Analisi II – Elettronica & Telecomunicazioni, A.A.2012-2013
Giornale del "corsetto"

Si tenga presente che quanto segue è parte a tutti gli effetti del programma e può essere chiesto in sede di esame orale.

–**Aula** vuol dire: esercizio svolto in classe. –**Argomenti** vuol dire: argomenti trattati nella lezione

Lezione del 07/01/2013

–**Argomenti** : generalità sui numeri complessi

•–**Aula** Risolvere l'equazione $z^n = 1$ ed interpretare geometricamente la soluzione per $n = 2, 3, 4$.

•–**Aula** Dati due numeri complessi z e w dire che relazione intercorre affiché il prodotto sia immaginario puro.

•–**Aula** Siano $\{z_k\}$ le radici n–esime dell'unità . Trovare $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k$

•–**Aula** Siano $\{z_k\}$ le radici n–esime dell'unità . Trovare $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} z_k$

•–**Aula** Sia z un numero complesso per cui $z + \dfrac{1}{z} = \cos(\vartheta)$. Dimostrare che $z^m + z^{-m} = \cos(m\vartheta)$

Esercizi per casa (più di quanti è ragionevole farne)

1. Calcolare i^n con n intero positivo o nullo.

2. Calcolare a) $(1 + 2i)^6$, b) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$, c) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$, d) $(2 + i)^7 - (2 - i)^7$, e) $(1 + 2i)^5 + (1 - 2i)^5$

3. Semplificare le seguenti espressioni *a*) $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ b) $\frac{a+bi}{a-bi}$ c) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ d) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$ e) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

4. a) Calcolare $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ dove n è un numero intero positivo b) calcolare $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$, c) calcolare $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

5. Calcolare i seguenti numeri complessi *a*) $\sqrt{2i}$, b) $\sqrt{-8i}$, c) $\sqrt{3 - 4i}$, d) $\sqrt{-15 + 8i}$, e) $\sqrt{-3 - 4i}$, f) $\sqrt{-11 + 60i}$, g) $\sqrt{-8 + 6i}$, h) $\sqrt{-8 - 6i}$, i) $\sqrt{8 - 6i}$, j) $\sqrt{8 + 6i}$, k) $\sqrt{2 - 3i}$, l) $\sqrt{4 + i} + \sqrt{4 - i}$, m) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$, n) $(-1)^{1/4}$, o) $(2 - i\sqrt{12})^{1/4}$, p) $(2 - i)^{1/4}$

6. Risolvere le equazioni *a*) $z^2-(2+i)z+7i-1 = 0$, b) $z^2-(3-2i)z+5-5i = 0$, c) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i = 0$ d) $z^4 = 2 - i$

7. Dare le condizioni affinché due numeri complessi abbiano un prodotto che sia immaginario puro.

8. *a*) Sia $z = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$. Calcolare $(1 + z)^n$,

b) Siano $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcolare $z_1^n + z_2^n$ con n intero

9. Calcolare $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ n intero

10. Dimostrare che se $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ allora $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos(m\theta)$

11. Dimostrare che $\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$

12. Calcolare le quantità $\sum_{k=0}^{n} \sin k\vartheta$ e $\sum_{k=0}^{n} \cos k\vartheta$.

13. Semplificare $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

14. Semplificare $a)$ $\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}$ e b) $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$

15. Siano $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ le soluzioni della equazione $z^n = 1$ (le radici dell'unità). Si dica quanto valgono a) $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$, b) $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$.

Lezione del 08/01/2013

–**Argomenti** : distanza e topologia in **C**; nozione di limite e derivata di funzioni complesse. Dimostrazione del teorema

Teorema1 *Una funzione data come sopra è olomorfa se e solo se* $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$ *sono differenziabili ed inoltre* $u_x(x,y) = v_y(x,y)$, $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

Dimostrazione Sia f olomorfa. Ciò vuol dire che $f(z) = f(z_0)+(a+ib)(z-z_0)+o(|z-z_0|)$ dove $a+ib = f'(z_0)$. Separando parte reale e immaginaria si arriva a $u(x,y)+iv(x,y) = (u(x_0,y_0) + (a(x-x_0) - b(y-y_0)) + Re(o(|z-z_0|)))+ i\,(v(x_0,y_0) + (a(y-y_0) + b(x-x_0)) + Im(o(|z-z_0|)))$.

$u(x,y) = (u(x_0,y_0) + (a(x-x_0) - b(y-y_0)) + Re(o(|z-z_0|)))$ è la relazione di differenziabilità di $u(x,y)$ e la seconda la stessa cosa per $v(x,y)$. Ne segue che $a = u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$ e $b = v_y(x_0,y_0) = -u_x(x_0,y_0)$.

Viceversa supponiamo che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ siano differenziabili e valgano le condizioni di Cauchy–Riemann. Dunque sappiamo che $u(\underline{x}) = u(\underline{x}_0)+u_x(\underline{x}_0)+u_y(\underline{x}_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|)$ e $v(\underline{x}) = v(\underline{x}_0)+v_x(\underline{x}_0)+v_y(\underline{x}_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|)$. Sommano $u(\underline{x})+iv(\underline{x})$ si ottiene $u(\underline{x})+iv(\underline{x}) = u(\underline{x}_0)+iv(\underline{x}_0)+(x-x_0)(u_x(\underline{x}_0)iv_x(\underline{x}_0))+i(y-y_0)(-iu_y(\underline{x}_0)+ v_y(\underline{x}_0)+o(|z-z_0|)$ ed usando le condizioni di Cauchy Riemann si arriva a $u(\underline{x})+iv(\underline{x}) = u(\underline{x}_0)+iv(\underline{x}_0)+(x- x_0)(u_x(\underline{x}_0)iv_x(\underline{x}_0))+i(y-y_0)(iv_x(\underline{x}_0)+u_x(\underline{x}_0)+o(|z-z_0|) = f(z_0)+(z-z_0)(u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))+o(|z-z_0|)$ da cui segue la derivabilità della funzione $f(z)$ in $z_0 = x_0+iy_0$ e $f'(z_0) = u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0)) = \frac{1}{i}(u_y(\underline{x}_0)+iv_y(\underline{x}_0))$ q.e.d.

Derivate di funzioni elementari, potenze, exponenziale, seni, coseni.

Lezione del 10/01/2013

–**Argomenti** : Integrazione in **C**; nozione di curva regolare e regolare a tratti nel piano complesso; Integrazione nel piano complesso. Del libro di testo (Bertsch–DalPasso–Giacomelli ma va bene anche il vecchio Bertsch–DalPasso) sono stati dimostrati i teoremi **18.8** Teorema Integrale di Cauchy e **18.10** Formula Integrale di Cauchy

•–**Aula** Integrale della funzione $f(z) = (\mathbf{Re}(z))^2$ lungo le due curve $\gamma_1(t) = it$, $-1 \le t \le 1$ e $\gamma_2(t) = \cos t + i\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

•–**Aula** Integrale della funzione $f(z) = z^2$ lungo le due curve $\gamma_1(t) = it$, $-1 \le t \le 1$ e $\gamma_2(t) = \cos t + i\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

•–**Aula** Integrale della funzione $f(z) = 1/z$ lungo la curva $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

• fare gli esercizi **18.12** del libro.

• Utilizzando la formula integrale di Cauchy e quando serve i fratti semplici, calcolare i seguenti integrali (γ è la circonferenza di centro $z = 0$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario) a) $\displaystyle\int_\gamma dz\frac{z^2}{z-2}$, b) $\displaystyle\int_\gamma dz\frac{z^2}{2z-1}$, c) $\displaystyle\int_\gamma dz\frac{z^3}{2iz-1}$, d) $\displaystyle\int_\gamma dz z^{-3}e^{iz}$ e) $\displaystyle\int_\gamma dz\frac{1}{(z-2)^2(2z-1)}$, f) $\displaystyle\int_\gamma dz\frac{z^2}{(z-2)(2z-1)^2}$. Successivamente si calcolino gli stessi integrali ma estesi alla circonferenza di raggio 3 e percorsa in senso antiorario.

• Svolgimento del primo. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z-2}dz = 0$ in quanto la funzione è analitica all'interno di γ.

