Soluzioni del compito di esonero svoltosi il 3/11/04 relativo al corso di Complementi I di Analisi Matematica ; corso di laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni

Esercizio N.1

Scriviamo la curva come $x(t) = (a + bt^2)\cos t, \qquad y(t) = c \sin t$.

Regolarità . $x'(t) = 2bt \cos t - (a + bt^2)\sin t, \qquad y'(t) = c \cos t$.

Le derivate sono entrambe continue.

$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ $y'(0) = 0$ significa $t = \pm\frac{\pi}{2}$. $x'(t) = \pm(a + b\frac{\pi^2}{4}) \neq 0$ per ciascuno dei quattro casi A–D.

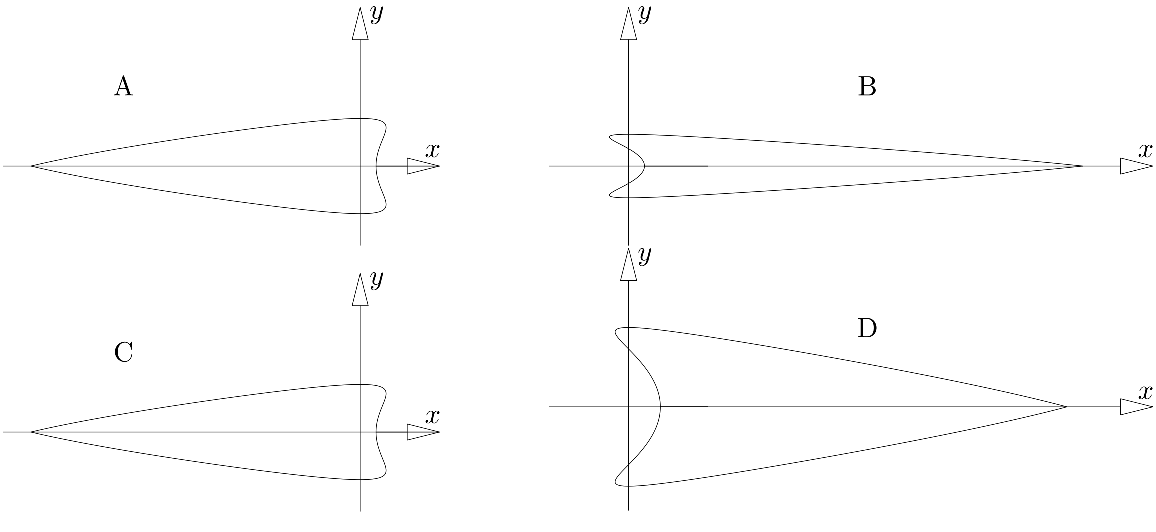
curva di Jordan: chiusa, planare, semplice. La chiusura e la planarità sono ovvie.
Semplicità : $t \neq t' \Rightarrow \ (x(t), y(t)) \neq (x(t'), y(t'))$ oppure, il che è lo stesso, $(x(t), y(t)) = (x(t'), y(t')) \ \Rightarrow \ t = t'$.
$y(t) = y(t')$ implica $t = t'$ oppure $t' = \pi - t$. Chiaramente va studiato solo il secondo caso.
$t' = \pi - t$. $x(t') = (a + b(\pi - t)^2)\cos(\pi - t) = -(a + b(\pi - t)^2)\cos t$ e tale estressione è uguale a $(a + bt^2)\cos t$ se $(a + bt^2) = -(a + b(\pi - t)^2)$ da cui $2a = -b(\pi^2 + 2t^2 - 2\pi t)$. Se $a \cdot b > 0$ si vede subito che l'equazione non ha soluzioni reali e quindi nei casi A, C la curva è di Jordan. Nei casi B, D bisogna sostituire i valori. In entrambe i casi si ottengono equazioni in t che hanno discriminante negativo e quindi senza soluzioni reali. Dunque anche nei casi B, D sono curve di Jordan.

Calcolo dell'area del dominio limitato da φ.

