(z)}{z^2+4} dz$$

Soluzione $z = 3e^{it}$ e l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{3ie^{it}}_{dz} \underbrace{3e^{it}}_{z} \frac{27\sin(2t)\sin t}{4+9e^{i2t}} dt = \frac{243i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{4+9e^{i2t}} \left[-e^{3it} - e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}\right] dt$$

Ora $e^{it} = u$, da cui

$$\frac{243}{4} \oint_{|u|=1} du \frac{u}{4+9u^2} \left[-u^3 + u + \frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}\right] = 0 \text{ usare i residui}$$

4) (7.5–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = H(t-2)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Soluzione

$$\mathcal{L}(x) = \frac{p+2}{(p+1)^2} + \frac{e^{-2p}}{p(p+1)^2} \implies x(t) = e^{-t}(1+t) + H(t-2)(1 - e^{-(t-2)}(t-1))$$

Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (B)
26–06–2017, A.A.2016-2017

1) (7.5–punti) Si calcoli il volume della porzione limitata, detta V, della regione in $\mathbf{R}^3$ definita da

$$3\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x^2+y^2+2$$

Prima Soluzione Bisogna intersecare il cono di equazione $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$ con il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2+2$. Definendo $\sqrt{x^2+y^2} = r$, si ha $r^2-3r+2 \geq 0$ se e solo se $r \leq 1$, $r \geq 2$. La soluzione $r \geq 2$ corrisponde ad un volume infinito per cui solo $r \leq 1$ va considerata. Integrando "per fili", ll volume che cerchiamo è

$$\int\int_{0\leq r\leq 1} (x^2+y^2+2-3\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Passiamo a coordinate polari

$$\int_0^1 drr \int_0^{2\pi} (r^2+2-3r) = \frac{\pi}{2}$$

Seconda soluzione Il volume che cerchiamo è ottenuto ruotando intorno all'asse z l'insieme nel primo quadrante del piano (y,z) dato da $3y \leq z \leq y^2+2$. Il volume è

$$2\pi \int_0^1 dy \int_{3y}^{2+y^2} dz = 2\pi \int_0^1 dyy(2+y^2-3y) = \frac{\pi}{2}$$

Si veda il "Giornale delle lezioni"

2) (7.5–punti) Si calcoli l'area della superficie totale che racchiude V (superficie laterale e superiore)

Prima soluzione La superficie superiore appartiene al paraboloide e l'area è

$$\int\int_{0\leq r\leq 1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_0^1 drr \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}dt = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{3}-1)$$

La superficie inferiore appartiene al cono

$$\int\int_{0\leq r\leq 1} \sqrt{10} = \pi\sqrt{10}$$

Seconda soluzione Come nel precedente problema (cambiano solo i numeri)

3) (7.5–punti) Si calcoli

$$\oint_{|z|=4} \frac{z\cdot \text{Im}(z^2)\text{Im}(z^2)}{z^2+9}dz$$

Soluzione $z = 4e^{it}$ e l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{4ie^{it}}_{dz}\underbrace{4e^{it}}_{z} \frac{256\sin(2t)\sin(2t)}{9+16e^{i2t}}dt = -1024i\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{9+16e^{2it}}(e^{4it}+e^{-4it}-2)dt$$

Ora $e^{it} = u$, da cui

$$
\begin{aligned}
&-1024 \oint_{|u|=1} du \frac{1}{9+16u^2}\left[u^5 + \frac{1}{u^3} - 2u\right] = -2048\pi \left[2\frac{(\frac{3}{4}i)^5}{24i} - 2\frac{1}{24i(\frac{3}{4}i)^3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right] = \\
&-2048\pi \left[\frac{81}{4094} - \frac{7}{81} + \frac{1}{6}\right]
\end{aligned}
$$

4) (7.5–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = H(t-2)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Soluzione

$$
\mathcal{L}(x) = \frac{p-2}{(p-1)^2} + \frac{e^{-2p}}{p(p-1)^2} \implies x(t) = e^t(1-t) + H(t-2)(1 + e^{t-2}(t-3))
$$