Con la circonferenza di raggio 3 si può applicare la formula di Cauchy $f(2) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint \frac{f(z)}{z-2}dz$ con $f(z) = z^2$ e quindi l'integrale è $2\pi i f(2) = 8\pi i$

Per d) si scriva la serie di Taylor dell'esponenziale e poi si calcoli $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z^k}dz$ con $k = 1, 2, 3$ e poi $k = 0, -1, -2, -3, \ldots$. Gli integrali sono dei normali integrali nel piano complesso cui applicare la definizione.

Lezione del 14/01/2013

–**Argomenti**

• Derivata di una funzione olomorfa a partire dalla formula di Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

• Concetto di primitiva di una funzione complessa. In particolare $f(z) = z^k$ con k intero relativo.

• Studio della parte reale e della parte immaginaria dell'integrale $\displaystyle\int \frac{dz}{z}$

• Proprietà fondamentali delle $f(z) = \sqrt{z}$, e $f(z) = L_n(z)$

• –**Aula** calcolare gli integrali $\displaystyle\oint \frac{Imz}{1+z^2}dz$ e $\displaystyle\oint \frac{Rez}{1+z^2}dz$ estesi al segmento di estremi $-2-2i$ e $2+2i$ ed alla semicirconferenza di raggio $2\sqrt{2}$ che collega i precedenti punti. Il cammino è percorso in senso antiorario.

Lezione del 15/01/2013

–**Argomenti** Serie di potenze nel campo complesso. Sviluppabilità in serie di Taylor di funzioni olomorfe inn insiemi semplicemente connessi. Integrale di Cauchy per funzioni olomorfe nell'insieme $0 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ e conseguente serie di Laurent.

• Serie di potenze centrata in zero della funzione $f(z) = 1/(1-z)$ e $f(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$.

Lezione del 17/01/2013

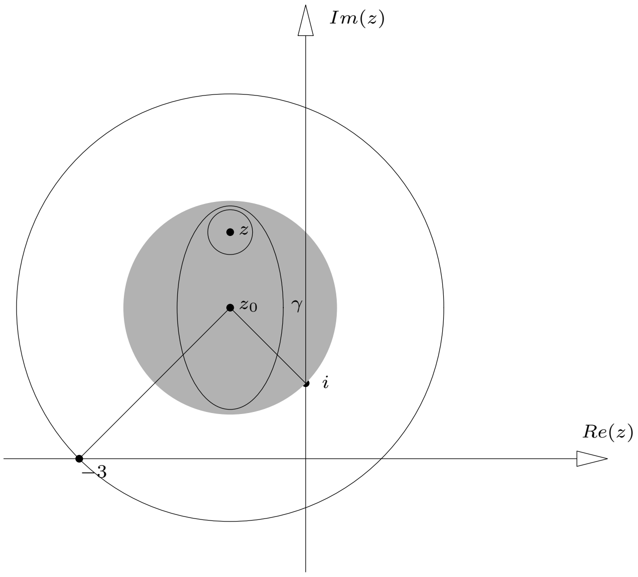
–**Argomenti** Teorema dei residui.

• Esercizio per casa Sia data la funzione $f(z) = \frac{z}{(z-i)(3+z)}$. Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in un qualsiasi punto del piano complesso.

Svolgimento Bisogna fare una scelta del punto in cui centrare lo sviluppo.

Iniziamo con un punto z_0 diverso da i e -3 ed inoltre $|z_0 - i| < |z_0 + 3|$.

• Consideriamo tutti punti in cui $|z - z_0| < |z_0 - i|$ (il cerchio più scuro nella figura).



In $z_0 \neq i, -3$ la funzione è certamente derivabile e quindi analitica. Inoltre è analitica nell'insieme $|z-z_0| < |z_0-i|$ e quindi si ha $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw \dfrac{f(w)}{w-z}$ dove γ è una curva regolare che circonda z e contenuta all'interno dell'insieme $|z-z_0|<|z_0-i|$ $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{f(w)}{w-z} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw \dfrac{f(w)}{w-z_0+z_0-z} =$ $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw \dfrac{f(w)}{(w-z_0)(1+\frac{z_0-z}{w-z_0})} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} =$ $\sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k\dfrac{1}{k!}\dfrac{d^kf}{dx^k}(z_0)$. La serie converge nell'insieme $|z-z_0|<|z_0-i|$ ed è una serie di Taylor.

Per trovare i coefficienti dello sviluppo si possono seguire quattro strade ma a lezione è stata usata solo quella contraddistinta dal simbolo ♣. Gli studenti sono tenuti a sapere almeno un una modalità .

• Si eseguono gli integrali $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}$ e quindi $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{w}{(w-i)(w+3)(w-z_0)^{k+1}} =$ $= \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{1}{(w-z_0)^{k+1}}\Big(\dfrac{A}{w-i}+\dfrac{B}{w+3}\Big)\stackrel{\text{def}}{=} I_{k+1}+J_{k+1}$ con $A = \dfrac{i}{3+i}$, $B=\dfrac{3}{3+i}$. $I_{k+1}+J_{k+1} =$ $= \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\Big[\dfrac{A}{(w-i)(w-z_0)(w-z_0)^k}+\dfrac{B}{(w+3)(w-z_0)(w-z_0)^k}\Big]$. Continuando si ha $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{A}{(w-z_0)^k}\Big(\dfrac{A_1}{w-i}+\dfrac{A_2}{w-z_0}\Big)+\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\dfrac{B}{(w-z_0)^k}\Big(\dfrac{B_1}{w+3}+\dfrac{B_2}{w-z_0}\Big)$ con $A_1 = \dfrac{-1}{z_0-i}$, $A_2 = \dfrac{1}{z_0-i}$, $B_1 = \dfrac{-1}{3+z_0}$, $B_2 = \dfrac{1}{3+z_0}$.

Se $k=0$ il risultato è $\dfrac{1}{2\pi i}(AA_2+BB_2)2\pi i$ (gli integrali con A_1 e B_1 non contribuiscono chiaramente). Se $k\geq 1$ sono gli integrali con A_2 e B_2 che non contribuiscono e quindi $I_{k+1}+J_{k+1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dw\Big[\dfrac{AA_1}{(w-i)(w-z_0)^k}+\dfrac{BB_1}{(w+3)(w-z_0)^k}\Big] = A_1I_k+B_1J_k$. Procedendo allo stesso modo si perviene alla relazione $I_{k+1}+J_{k+1} =$

$$A_1^k I_1 + B_1^k J_1 = A_1^k \frac{1}{2\pi i}\oint dw(\frac{A_1}{w-i} + \frac{A_2}{w-z_0}) + B_1^k \frac{1}{2\pi i}\oint dw(\frac{B_1}{w-i} + \frac{B_2}{w-z_0}) = A_1^k A_2 + B_1^k B_2$$

Alla fine il risultato è $I_{k+1} + J_{k+1} = AA_2 \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k A_1^k + BB_2 \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k B_1^k =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k \frac{(-)^k}{3+i}\Big(\frac{i}{(z_0-i)^{k+1}} + \frac{3}{(z_0+3)^{k+1}}\Big)$$

• Si eseguono le derivate della funzione (da evitare il più possibile).