Usando il Lemma di Green si ottiene che l'area A, nel caso in cui la curva è percorsa in senso antiorario, è pari a $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\varphi (xdy - ydx) = \dfrac{1}{2}\int_\varphi (xy'(t) - yx'(t))dt = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (c(a + bt^2) - bct\sin(2t)) = \pi(ac + \frac{bc}{2}) + \frac{bc}{3}\pi^3$.
Se la curva è percorsa in senso orario il precedente numero è negativo e quindi va cambiato di segno. In ogni caso, prima di procedere al calcolo è opportuno fare due osservazioni. La prima è se $b = 0$ la curva diventa l'ellisse $x(t) = a\cos t$, $y(t) = c \sin t$ la cui area è πac. La seconda è se $c = 0$, al curva si riduce a un segmento la cui area è chiaramente nulla.

Nel caso A abbiamo $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ e quindi $6\pi + 2\pi^3$
Nel caso B abbiamo $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$ e quindi $-\pi - 3\pi^3$
Nel caso C abbiamo $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$ e quindi $5\pi + \frac{2}{3}\pi^3$
Nel caso D abbiamo $a = 2$, $b = -2$, $c = 5$ e quindi $\frac{5}{2}\pi - 5\pi^3$

Come si vede nei casi B e D il risultato è negativo. Verifichiamo ora che le due curve sono percorse in senso orario.
Infatti una curva di Jordan divide il piano in due parti: un interno ed un esterno. Nel caso B si vede che il valore massimo dell'ascissa è $3\pi^2 - 1$. Nel punto $(x, y) = (1, 0)$ ottenuto per $t = 0$, il vettore tangente è $(0, 2)$. Ciò vuol dire che la curva è percorsa in senso orario. Per D il discorso è lo stesso.



Esercizio N.2

La curva è data da $\rho = a + |\vartheta|$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ ossia $x(\vartheta) = (a + |\vartheta|)\cos\vartheta$, $y(\vartheta) = (a + |\vartheta|)\sin\vartheta$. La curva non è regolare in quanto per $\vartheta = 0$ non è derivabile né $x(\vartheta)$ né $y(\vartheta)$. La curva è regolare a tratti. Nei tratti $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(0, \pi]$ la curva è derivabile mentre in $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ è continua.

La forma differenziale $\omega = (a'\cos(x+a)+c\frac{y}{1+x^2})dx+(c\arctan x+d\sin(y+a))dy$ è chiaramente esatta essendo chiusa e definita in R^2 che è semplicemente connesso. Per calcolare l'integrale si possono seguire due strade sostanzialmente equivalenti.

Prima procedura. Gli estremi della curva sono i punti $P\equiv(0,-(a+\frac{\pi}{2})$ e $Q\equiv-(a+\pi,0)$ rispettivamente per $\vartheta=-\frac{\pi}{2}$ e $\vartheta=\pi$. Essendo la forma esatta eseguiamo l'integrale lungo la curva che riteniamo più idonea ossia lungo le seguenti due curve: 1) $x(\vartheta)\equiv 0$, e $y(\vartheta)=\vartheta$ con $-(a+\frac{\pi}{2})\le\vartheta\le 0$ che chiameremo φ_1 2) $x(\vartheta)=-\vartheta$, e $y(\vartheta)\equiv 0$ con $0\le\vartheta\le(a+\pi)$ che chiameremo φ_2.

Gli integrali diventano $\displaystyle\int_{\varphi_1}\omega=\int_{-(a+\frac{\pi}{2})}^{0} d\sin(\vartheta+a)dt=-d\cos a;\ \int_{\varphi_2}\omega=-\int_0^{a+\pi} a'\cos(-\vartheta+a)dt=-a'\sin a.$
Il risultato è $-d\cos a-a'\sin a$.

Seconda procedura. Consiste nel trovare una funzione potenziale $U(x,y)$ tale che $\frac{\partial U}{\partial x}=a'\cos(x+a)+c\frac{y}{1+x^2}$, $\frac{\partial U}{\partial y}=c\arctan x+d\sin(y+a)$ e il cui dominio sia R^2.

L'equazione $\frac{\partial U}{\partial x}=a'\cos(x+a)+c\frac{y}{1+x^2}$ ha come soluzione $U(x,y)=a'\sin(x+a)+cy\arctan x+V(y)$ mentre la seconda dà $c\arctan x+V'(y)=c\arctan x+d\sin(y+a)$ da cui $V(y)=-d\cos(y+a)$ e quindi $U(x,y)=a'\sin(x+a)+cy\arctan x-d\cos(y+a)$. Il risultato è $U(Q)-U(P)=-d\cos a-a'\sin a$ come è facile verificare.

