Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (A)
07–09–2017, A.A.2016-2017

1) (7.5–punti) Si calcoli il volume della regione $V \subset \mathbf{R}^3$ definita da

$$x^2 + y^2 + 4 \le z \le 5\sqrt{x^2 + y^2}$$

2) (7.5–punti) Si calcoli l'area della superficie totale che racchiude V

3) (7.5–punti) Si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3} dx$$

evidenziando il cammino nel piano complesso su cui si intende integrare

4) (7.5–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = tH(t-2)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online), compito (B)
07–09–2017, A.A.2016-2017

1) (7.5–punti) Si calcoli il volume della regione $V \subset \mathbf{R}^3$, definita da

$$x^2 + y^2 + 2 \leq z \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

2) (7.5–punti) Si calcoli l'area della superficie totale che racchiude V

3) (7.5–punti) Si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(2+x)^3} dx$$

evidenziando il cammino nel piano complesso su cui si intende integrare

4) (7.5–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = tH(t-2)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Soluzione problema 1)–(A)

Bisogna intersecare il cono di equazione $z = 5\sqrt{x^2+y^2}$ con il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2+4$. Definendo $\sqrt{x^2+y^2} = r$, si ha $r^2-5r+4\le 0$ se e solo se $1\le r\le 4$. Integrando “per fili”, il volume che cerchiamo è

$$\int\int_{1\le r\le 4}(5\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2-4)dxdy$$

Passiamo a coordinate polari

$$\int_1^4 drr\int_0^{2\pi}(5r-r^2-4)dt = \frac{45}{2}\pi$$

Seconda soluzione Il volume che cerchiamo è ottenuto ruotando intorno all'asse z l'insieme nel primo quadrante del piano (y,z) dato da $y^2+4\le z\le 5y$. Il volume è

$$2\pi\int_1^4 dyy\int_{4+y^2}^{5y}dz = 2\pi\int_1^4 dyy(5y-y^2-4) = 9\pi$$

Si veda il “Giornale delle lezioni”

Soluzione problema 2)–(A) Prima soluzione

La superficie inferiore appartiene al paraboloide e l'area è

$$\int\int_{1\le r\le 4}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_0^1 drr\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4r^2}dt = \frac{5^{3/2}\pi}{6}(13^{3/2}-1)$$

La superficie superiore appartiene al cono

$$\int_0^{2\pi}dt\int_1^4 dr\, r\sqrt{26} = 15\pi\sqrt{26}$$

Per la seconda soluzione si veda l'analogo problema nel compito del 15/7/2017

Soluzione problema 3)–(A)

Usando il cammino a pag.15 del “Giornale delle lezioni”, si ha

$$2I = 2\pi i Res_{z=-1}f(z), \qquad f(z) = \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^3}$$

per cui

$$I = \frac{1}{2}2\pi i\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{2}\sqrt{z}\Big|_{z=e^{i\pi}} = \frac{\pi}{8}$$

Si può anche prima cambiare variabile $x=t^2$ e poi integrare ma il denominatore diventa di sesto grado.

Errori che hanno comportato zero quale punteggio:

Scrivere $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3}dx$

Porre $x = e^{it}$

Soluzione problema 4)–(A)

$$\mathcal{L}(x) = \frac{p+2}{(p+1)^2} + \frac{2e^{-2p}}{p(p+1)^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2(p+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left[\frac{p+2}{(p+1)^2}\right] = \frac{d}{dp}e^{pt}(p+2)\Big|_{p=-1} = te^{-t} + e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left[\frac{2e^{-2p}}{p(p+1)^2}\right] = \frac{d}{dp}\frac{2e^{(t-2)p}}{p}\Big|_{p=-1} = -2(t-2)e^{-(t-2)} - 2e^{-(t-2)}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left[\frac{e^{-2p}}{p^2(p+1)^2}\right] = \frac{d}{dp}\frac{e^{(t-2)p}}{p^2}\Big|_{p=-1} + \frac{d}{dp}\frac{e^{(t-2)p}}{(p+1)^2}\Big|_{p=0} = (t-2)e^{-(t-2)} + 2e^{-(t-2)} + (t-2) - 2$$