• ♣ Si scrive $f(z) = \frac{i}{3+i}\frac{1}{z-z_0+z_0-i} + \frac{3}{3+i}\frac{1}{z-z_0+z_0+3} = \frac{i}{3+i}\frac{1}{z_0-i}\frac{1}{1-\frac{z_0-z}{z_0-i}} + \frac{3}{3+i}\frac{1}{z_0+3}\frac{1}{1-\frac{z_0-z}{z_0+3}}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k \frac{(-)^k}{3+i}\Big(\frac{i}{(z_0-i)^{k+1}} + \frac{3}{(z_0+3)^{k+1}}\Big)$$

• Riscriviamo la funzione come

$$f(z) = \frac{(z-z_o)+z_o}{(z-z_o+z_o-i)(3+z_o-z_o+z)} =$$

$$= \frac{z-z_o}{(z_o-i)\left(1+\frac{z-z_o}{z_o-i}\right)(3+z_o)\left(1+\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)} + \frac{z_o}{(z_o-i)\left(1+\frac{z-z_o}{z_o-i}\right)(3+z_o)\left(1+\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)}$$

$$= \frac{1}{(3+z_o)(z_o-i)}\left[(z-z_o)\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-z_o}{z_o-i}\right)^k\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)^q + \right.$$

$$\left. + z_o\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-z_o}{z_o-i}\right)^k\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)^q\right];$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-z_o}{z_o-i}\right)^k \cdot \sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)^q = \sum_{n=0}^{+\infty}(-)^n(z-z_o)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3+z_o)^{n-k}(z_o-i)^k} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n a_n$ con $a_n = (-)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3+z_o)^{n-k}(z_o-i)^k}$. Abbiamo dunque

$$(z-z_o)\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-z_o}{z_o-i}\right)^k\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)^q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}(z-z_o)^n a_{n-1} \quad \text{e}$$

$$z_o\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-z_o}{z_o-i}\right)^k\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)^q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n b_n \text{ con } b_n = z_o a_n.$$

Alla fine si ha

$$\frac{z}{(z-i)(3+z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n c_n \text{ con } c_n = \frac{a_{n-1}+z_o a_n}{(3+z_o)(z_o-i)} \text{ e } a_{-1}=0.$$

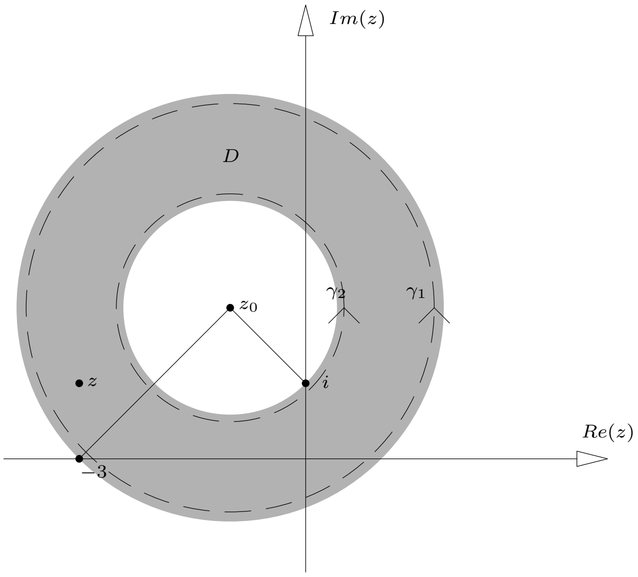
L'insieme in cui la serie converge è un cerchio con centro z_o e raggio il più piccolo numero fra $|z_o-i|$ e $|3+z_o|$ ossia la distanza di z_o dalla più vicina singolarità .

Se $z_o = \frac{1}{2}(i-3)$ allora $a_n = \frac{(-)^n 2^n}{(3+i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-)^k$ e quindi si ha $c_n = z_o\frac{(-)^n 2^{n+2}}{(3+i)^{n+2}}\sum_{k=0}^{n}(-)^k +$

$\dfrac{(-)^{n-1}2^{n+1}}{(3+i)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-)^k$. Nella seconda somma si intende solamente $n\geq 1$. Conseguentemente si ha $c_0 = \dfrac{1}{7}(-9+10i)$, $c_1=\dfrac{2}{25}(4-3i)$

Sia ora z_0 diverso da i e -3 ed inoltre $|z_0-i|<|z-z_0|<|z_0+3|$

• Sia quindi $|z_0-i|<|z-z_0|<|z_0+3|$ ed è una serie di Laurent



In $D=\{|z_0-i|<|z-z_0|<|z_0+3|\}$ la funzione è certamente derivabile e quindi analitica. Si ha quindi

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\frac{f(w)}{w-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_2}dw\frac{f(w)}{w-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_2}dw\frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z}=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\frac{f(w)}{(w-z_0)(1+\frac{z_0-z}{w-z_0})}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_2}dw\frac{f(w)}{(z_0-z)(1+\frac{w-z_0}{z_0-z})}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^k}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_2}dw\frac{f(w)}{z-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(w-z_0)^k}{(z_0-z)^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}+$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^{-k-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_2}dw f(w)(w-z_0)^k.$$

Per il teorema di Cauchy si ha $\displaystyle\oint_{\gamma_1}dw\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}=\oint_{\tilde\gamma_2}dw\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}$ e quindi $\displaystyle f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k(z-z_0)^k$ e

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dz\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\ \text{ oppure }\ c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_2}dz\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$

Applichiamo le formule scritte alla funzione in oggetto. Dobbiamo calcolare gli integrali

$$\oint_{\gamma_1}dw\frac{w}{(w-i)(w+3)(w-z_0)^{k+1}}.$$

• Sia $k\leq 0$. Se $k=0$ si ha $\displaystyle\oint_{\gamma_1}dw\frac{w}{(w-i)(w+3)(w-z_0)}=\oint_{\gamma_1}dw\Big(\frac{A_0}{w-i}+\frac{B_0}{w+3}+\frac{C_0}{w-z_0}\Big)=$ $\displaystyle\oint_{\gamma_1}dw\Big(\frac{A_0}{w-i}+\frac{C_0}{w-z_0}\Big)=2\pi i(A_0+C_0)$ dove $A_0=\dfrac{1}{10}\dfrac{-1-3i}{z_0-i}$, $C_0=\dfrac{z_0}{z_0^2-iz_0+3z_0-3i}$ e quindi il

coefficiente c_0 è pari a $A_0+C_0=\dfrac{9z_0-3-3iz_0-9i}{10(z_0-i)(z_0+3)}=\dfrac{9(z_0-i)-3(1+iz_0)}{10(z_0-i)(z_0+3)}=\dfrac{9(z_0-i)-3i(-i+z_0)}{10(z_0-i)(z_0+3)}=$
$\dfrac{3(z_0-i)(3-i)}{10(z_0-i)(z_0+3)}=\dfrac{3}{3+i}\dfrac{1}{3+z_0}$

• Se $k=-1$ si ha $\displaystyle\oint_{\gamma_1} dw\frac{w}{(w-i)(w+3)}=\oint_{\gamma_1} dw\Big(\frac{A}{w-i}+\frac{B}{w+3}\Big)=2\pi iA$, dove $A=\dfrac{i}{3+i}$, $B=\dfrac{3}{3+i}$.

• Sia $k\le-2$. $\displaystyle I_k\stackrel{\rm def}{=}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{w(w-z_0)^{|k+1|}dw}{(w-i)(w+3)}=\frac{A}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{(w-z_0)^{|k+1|}dw}{w-i}+\frac{B}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{(w-z_0)^{|k+1|}dw}{w+3}=$
$\displaystyle\frac{A}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{(w-z_0)^{|k+1|}dw}{w-i}$. Per calcolare quest'ultimo integrale prendiamo la circonferenza $w=i+\varepsilon e^{i\varphi}$ con $|\varepsilon|$ minore della distanza fra i e il bordo di γ_1. Per analiticità i due integrali sono uguali. Poi mandiamo $\varepsilon\to0$. Otteniamo $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}A\oint_{\gamma_1}\frac{(w-z_0)^{|k+1|}dw}{w-i}=\frac{A}{2\pi i}\oint_{|w-z_0|\le\varepsilon}\frac{(w-z_0)^{|k+1|}dw}{w-i}=\frac{A}{2\pi i}\int_0^{2\pi}d\varphi\,(i+\varepsilon e^{i\varphi}-z_0)^{|k+1|}$ e nel limite $\varepsilon\to0$ si ottiene $A(i-z_0)^{|k+1|}$. Otteniamo quindi $c_k=\dfrac{i}{3+i}\dfrac{1}{(i-z_0)^{k+1}}$

• Sia $k>1$. Si ha $\displaystyle c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\Big(\frac{A}{w-i}+\frac{B}{w+3}\Big)\frac{1}{(w-z_0)^{k+1}}=\frac{A}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\Big(\frac{A_1}{w-i}+$
$\displaystyle\frac{A_2}{w-z_0}\Big)\frac{1}{(w-z_0)^k}+\frac{B}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\Big(\frac{B_1}{w+3}+\frac{B_2}{w-z_0}\Big)\frac{1}{(w-z_0)^k}=\frac{A}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\frac{A_1}{w-i}\frac{1}{(w-z_0)^k}+\frac{B}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\frac{B_1}{w+3}\frac{1}{(w-z_0)^k}$
e proseguendo si arriva a $\displaystyle c_k=AA_1^k\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\Big(\frac{A_1}{w-i}+\frac{A_2}{w-z_0}\Big)+BB_1^k\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}dw\Big(\frac{B_1}{w+3}+\frac{B_2}{w-z_0}\Big)=$