Esercizio N.3

Compito A.

Parametrizzando il cono in coordinate cartesiane si ha $x=u,\quad y=v,\quad z=f(u,v)=5\sqrt{u^2+v^2}$ e quindi l'integrale cercato è $\displaystyle\int\int_D dudv\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}=\int\int_D dudv\sqrt{26}$. D è la proiezione sul piano (x,y) dell'intersezione del cono con il piano di equazione $z=4x+3$. Tale proiezione ha equazione $5\sqrt{x^2+y^2}=4x+3$ ossia $9x^2-24x+25y^2-9=0$ e quindi $(3x-4)^2+25y^2=25$; una ellisse che scritta in forma canonica è data da $(\frac{25}{9})^{-1}(x-\frac{4}{3})^2+y^2=1$. Va notato che deve essere $4x+3>0$ e ciò è verificato in quanto il valore minimo di x è $-\frac{1}{3}$. L'area cercata è quindi $\displaystyle\int\int_{\frac{9}{25}(u-\frac{4}{3})^2+v^2\le 1} dudv\sqrt{26}=\pi\sqrt{26}\frac{5}{3}$. Si può osservare che l'intergrale è pari a $\sqrt{26}\times$ l'area dell'ellisse di equazione $(\frac{25}{9})^{-1}(x-\frac{4}{3})^2+y^2=1$ e l'area dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ è πab. Quest'ultimo risultato si ottiene facendo l'integrale $\displaystyle\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} dxdy$. Cambiando variabile $x=\rho a\sin\vartheta$, $y=\rho b\cos\vartheta,\quad 0\le\vartheta\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 1$, si ha $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^1 d\rho\rho ab=\pi ab$.

Usare coordinate diverse da quelle cartesiane per parametrizzare il cono sarebbe stato sconveniente. Ad esempio si poteva parametrizzare $x=\rho\cos\vartheta$, $x=\rho\sin\vartheta$, $z=5\rho$. Si ha $\displaystyle\int\int_{\frac{25}{9}(\rho\cos\vartheta-\frac{4}{3})^2+\rho^2\sin^2\vartheta\le 1}\sqrt{26}\rho\,d\rho\,d\vartheta$ ma l'integrale è complicato dal dover integrare sul dominio specificato. In ogni caso ci si convinca del fatto che il *rho* nell'integrando NON VIENE da una matrice Jacobiana ma dal modulo del vettore normale al cono.

Alternativamente si poteva usare il cambio di ccordinate $x=\frac{4}{3}+\frac{3}{5}\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, $0\le\vartheta\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$ $z=5\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{9}{25}\rho^2\cos^2\vartheta+\frac{8}{5}\rho\cos\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}$ In tal caso però l'espressione della normale esterna diventa molto complicata.

Compito C.

La ripetizione degli stessi passaggi conduce all'ellisse $(3x+4)^2x^2+25y^2=25$. In questo caso si ha $-3\le x\le\frac{1}{3}$ e quindi la quantità $4x-3$ è sempre negativa come deve. Alla fine il risultato è lo stesso del compito A.

Compito B–D.

In questo caso cono e piano non hanno intersezione. La risposta giusta è dunque zero. Certamente non era questa l'intenzione all'atto della scrittura dell'esercizio. Non osservando che l'intersezione è nulla ed eseguendo l'elevamento al quadrato, lecito nei casi A–C, si ottiene una circonferenza che "dà " lo stesso risultato.

Esercizio N.4

Nessuno dei quattro piani $z=3-x,\quad z=3-y,\quad z=2-x,\quad z=2-y$, (unificati nella notazione $z=r+sx+ty$ con r,s,t opportuni) è parallelo all'asse delle z (perché ?) e quindi ciascuno di essi interseca il cilindro di equazione $\alpha^2x^2+\beta^2y^2=\gamma^2$ in una curva la cui proiezione sul piano (x,y) ha equazione $\alpha^2x^2+\beta^2y^2=\gamma^2$. Grazie al teorema di Gauss il risultato è $\int\int_{\alpha^2x^2+\beta^2y^2\le\gamma^2} dx\,dy\int_0^{r+sx+ty}(div\vec{F})dz$. I risultati sono i seguenti : A–B: $\frac{405}{8}\pi$, C–D: $\frac{40}{3}\pi$.