Sommando si ha

$$x(t) = te^{-t} + e^{-t} + H(t-2)((t-4) - (t-2)e^{-(t-2)})$$

Da non credersi! Ci sono ancora persone che dimenticano di assegnare correttamente o del tutto il fattore $H(t-2)$. Un errore del genere compromette l'esercizio anche se fino ad allora fosse fatto bene. Provino almeno costoro a verificare le condizioni iniziali! Se $x(0)\neq 1$ oppure $x'(0)\neq 0$ nella soluzione trovata, certamente c'è un errore. Inoltre molti studenti, ad alcuni dei quali tale errore è costato il compito, ancora scrivono $\mathcal{L}(f\cdot g) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$ per cui si avrebbe $\mathcal{L}(tH(t-2)) = \mathcal{L}(t)\cdot\mathcal{L}(H(t-2))$

Soluzione problema 1)–(B) Bisogna intersecare il cono di equazione $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$ con il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2+2$. Definendo $\sqrt{x^2+y^2} = r$, si ha $r^2-3r+2 \le 0$ se e solo se $1 \le r \le 2$. Integrando "per fili", ll volume che cerchiamo è

$$\int\int_{1\le r\le 2} (3\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - 2)dxdy$$

Passiamo a coordinate polari

$$\int_1^2 drr \int_0^{2\pi} (3r - r^2 - 2) = \frac{\pi}{2}$$

Seconda soluzione Il volume che cerchiamo è ottenuto ruotando intorno all'asse z l'insieme nel primo quadrante del piano (y,z) dato da $y^2+2 \le z \le 3y$. Il volume è

$$2\pi \int_1^2 ydy \int_{2+y^2}^{3y} dz = 2\pi \int_1^2 dyy(3y - y^2 - 2) = \frac{\pi}{2}$$

Si veda il "Giornale delle lezioni"

Soluzione problema 2)–(B)

Prima soluzione La superficie laterale esterna appartiene al paraboloide e l'area è

$$\int\int_{1\le r\le 2} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_1^2 drr \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}dt = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

La superficie superiore (o interna) appartiene al cono

$$\int\int_{1\le r\le 2} \sqrt{10}dxdy = 3\pi\sqrt{10}$$

Seconda soluzione Come nel precedente problema (cambiano solo i numeri)

Soluzione problema 3)–(B)

Usando il cammino a pag.15 del "Giornale delle lezioni", si ha

$$2I = 2\pi i Res_{z=-2} f(z), \qquad f(z) = \frac{\sqrt{z}}{(2+z)^3}$$

per cui

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{2}\sqrt{z}\Big|_{z=2e^{i\pi}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$$

Si può anche prima cambiare variabile $x = t^2$ e poi integrare ma il denominatore diventa di sesto grado.

Errori che hanno comportato zero quale punteggio:

Scrivere $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3}dx$

Porre $x = e^{it}$

Soluzione problema 4)–(B)

$$\mathcal{L}(x) = \frac{p-2}{(p-1)^2} + \frac{2e^{-2p}}{p(p-1)^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2(p-1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left[\frac{p-2}{(p-1)^2}\right] = \frac{d}{dp}e^{pt}(p-2)\Big|_{p=1} = -te^t + e^t$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left[\frac{2e^{-2p}}{p(p-1)^2}\right] = \frac{d}{dp}\frac{2e^{(t-2)p}}{p}\Big|_{p=1} = 2(t-2)e^{t-2} - 2e^{t-2}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left[\frac{e^{-2p}}{p^2(p-1)^2}\right] = \frac{d}{dp}\frac{e^{(t-2)p}}{p^2}\Big|_{p=1} + \frac{d}{dp}\frac{e^{(t-2)p}}{(p-1)^2}\Big|_{p=0} = (t-2)e^{t-2} - 2e^{t-2} + (t-2) + 2$$

Sommando si ha

$$x(t) = e^t - te^{-t} + H(t-2)(t + (3t-10)e^{t-2})$$

Da non credersi! Ci sono ancora persone che dimenticano di assegnare correttamente o del tutto il fattore $H(t-2)$. Un errore del genere compromette l'esercizio anche se fino ad allora fosse fatto bene. Provino almeno costoro a verificare le condizioni iniziali! Se $x(0) \neq 1$ oppure $x'(0) \neq 0$ nella soluzione trovata, certamente c'è un errore. Inoltre molti studenti, ad alcuni dei quali tale errore è costato il compito, ancora scrivono $\mathcal{L}(f \cdot g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$ per cui si avrebbe $\mathcal{L}(tH(t-2)) = \mathcal{L}(t) \cdot \mathcal{L}(H(t-2))$