$\displaystyle=AA_1^k\frac{1}{2\pi i}(A_12\pi i+A_22\pi i)+BB_1^k\frac{1}{2\pi i}B_22\pi iAA_1^k(A_1+A_2)+BB_1^kB_2=BB_1^kB_2$. Otteniamo

$\displaystyle c_k=B\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\frac{(z-z_o)^q}{(3+z_o)^{q+1}}$. Mettendo assieme i due risultati precedenti otteniamo

$$f(z)=A\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(z_o-i)^k}{(z-z_o)^{k+1}}+B\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\frac{(z-z_o)^q}{(3+z_o)^{q+1}}$$

• ♣ Allo stesso risultato si perviene operando nel modo seguente:

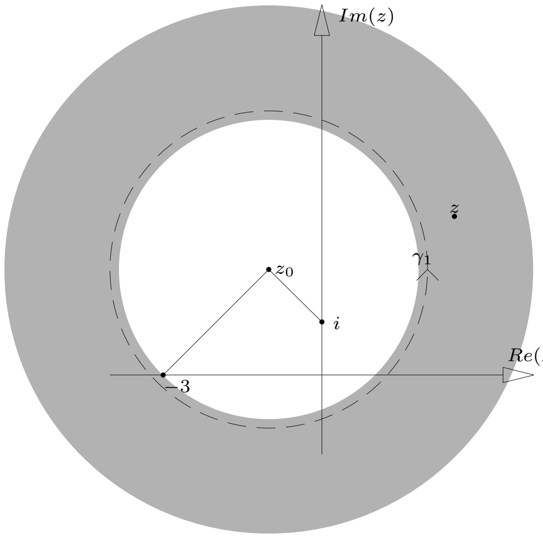
$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{(z-z_o)(1+\frac{z_o-i}{z-z_o})}=\frac{1}{z-z_o}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z_o-i}{z-z_o}\right)^k$$

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{(3+z_o)(1+\frac{z-z_o}{3+z_o})}=\frac{1}{3+z_o}\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\frac{z-z_o}{3+z_o}\right)^q$$

$$f(z)=A\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(z_o-i)^k}{(z-z_o)^{k+1}}+B\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\frac{(z-z_o)^q}{(3+z_o)^{q+1}}$$

Sia ora z_0 diverso da i e -3 ed inoltre $|z-z_0|>|z_0+3|$

• 3) Sia ora $D=\{|z-z_0|>|z_0+3|\}$. È una serie di Laurent



Si ha quindi

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw\frac{f(w)}{w-z} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw\frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw\frac{f(w)}{(z_0-z)(1+\frac{w-z_0}{z_0-z})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw\frac{f(w)}{z-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(z-z_0)^{-k-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dwf(w)(w-z_0)^k.$$

Se $k=0$ si ha $c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dwf(w) = \frac{A}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{dw}{w-i} + \frac{B}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{dw}{w+3} = A+B$. Se $k>0$, prendendo una circonferenza intorno al punto $z=i$ e $z=-3$ si ottiene $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dwf(w)(w-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw(\frac{A}{w-i} + \frac{B}{w+3})(w-z_0)^k = A\int_0^{2\pi} id\varphi(i+\varepsilon e^{i\varphi}-z_0)^k + B\int_0^{2\pi} id\varphi(-3+\varepsilon e^{i\varphi}-z_0)^k$ e nel limite $\varepsilon\to 0$ si ottiene $A(i-z_0)^k + B(-3-z_0)^k$ e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i}{3+i}\frac{(i-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3}{3+i}(-)^k\frac{(3+z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}$

• ♣ Chiaramente procedendo nel seguente modo si perveniva allo stesso risultato. $f(z) = \frac{A}{z-z_o}\left(1+\frac{z_o-i}{z-z_o}\right) + \frac{B}{z-z_o}\left(1+\frac{z_o+3}{z-z_o}\right) = \frac{i}{3+i}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(z_o-i)^k}{(z-z_o)^{k+1}} + \frac{3}{3+i}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(z_o+3)^k}{(z-z_o)^{k+1}}$

• Oppure si poteva procedere nel modo seguente

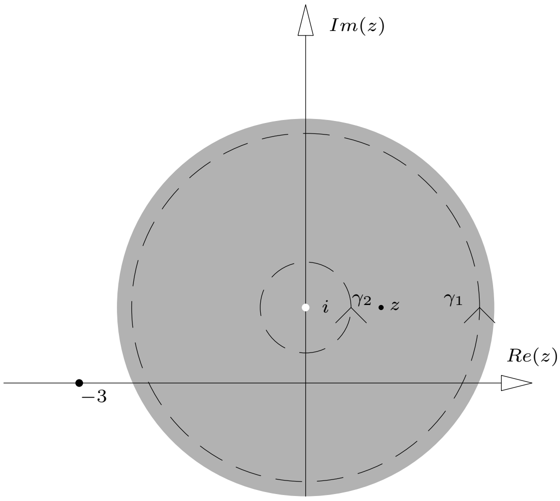
$$f(z) = \frac{z}{(z-z_o)^2\Big(1+\frac{z_o-i}{z-z_o}\Big)\Big(1+\frac{z_o+3}{z-z_o}\Big)} = \frac{z}{(z-z_o)^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z_o-i}{z-z_o}\right)^k(-)^k\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{z_o+3}{z-z_o}\right)^q(-)^q =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_o)^{n+1}}\sum_{q=0}^{n}(z_o+3)^q(z_o-i)^{n-q} + z_o\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_o)^{n+2}}\sum_{q=0}^{n}(z_o+3)^q(z_o-i)^{n-q}$$

Detto $a_n = \sum_{q=0}^{n}(z_o+3)^q(z_o-i)^{n-q}$ si ha $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_o)^{n+1}}(a_n+z_oa_{n-1});\qquad a_{-1}=0.$

Sia ora $z_0 = i$ ed inoltre $|z-i| < |i-3|$

- Sia quindi $D = \{|z-i| < |i-3|\}$. È una serie di Laurent



L'applicazione del teorema di Laurent dà :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} dw \frac{f(w)}{w-z}.$$

Primo integrale. $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{(w-i)(1-\frac{z-i}{w-i})} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}(z-i)^k \oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{(w-i)^k}$. $\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{(w-i)^k} =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \Big(\frac{A}{(w-i)^{k+2}} + \frac{B}{(w+3)(w-i)^{k+1}}\Big) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{B}{(w+3)(w-i)^{k+1}} =$$

$= B\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{dw}{(w-i)^k}\Big(\frac{\overline{A}}{w-i} + \frac{\overline{B}}{w+3}\Big) = B\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{dw}{(w-i)^k}\frac{\overline{B}}{w+3}$ e continuando a decomporre si arriva a $B\overline{B}^k$ con $\overline{A} = \frac{1}{3+i}$, $\overline{B} = -\frac{1}{3+i}$

Secondo integrale. $-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} dw \frac{f(w)}{(i-z)(1-\frac{w-i}{z-i})} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\oint_{\gamma_2} dw f(w)(w-i)^k = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\oint_{\gamma_2} dw \frac{w(w-i)^{k-1}}{(w+3)}$

Solo con $k=0$ l'integrale è diverso da zero e vale A. Sommando i due contributi si ottiene $f(z) = \frac{i}{3+i}\frac{1}{z-i} + 3\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^k}{(3+i)^{k+1}}(-)^k$. La serie converge chiaramente per $|z-i| < |i+3|$

- ♣ Il modo alternativo è il solito

$$f(z) = \frac{(z-i)+i}{(z-i)(z-i+i+3)} = \frac{1}{(i+3)\left(1+\frac{z-i}{i+3}\right)} + \frac{i}{(z-i)(i+3)\left(1+\frac{z-i}{i+3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{i+3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{3+i}\right)^k(-)^k + \frac{i}{(i+3)(z-i)}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{3+i}\right)^k(-)^k =$$