Esercizio N.5 Ciascuna delle 4 forme differenziali è scrivibile come $\omega=f(x)dx+g(y,z)dy+h(y,z)dz$ e in ciascuno dei casi il dominio è $R^3\backslash\{(y,z)=(0,0)\}$ ossia R^3 meno l'asse delle x. Poiché il rotore del campo vettoriale (f,g,h) è il vettore nullo, la forma è chiusa. L'insieme $R^3\backslash\{(y,z)=(0,0)\}$ non è semplicemente connesso (una curva chiusa piana il cui interno è attraversato dall'asse delle x non può essere contratta ad un punto senza uscire da $R^3\backslash\{(y,z)=(0,0)\}$ (con curve non planari è lo stesso).

Compito A.

$f(x)=(x^2+1)$, $\quad g(y,z)=2\dfrac{y-z}{y^2+z^2}$, $\quad h(y,z)=2\dfrac{y+z}{y^2+z^2}$ e riscriviamo la forma come $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ dove $\omega_1=(x^2+1)dx$, $\quad \omega_2=2\dfrac{y}{y^2+z^2}dy+2\dfrac{z}{y^2+z^2}dz=d(\ln(y^2+z^2))$, $\quad \omega_3=2\dfrac{-z}{y^2+z^2}dy+2\dfrac{y}{y^2+z^2}dz=2d(\arctan\dfrac{y}{z})$. La forma ω_1 è esatta in quanto $(x^2+1)=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{x^3}{3}+x)$. La forma ω_2 (come forma su $R^2\backslash\{(y,z)=(0,0)\}$) è esatta. Notare l'esponente 2 (e non 3) in R^2. La forma ω_3 è sempre chiusa ma non è esatta in quanto l'intergale $\int_\varphi\omega_3=4\pi$ dove φ è la curva chiusa $y=\cos\vartheta$, $\quad z=\sin\vartheta$, $0\le\vartheta\le2\pi$. La forma ω_3 non è esatta a dispetto del fatto che il campo vettoriale $(2\dfrac{-z}{y^2+z^2},2\dfrac{y}{y^2+z^2})$ è il gradiente di una funzione *che però non è definita sullo stesso dominio* Viceversa il campo vettoriale $(2\dfrac{y}{y^2+z^2},2\dfrac{z}{y^2+z^2})$ è gradiente di una funzione definita sullo stesso insieme di definizione del campo vettoriale.

In coordinate polari peraltro si ha $\ln(y^2+z^2)=\ln(\rho^2)$ per ogni $(x,y)\neq(0,0)$ mentre $\arctan\dfrac{y}{z}=\vartheta$ solo se $-\frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}$ e infatti ϑ *non è una funzione di* $(y,z)\in R^2\backslash\{(0,0)\}$

Gli altri tre casi sono analoghi.

Esercizio N.6

La risposta a questa domanda dipende da cosa si intende per orietazione positiva di $\partial\Sigma$ e in ultima analisi da quale normale si sceglie per la superficie Σ.

Compito A.

Come normale scegliamo quella esterna ossia $\frac{5}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{i}+\frac{5}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{j}-\underline{k}$. In tal caso la parametrizzazione di $\partial\Sigma$ è tale che la sua proiezione sul piano (x,y) è una curva percorsa in senso orario e quindi $x=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\cos\vartheta$, $y=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\sin\vartheta$, $\quad -2\pi\le\vartheta\le0$ (applicare la regola della mano destra o della vite)

Compito C.

Anche qui come normale scegliamo quella esterna ossia $\frac{-5}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{i}+\frac{-5}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{j}+\underline{k}$. In tal caso la parametrizzazione di $\partial\Sigma$ è tale che la sua proiezione sul piano (x,y) è una curva percorsa in senso antiorario e quindi $x=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\cos\vartheta$, $\quad y=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\sin\vartheta$, $\quad 0\le\vartheta\le2\pi$.

Negli altri due casi è impossibile eseguire un conto analogo a meno che non si faccia finta che l'intersezione esiste e in tal caso il conto è del tutto analogo.