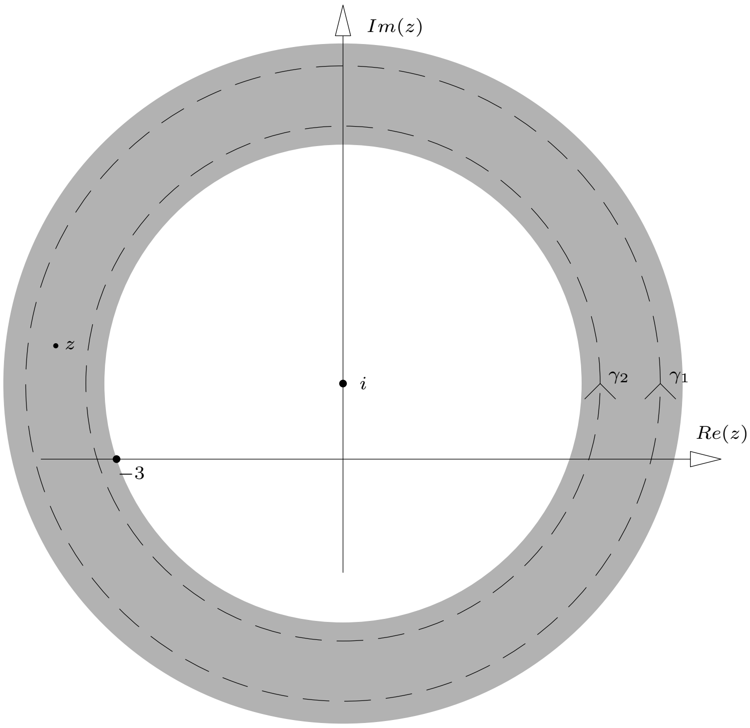
$$= \frac{i}{i+3}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{i+3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{3+i}\right)^k(-)^k + \frac{i}{i+3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(z-i)^{k-1}}{(3+i)^k}\right)(-)^{k+1} =$$

$$= \frac{i}{i+3}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{i+3}\sum_{k=0}^{+\infty}(z-i)^k a_k \text{ dove } a_k = \frac{(-)^k}{(3+i)^k} + \frac{i(-)^{k+1}}{(3+i)^{k+1}} = \frac{3(-)^k}{(3+i)^k}$$

La serie converge se $|z-i| < |i-3|$ che è proprio la distanza fra i e l'altra singolarità . Inoltre la serie di Laurent è scomposta nella somma della sua parte singolare e della sua parte olomorfa.

Sia ora $z_0 = i$ ed inoltre $|z-i| > |i+3|$

• Sia quindi $D = \{|z-i| > |i+3|\}$. È una serie di Laurent



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} dw \frac{f(w)}{w-z}.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{(w-i)(1-\frac{z-i}{w-i})} = \sum_{k=0}^{+\infty}(z-i)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{(w-i)^{k+1}}.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{f(w)}{(w-i)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \left(\frac{A}{w-i} + \frac{B}{w+3}\right)\frac{1}{(w-i)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{B}{w+3}\frac{1}{(w-i)^{k+1}} =$$

$$= B\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \left(\frac{\overline{A}}{w-i} + \frac{\overline{B}}{w+3}\right)\frac{1}{(w-i)^k}.$$ Se $k=0$ si ha $\overline{A}+\overline{B}=0$. Con $k>0$ si ha

$$B\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \frac{\overline{B}}{w+3}\frac{1}{(w-i)^k} = B\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw \left(\frac{\overline{A}}{w-i} + \frac{\overline{B}}{w+3}\right)\frac{1}{(w-i)^{k-1}}.$$ Se $k=1$ l'integrale vale $\overline{A}+\overline{B}=0$.
Se $k>1$ si prosegue nella scomposizione e si ottiene sempre zero.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} dw \frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} dw \frac{f(w)}{(i-z)(1+\frac{w-i}{i-z})} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-i)^{k+1}}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} dw f(w)(w-i)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-i)^{k+1}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} dw \frac{w}{w+3} (w-i)^{k-1}.$$

Se $k=0$ si ha $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} dw (\frac{A}{w-i} + \frac{B}{w+3}) = A + B$

Se $k>0$ si ha $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\varphi (-3+\varepsilon e^{i\varphi})(-3-i+\varepsilon e^{i\varphi})^{k-1} \frac{\varepsilon i e^{i\varphi}}{\varepsilon i e^{i\varphi}}$ e nel limite $\varepsilon \to 0$ diventa $-3(-)^{k-1}(3+i)^{k-1}$.

Sommando tutti i contributi si ottiene $\displaystyle \frac{1}{z-i} + 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-)^k (3+i)^{k-1}}{(z-i)^k}$

♣ Chiaramente lo stesso risultato si otteneva scomponendo $\displaystyle f(z) = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z-3} = \frac{i}{3+i} \frac{1}{z-i} +$

$$+ \frac{3}{3+i} \frac{1}{z-i} \frac{1}{1+\frac{i+3}{z-i}} = \frac{1}{z-i} + 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-)^k (3+i)^{k-1}}{(z-i)^k}$$

Mancano ancora i casi: $z_0 = 3$ **e** $z_0 \neq -3, i$ **ma** $|z+3| < |z-i|$

Esercizio per casa. Si calcolino i residui delle seguenti funzioni nei punti specificati (tralasciare dove dice $z_0 = \infty$) 1) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_o = i$ 2) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_o = -i$ 3) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_o = \infty$ 6) $\frac{\sin z}{z}$, $z_o = 0$, 7) $\frac{\sin z}{z}$, $z_o = \infty$ 8) $\frac{1}{z} \sin \frac{1}{z}$, $z_o = 0$ 9) $\frac{1}{z} \sin \frac{1}{z}$, $z_o = \infty$ 10) $\frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$, $z_o = 0$ 11) $\frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$, $z_o = \pi$ 12) $\frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$, $z = \frac{\pi}{2}$ 15) $\frac{z^2}{(1+z)^2}$, $z = \infty$ 16) $\sqrt{(z-a)(b-z)}$, $z = \infty$ 17) $\sqrt{\frac{z-a}{b-z}}$, $z_o = \infty$ 18) $\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$, $z = \pm i$ 19) $z\sqrt{(z-a)(b-z)}$, $z = \infty$,
20) $z^2 \sqrt{(z-a)(b-z)}$, $z = \infty$ 21) $z^3 \sqrt{(z-a)(b-z)}$, $z = \infty$ 22) $\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2}$, $z = \pm i$, $z = \infty$ 23) $\frac{\sqrt{(z-a)(b-z)}}{c^2+z^2}$, $z = \infty$

Esercizio per casa.

- Si calcolino gli integrali a) $\int_{\gamma^+} dz \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$ e $\gamma = \{|z| = 5\}$ (il + vuol dire che la circonferenza è percorsa in senso antiorario), b) $\int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ e $\gamma = \{|z| = 2\}$, c) $\int_{\gamma^+} dz (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{1}{z^3}})$ e $\gamma = \{|z| = 1\}$, d) $\int_{\gamma^+} dz (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})$ e $\gamma = \{|z| = 3\}$, e) $\int_{\gamma^+} dz \sin \frac{1}{z}$ e $\gamma = \{|z| = 1\}$, f) $\int_{\gamma^+} dz \sin^2 \frac{1}{z}$ e $\gamma = \{|z| = 1\}$,

- Sia D il rettangolo di vertici $z = -i$, $z = 2-i$, $z = 2+i$, $z = i$, e D' quello di vertici $z = -2-i$, $z = 2-i$, $z = 2+i$, $z = -2+i$. Si calcoli a) $\int_D dz \frac{\cos z}{z^2-1}$ b) $\int_{D'} dz \frac{\cos z}{z^2-1}$ c) $\int_D dz \frac{z\cos z}{z^2-1}$ d) $\int_{D'} dz \frac{z\cos z}{z^2-1}$ e) $\int_D dz \frac{\sin z}{z^2-1}$ f) $\int_{D'} dz \frac{\sin z}{z^2-1}$ g) $\int_D dz \frac{z\sin z}{z^2-1}$ h) $\int_{D'} dz \frac{z\sin z}{z^2-1}$

- Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ sia con la primitiva sia con i residui.

- Calcolare gli integrali

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(3x^2+1)}$, b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$, d) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^4}{(bx^2+a)^4}$ $a>0$ $b>0$, e) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}$, f) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$, a reale non nullo, g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$, a e b reali non nulli, h) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2+1}{x^4+1}$,

Risultati

a) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(3x^2+1)}$. Si applica il teorema dei residui "chiudendo il piano complesso nel semipiano superiore". Risulta che $I = \frac{1}{2}2\pi i(Resf(z)_{z=i} + Resf(z)_{z=\frac{i}{\sqrt{3}}})$. $z = i$ è un polo di ordine 1 mentre $z = \frac{i}{\sqrt{3}}$ è un polo di ordine 2 e quindi si ha $I = \frac{1}{2}2\pi i(\frac{3\sqrt{3}}{8i} + \frac{1}{4i}) = \pi\frac{3\sqrt{3}+2}{8}$

• b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. La funzione ha due poli di ordine tre nei punti $z = \pm i$ e $I = 2\pi i Resf(i)$; $Resf(i) = \dfrac{1}{2}\lim_{z\to i}\dfrac{d^2}{dz^2}\dfrac{1}{(z+i)^3} = \dfrac{12}{2(2i)^5} = \dfrac{3}{16i}$ e quindi $I = \frac{3}{8}\pi$

• c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$. La funzione ha due poli di ordine quattro nei punti $z = \pm i$ e $I = 2\pi i Resf(i)$; $Resf(i) = \dfrac{1}{3!}\lim_{z\to i}\dfrac{d^3}{dz^3}\dfrac{1}{(z+i)^4} = -i\dfrac{5}{32}$ e quindi $I = \frac{5}{16}\pi$

• d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x^4}{(bx^2+a)^4}$ $a > 0$, $b > 0$. La funzione ha un polo di ordine 4 nel punto $z = i\sqrt{\frac{a}{b}}$ per cui $I = 2\pi i\dfrac{1}{3!}\lim_{z\to i\sqrt{\frac{a}{b}}}\dfrac{d^3}{dz^3}\dfrac{z^4(z-i\sqrt{\frac{a}{b}})^4}{(bz^2+a)^4}$. Sia $F(z) = \dfrac{z}{(z+i\sqrt{\frac{a}{b}})}$, $\dfrac{d^3}{dz^3}(F(z))^4 = 24F(F')^3 + 36F^2F'F'' + 4F^3F'''$ e quindi $I = \frac{1}{16}b^{-5/2}a^{-3/2}$

• e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi i \lim_{z\to -2+i\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-2-i\sqrt{3})^2} = \pi\frac{\sqrt{3}}{4}$

• f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi i\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ia)^2} = \frac{\pi}{2a}$

• g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)} = 2\pi i\left(\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+ia)^2(z^2+b^2)} + \lim_{z\to ib}\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+ib)}\right) =$
$= \dfrac{\pi}{2}\dfrac{2|a|+|b|}{|a^3b|(|a|+|b|)^2}$

• h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(z^2+1)(z-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})}{(z^4+1)} + \lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(z^2+1)(z+\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})}{(z^4+1)}\right) =$
$\pi\sqrt{2}$

Lezione del 21/01/2013

–**Aula**Data la funzione $1/(1+z^2)$, scrivere lo sviluppo in serie di Taylor e di Laurent centrate in $z_0 = 0$ e $z_0 \neq 0$.

–**Aula** Calcolare i seguenti integrali $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(3x^2+1)}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(3x^2+1)}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1+p^2-2p\cos\vartheta}$ $|p| \neq 1$.

Lezione del 22/01/2013

–**Argomenti** Valor principale di Cauchy.

–**Aula**– Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)}dx$

• Esercizi per casa. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)(2+x)}dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{x^{1/3}}{(1+x)(2+x)}dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos kx}{x^2+a^2}dx.$$

• Esercizi per casa. Si calcolino gli integrali a) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz\frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$ e $\gamma=\{|z|=5\}$ (il + vuol dire che la circonferenza è percorsa in senso antiorario), b) $\displaystyle\int_{\gamma^+}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ e $\gamma=\{|z|=2\}$, c) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z^2}}+e^{\frac{1}{z^3}})$ e $\gamma=\{|z|=1\}$, d) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})$ e $\gamma=\{|z|\}=\frac{1}{2},\frac{3}{2},3,$ rispettivamente e) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz\sin\frac{1}{z}$ e $\gamma=\{|z|=1\}$, f) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz\sin^2\frac{1}{z}$ e $\gamma=\{|z|=1\}$,

Soluzioni a) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz\frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$ $\quad I=2\pi i(Resf(-\pi)+Resf(0)+Resf(\pi)$. $z=-\pi$ è un polo del primo ordine e quindi $Resf(-\pi)=\lim\limits_{z\to-\pi}(z+\pi)f(z)=\frac{\pi}{2}$. $z=\pi$ è un polo del primo ordine e quindi $Resf(\pi)=\lim\limits_{z\to\pi}(z-\pi)f(z)=-\frac{\pi}{2}$. $z=0$ è un polo di ordine 2 e quindi $Resf(0)=\lim\limits_{z\to0}\frac{d}{dz}\frac{z^3}{\sin z(1-\cos z)}=0.$ Senza fare derivate ed alla fine dovendo usare lo stesso gli sviluppi di Taylor, si poteva immediatamente ottenere $f(z)=\dfrac{z}{z(1-\frac{1}{6}z^2)z^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}z^2)}=\dfrac{2}{z^2}\dfrac{1}{1+O(z^2)}=\dfrac{2}{z^2}(1+O(z^2))$ e quindi il residuo è nullo.

• b) $\displaystyle\int_{\gamma^+}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ La funzione ha 5 singolarità polari del primo ordine e quindi per calcolare l'integrale sarebbe necessario calcolare 5 residui. Conviene allora calcolare l'integrale come $-2\pi i(Resf(3)+Resf(\infty))$. $Resf(\infty)=0$ in quanto $f\sim z^{-6}$ per $z\to\infty$. $Resf(3)=\frac{1}{242}$ e quindi $I=-\frac{\pi i}{121}$

• c) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z^2}}+e^{\frac{1}{z^3}})$ L'unica singolarità è l'origine. Lo sviluppo di Laurent nell'intorno dell'origine è

$$(1+z+z^2)\left[(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3})+(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^4})+(1+\frac{1}{z^3})\right]\text{ per cui } Resf(0)=\frac{11}{3}\text{ e quindi } I=\pi\frac{22}{3}$$

• d) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})$ È la somma di tre integrali. $I_1=\displaystyle\int_{\gamma^+}dz(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z}}=2\pi i\frac{5}{3}$. $I_2=\displaystyle\int_{\gamma^+}dz(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-1}}$ e la funzione integranda è pari a $(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-1}}=((z-1)^2+3(z-1)+3)(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{(z-1)^3}+O(\frac{1}{(z-1)^4})$ e quindi $Resf(1)=\frac{14}{3}$. $I_3=\displaystyle\int_{\gamma^+}dz(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-2}}$ e la funzione integranda è pari a $(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-2}}=((z-2)^2+5(z-2)+7)(1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{(z-2)^3}+O(\frac{1}{(z-2)^4})$ e quindi $Resf(2)=\frac{29}{3}$. Il risultato è quindi $32\pi i$.

• e) $\displaystyle\int_{\gamma^+}dz\sin\frac{1}{z}$ $\quad\sin\frac{1}{z}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-)^kz^{-2k-1}}{(2k+1)!}$ e quindi $Resf(0)=1$ da cui $I=2\pi i$

• f) $\displaystyle\int_{\gamma^+} dz \sin^2 \frac{1}{z}$ $\quad Res f(0) = 0$ e quindi l'integrale è zero.

Lezione del 24/01/2013

• –**Aula** Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

• Esercizio: Calcolate $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$

• Esercizio: Calcolate $\displaystyle V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$ (Sugg. Non bisogna introdurre il logaritmo)

• Esercizio: Calcolate $\displaystyle V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)(1+x^2)}$ (Sugg. Non bisogna introdurre il logaritmo)

• –**Aula** Data la funzione di due variabili $u(x,y) = x^2 - 3y^2 x + x$, si dimostri che è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$. Poi si calcoli $f(z)$ a meno di una costante.

• Esercizio: Data la funzione di due variabili $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 - 2xy$, si dimostri che è la parte immaginaria di una funzione olomorfa $f(z)$. Poi si calcoli $f(z)$ a meno di una costatnte.

–**Argomenti** teorema di Liouville con dimostrazione: Sia data una funzione $f(z)$ olomorfa in tutto il piano complesso. Dimostrare che se è limitata allora è una costante.

–**Argomenti** Teorema del massimo per $|f(z)|$ senza dimostrazione.

• Esercizio: Trovare il massimo al variare di a della funzione $|\sin z|$ ristretta al quadrato di vertici $\pm a \pm ia$.

• Esercizio: Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(a+b\cos\vartheta)^2}$ con $a > b > 0$.

• Esercizio: Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{cos\vartheta d\vartheta}{1+p^2-2p\cos\vartheta}$, $|p| \neq 1$.

Lezione del 27/01/2013

–**Aula** Trasformata e antitrasformata di Laplace. Nozioni di base ed esempi classici. Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti.

$$u'(x) = u + a,\ u(0) = b$$

Lezione del 29/01/2013

–**Aula** Nozione di “Delta di Dirac” e ”funzione a scalino”. Esercizi sulla trasformata e antitrasformata di Laplace. Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. Applicazioni all'Equazione delle onde lineare in una dimensione.

• $u^{(\mathrm{iv})}(x) + u''(x) + u(x) = 0,\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0,\ u^{(\mathrm{iv})}(0) = a$

• $u'(x) = u + H(t - t_0),\ u(0) = a$

• $u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0, u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T)$

Esercizi

a) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + y(t) = \delta(t - t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \delta(t - t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$

a1) $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + y(t) = H(t-t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ b1) $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = H(t-t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$

$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin t + \sin(t-t_0)H(t-t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ m) $\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin t + \sin(2t) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$

Soluzioni

a) Si introduce la trasformata di Laplace della funzione $y(t)$ che definiamo come $\mathcal{L}(y) \stackrel{\text{def}}{=} Y(p)$. In base alle regole ben note abbiamo $\mathcal{L}(y'') = p\mathcal{L}(y') - y'(0) = p(p\mathcal{L}(y) - y(0)) - y'(0) = p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0)$ e quindi $p^2Y(p) - pa - b - p\mathcal{L}(y) + a + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t-t_0)) = e^{-pt_0}$. Si ottiene $Y(p) = \dfrac{e^{-pt_0} + pa + b - a}{p^2 - p + 1}$ e quindi $y(t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0 - i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}Y(p)$ con $a_0 > 1$. Si ottiene $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp\frac{e^{p(t-t_0)}}{p^2-p+1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{pa+b-a}{p^2-p+1} \stackrel{\text{def}}{=} y_1(t) + y_2(t)$. $y_1(t) = \Big(\dfrac{e^{p_1(t-t_0)}}{p_1-p_2} - \dfrac{e^{p_2(t-t_0)}}{p_1-p_2}\Big)H(t-t_0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-t_0))H(t-t_0)$.

$y_2(t) = ae^{p_1t}\dfrac{p_1}{p_1-p_2} - ae^{p_2t}\dfrac{p_2}{p_1-p_2} + (b-a)\dfrac{e^{p_1t}}{p_1-p_2} - (b-a)\dfrac{e^{p_2t}}{p_1-p_2} = ae^{\frac{1}{2}t}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + (b-a)\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$. La soluzione è $y(t) = ae^{\frac{1}{2}t}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + (b-a)\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-t_0))H(t-t_0)$. Si può notare come la presenza di $H(t-t_0)$ sia essenziale per tenere conto della $\delta(t-t_0)$. Infatti per tempi $0 < t < t_0$ l'equazione ha termine forzante nullo e quindi la soluzione deve essere quella dim una equazione omogenea.

• b) Gli stessi calcoli di prima ci portano a $(Y(p) = \mathcal{L}(y))$ $p^2Y(p) - pa - b - 2pY(p) + 2a + Y(p) = \mathcal{L}(\delta(t-t_0)) = e^{-pt_0}$. Si ottiene $Y(p) = \dfrac{e^{-pt_0} + pa + b - 2a}{p^2 - 2p + 1}$ e quindi $y(t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}Y(p)$ con $a_0 > 1$. Abbiamo quindi $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp\frac{e^{p(t-t_0)}}{p^2-2p+1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{pa+b-2a}{p^2-2p+1} \stackrel{\text{def}}{=} y_1(t) + y_2(t)$. $y_1(t) = \displaystyle\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}e^{p(t-t_0)}\Big|_{p=1}$ $y_2(t) = \displaystyle\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}e^{pt}(pa+b-2a)\Big|_{p=1}$ da cui $y(t) = (t-t_0)e^{t-t_0}H(t-t_0) + e^t(t(b-a)+a)$

• a1) Si introduce la trasformata di Laplace della funzione $y(t)$ che definiamo come $\mathcal{L}(y) \stackrel{\text{def}}{=} Y(p)$. In base alle regole ben note abbiamo $\mathcal{L}(y'') = p\mathcal{L}(y') - y'(0) = p(p\mathcal{L}(y) - y(0)) - y'(0) = p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0)$ e quindi $p^2Y(p) - pa - b - p\mathcal{L}(y) + a + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(H(t-t_0)) = \dfrac{e^{-pt_0}}{p}$. Si ottiene $Y(p) = \dfrac{e^{-pt_0}}{p(p^2-p+1)} + \dfrac{pa+b-a}{(p^2-p+1)} +$ e quindi $y(t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}Y(p)$ con $a_0 > 1$. Si ottiene $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp\frac{e^{p(t-t_0)}}{p(p^2-p+1)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{pa+b-a}{(p^2-p+1)} \stackrel{\text{def}}{=} y_1(t) + y_2(t)$. $y_1(t) = \Big(\dfrac{e^{p_1(t-t_0)}}{p_1(p_1-p_2)} + \dfrac{e^{p_2(t-t_0)}}{p_2(p_2-p_1)} + 1\Big)H(t-t_0) = H(t-t_0)2Re\Big(\dfrac{e^{p_1(t-t_0)}}{p_1(p_1-p_2)}\Big) + H(t-t_0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}\Big(\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-t_0)) - \sqrt{3}\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-t_0))\Big)H(t-t_0) + H(t-t_0)$.

$y_2(t) = ae^{p_1t}\dfrac{p_1}{p_1-p_2} - ae^{p_2t}\dfrac{p_2}{p_1-p_2} + (b-a)\dfrac{e^{p_1t}}{p_1-p_2} - (b-a)\dfrac{e^{p_2t}}{p_1-p_2} = ae^{\frac{1}{2}t}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) +$

$(b-a)\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$. La soluzione è $y(t) = ae^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t) + (b-a)\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}\Big(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-t_0)) - \sqrt{3}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-t_0))\Big)H(t-t_0) + H(t-t_0)$

• b1) Gli stessi calcoli di prima ci portano a $(Y(p) = \mathcal{L}(y))$ $p^2Y(p) - pa - b - 2pY(p) + 2a + Y(p) = \mathcal{L}(H(t-t_0)) = \frac{e^{-pt_0}}{p}$. Si ottiene $Y(p) = \frac{e^{-pt_0}}{p(p^2-2p+1)} + \frac{pa+b-2a}{p^2-2p+1}$ e quindi $y(t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}Y(p)$ con $a_0 > 1$. Abbiamo quindi $y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp\frac{e^{p(t-t_0)}}{p(p^2-2p+1)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{pa+b-2a}{p(p^2-2p+1)} \stackrel{\text{def}}{=} y_1(t) + y_2(t)$. $y_1(t) = 1 + \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\frac{e^{p(t-t_0)}}{p}\Big|_{p=1} = 1 + (t-t_0) - e^{t-t_0}$; $y_2(t) = \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}e^{pt}(pa+b-2a)\Big|_{p=1} = e^t(t(b-a)+a)$ da cui da cui $y(t) = \Big(1 + (t-t_0) - e^{t-t_0}\Big)H(t-t_0) + e^t(t(b-a)+a)$

Esercizi

c) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$
d) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u(0,t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$
f) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \omega,\ u_x(0,t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$
h) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

Soluzioni

c) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p) - pu_t(x,0) = p^2v(x,p)$. $\mathcal{L}(u(0,t)) \stackrel{\text{def}}{=} v(0,p) = Be^{-pT}$ per cui nella variabile $v(x,p)$ il sistema diventa $\begin{cases} a^2v'' - p^2v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta = Be^{-pT}$. Quindi otteniamo $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = B\delta(t - T - \frac{x}{a})$ che rappresenta un impulso (è chiaramente una approssimazione) viaggiante verso destra con velocità a. Dopo il passaggio dell'impulso il punto torna nello stato di quiete.

La soluzione del sistema $\begin{cases} a^2v'' - p^2v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ può ricercarsi anche attraverso l'uso della trasformata di Laplace.

Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore." $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2h(s,p) - sBe^{-pT} - v_x(0,p)$ per cui l'equazione ordinaria diventa $a^2s^2h(s,p) - sa^2Be^{-pT} - a^2v_x(0,p) - p^2h(s,p) = 0$ da cui $h(s,p) = \frac{sa^2Be^{-pT} + a^2v_x(0,p)}{a^2s^2 - p^2}$. Facendo l'antitrasformata di Laplace si ottiene $v(x,p) = v.p.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} e^{sx}h(x,s)ds = \frac{B}{2}e^{-pT}(e^{\frac{p}{a}x} + e^{-\frac{p}{a}x}) + \frac{v_x(0,p)a}{2p}\big(e^{\frac{p}{a}x} - e^{-\frac{p}{a}x}\big)$. Poiché vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione $|u(x,t)| \le Me^{M't}$ per ogni $x > 0$, con costanti M ed M'

positive si deve avere $\frac{B}{2}e^{-pT}e^{\frac{p}{a}x}+\frac{v_x(0,p)a}{2p}e^{\frac{p}{a}x}=0$ da cui $v_x(0,p)=-\frac{Bp}{a}e^{-pT}$ e quindi $v(x,p)=Be^{-pT-\frac{p}{a}x}$

• d) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-pu_t(x,0)=p^2v(x,p)$. $\mathcal{L}(u_x(0,t))\stackrel{\rm def}{=}v_x(0,p)=Be^{-pT}$ per cui nella variabile $v(x,p)$ il sistema diventa $\begin{cases} a^2v''-a^2v=0 \\ v_x(0,p)=Be^{-pT} \end{cases}$
e la soluzione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta=-\frac{aB}{p}e^{-pT}$. Quindi otteniamo $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p)=-aBH(t-T-\frac{x}{a})$ che rappresenta uno scalino di ampiezza $-aB$ viaggiante verso destra con velocità a. Dato un punto di ascissa x, per un tempo $t<t_x\stackrel{\rm def}{=}T+\frac{x}{a}$ si ha $u(x,t)=0$. Passato t_x si ha $u(x,t)=-aB$.

• e) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=A\omega,\ u(0,t)=A\sin(\omega t) \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-u_t(x,0)=p^2v(x,p)-A\omega$. $\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\rm def}{=}v(0,p)=\mathcal{L}(A\sin(\omega t))=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases} p^2v(x,p)-A\omega=a^2v'' \\ v(0,p)=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\frac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale impone $\beta=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{A\omega}{p^2}$. $v(x,p)=(\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{A\omega}{p^2})e^{-\frac{px}{a}}+\frac{A\omega}{p^2}$. $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=AH(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\omega(t-\frac{x}{a})\big]+A\omega t$
Controlliamo che le condizioni iniziali sono verificate dalla soluzione.
$u(x,0)=AH(-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(-\frac{x}{a})-\omega(-\frac{x}{a})\big]=0$ in quanto $H(-\frac{x}{a})=0$ essendo $x>0$ e $a>0$.
$u_t(x,0)=A\delta(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\omega(t-\frac{x}{a})\big]+AH(-\frac{x}{a})\big[\omega\cos\omega(t-\frac{x}{a})-\omega\big]+A\omega=A\omega$ in quanto il primo pezzo si annulla per ogni valore di t il secondo pezzo è nullo per le stesse ragioni di prima.
$u(0,t)=AH(t)\big[\sin\omega t-\omega t\big]+A\omega t=AH(t)\sin\omega t=A\sin(\omega t)$

• f) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=A\omega,\ u_x(0,t)=B\sin(\omega t) \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-u_t(x,0)=p^2v(x,p)-A\omega$. $\mathcal{L}(u_x(0,t))\stackrel{\rm def}{=}v_x(0,p)=\mathcal{L}(B\sin(\omega t))=\frac{B\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases} p^2 v(x,p) - A\omega = a^2 v'' \\ v_x(0,p) = \dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. Di conseguenza si ha $v(x,p) = \dfrac{A\omega}{p^2} - \dfrac{B\omega a}{p(p^2+\omega^2)} e^{-x\frac{p}{a}}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = A\omega t - H(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})$

Verifichiamo le condizioni iniziali:

$u(x,0) = H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1+\cos\omega(-\frac{x}{a}) = 0$

$u_t(x,0) = A\omega - \delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})) - H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}\sin\omega(-\frac{x}{a}) = 0$

$u_x(0,t) = \frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a}) + H(t)B\sin\omega t = B\sin(\omega t)$

• g) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. $v_x(0,p) = 0$ impone $\dfrac{p}{a}(\alpha-\beta) = 0$ e quindi $\beta = 0$ da cui $v(x,p) = \dfrac{A\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = \dfrac{A}{\omega^2}(t\omega - \sin\omega t)$

• h) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u(x,t))$, $\mathcal{L}(u_t(x,t) = p\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = pv(x,p) - \sin x$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p\mathcal{L}(u_t(x,t)) - u_t(x,0) = p(pv(x,p) - \sin x) = p^2 v(x,p) - p\sin x$, $\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_{xx} = v_{xx}(x,p)$ $\mathcal{L}(u_x(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_x = v_x(x,p) = \int_0^{+\infty} dt e^{-pt} B\delta(t-T) = e^{-pT}$ per cui nella funzione $v(x,p)$ l'equazione diventa la equazione differenziale ordinaria $\begin{cases} p^2 v - p\sin x = a^2 v_{xx} \\ v_x(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ che possiamo scrivere anche come

$\begin{cases} p^2 v - p\sin x = a^2 v'' \\ v'(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ L'equazione per $v(x,p)$ è del secondo ordine (come per $u(x,t)$) e la condizione iniziale è solo per $v_x(0,p)$. Se ne deduce che manca una condizione per poter trovare l'unica soluzione che cerchiamo. La seconda condizione apparentemente mancante deriva dal fatto che vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A'. Ciò vuol dire che deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$. Per risolvere la equazione ordinaria utilizziamo di nuovo la trasformata di Laplace. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore." $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2 h(s,p) - sv(0,p) - Be^{-pT}$ per cui l'equazione ordinaria diventa $p^2 h(s,p) - p\mathcal{L}(\sin x) = a^2 s^2 h(s,p) - a^2 sv(0,p) - a^2 Be^{-pT}$ ossia $h(s,p) = \dfrac{p}{(s^2+1)(p^2-a^2s^2)} + \dfrac{-a^2 sv(0,p) - a^2 Be^{-pT}}{p^2-a^2s^2}$. Antitrasformando si ha $v(s,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x +$

$\frac{a}{2p^2+2a^2}(e^{-\frac{xp}{a}} - e^{\frac{px}{a}}) + \frac{v(0,p)}{2}(e^{\frac{px}{a}} + e^{-\frac{px}{a}}) + \frac{B}{2}(e^{\frac{px}{a}-pT} - e^{-\frac{px}{a}-pT})$. Il limite $\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)| = 0$ impone $-\frac{a}{p^2+a^2} + v(0,p) + Be^{-pT} = 0$ e quindi $v(0,p) = \frac{a}{p^2+a^2} - Be^{-pT}$. Dunque si ottiene $v(x,p) = \frac{p}{p^2+a^2}\sin x + \frac{a}{2p^2+2a^2}e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{1}{2}\frac{a}{p^2+a^2}e^{-\frac{p}{a}x} - Be^{-\frac{p}{a}x-pT}$. Antitrasformando si ha la soluzione $u(x,t) = \sin x\cos at + H(t-\frac{x}{a})\sin(at-x) - aBH(t-\frac{x}{a}-T)$

Lezione del 31/01/2013 (ultima lezione)

–**Aula** Risolvere il sistema lineare

$$y'' + y' = t,\ x' + x + y = t, \qquad x(0) = a, y(0) = b,\ y'(0) = c$$

–**Aula** Risolvere l'equazione

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \omega,\ u_x(0,t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$$