Complementi di Matematica I – Soluzioni del compito di recupero del 9/12/04 (Perfetti)

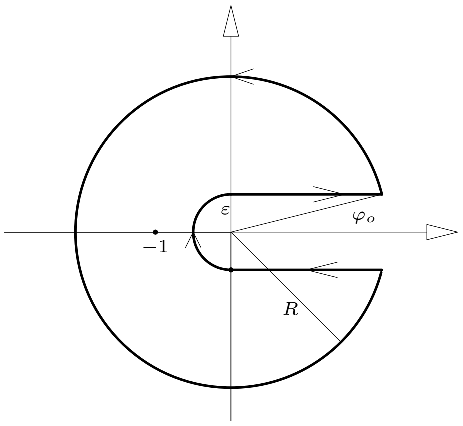
Primo esercizio

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2} = Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{xe^{ix}}{(x^2+a^2)^2}\right) = Im\left(2\pi i\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{ze^{iz}}{(z+ia)^2}\right) =$
$\displaystyle = 2\pi Re\left(\left(\frac{e^{iz}}{(z+ia)^2}+\frac{ize^{iz}}{(z+ia)^2}+\frac{-2ze^{iz}}{(z+ia)^3}\right)\right) == e^{-a}\frac{2ia-a(2ia)-2ia}{(2ia)^3} = \pi\frac{e^{-a}}{2a}$. Il residuo va calcolato in $z=+ia$ in quanto il cammino di integrazione tende all'infinto nel semipiano superiore facendo sì che l'esponenziale dia un contributo convergente.

Si poteva anche scrivere $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{xe^{ix}}{2i(x^2+a^2)^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{xe^{-ix}}{2i(x^2+a^2)^2}$ e calcolare i due integrali stando attenti al cammino. Nel secondo integrale si "deve chiudere" nel semipiano inferiore. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}$ chiudendo sopra o sotto è un errore.

Secondo esercizio

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx\frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}$. Utilizzando il cammino disegnato in figura si ha $\displaystyle 2I = 2\pi i(\lim_{z\to ia}\frac{\sqrt{z}}{z+ia}+\lim_{z\to -ia}\frac{\sqrt{z}}{z-ia}) = 2\pi i(\frac{\sqrt{a}}{2ia}e^{i\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{a}}{-2ia}e^{i\frac{3}{4}\pi}) = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}$. Poiché nel disegno gli angoli sono compresi fra 0 e 2π, ne segue che $-i=e^{i\frac{3}{2}\pi}$ e non $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$



$$\gamma_1(t) = t+i\varepsilon,\quad 0\le t\le R$$
$$\gamma_2(t) = Re^{it},\quad \varphi_o\le t\le 2\pi-\varphi_o$$
$$\gamma_3(t) = -t-i\varepsilon,\quad -R\le t\le 0$$
$$\gamma_4(t) = \varepsilon e^{-it},\quad -\frac{3}{2}\pi\le t\le -\frac{\pi}{2}$$

Terzo esercizio

- $\displaystyle f(z) = z^2e^{\frac{i}{z-1}}+\frac{i}{z^2-z(1+i)+i}$. Il denominatore della seconda frazione ha radici $z=1$, $z=i$. Scrivendo $z^2=(z-i+i)^2$ la frazione è $\displaystyle (z-i)^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i}{k!}\frac{i^k}{(z-i)^k}+2(z-i)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i}{k!}\frac{i^k}{(z-i)^k}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i}{k!}\frac{i^k}{(z-i)^k}+$
$\displaystyle +\frac{i}{z-i}\frac{1}{i-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-i}{i-1}\right)^k$. Il residuo è dato da $\displaystyle Resf(i) = (\frac{1}{6}i^3+2\frac{1}{2}i^2-i)+\frac{i}{i-1} = -\frac{i}{6}-1-i+\frac{i}{i-1} = \frac{1}{2}-5i$

- $\displaystyle (2z^2+1)e^{\frac{i}{z}}+\frac{i}{z(z+i)} = 2z^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(\frac{i}{z})^k+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(\frac{i}{z})^k+\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k(\frac{z}{i})^k$. $\displaystyle Resf(0) = 2\frac{1}{6}i^3+i+1 = 1+\frac{2}{3}i$

- $\displaystyle \frac{e^{iz}}{z^3}+z^2\sin\frac{i}{z} = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(iz)^3+z^2\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k(\frac{i}{z})^{2k+1}\frac{1}{(2k+1)!}$ e quindi $\displaystyle Resf(0) = \frac{1}{2}i^2-i^3\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}+\frac{i}{6}$

- $\displaystyle \frac{1}{z^3}e^{\frac{z}{i}}+z^3\cos\frac{1}{iz} = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(\frac{z}{i})^k+z^3\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{1}{(2k)!}\frac{1}{(iz)^{2k}}$ e quindi $\displaystyle Resf(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{i^2}+(-)^2\frac{1}{4!}\frac{1}{i^4} = -\frac{11}{24}$

• $\begin{cases} y'' - 2ay' + a^2 y = \delta(t-b) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

Tenendo conto che $\mathcal{L}(y') = p\mathcal{L}(y) - y(0)$ si ottiene $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp e^{pt} \frac{e^{-pb} + p - 2a}{p^2 - 2ap + a^2} =$

$= \lim_{p\to a} \dfrac{d}{dp} e^{p(t-b)} H(t-b) + \lim_{p\to a} \dfrac{d}{dp}(pe^{pt} - 2ae^{pt})H(t) = (t-b)e^{a(t-b)}H(t-b) + e^{at}(1-at)H(t)$, $a_o > a$.

• $\begin{cases} y'' - 2ay' + a^2 y = \delta(t-b) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

$y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp e^{pt} \frac{e^{-pb} + 1}{p^2 - 2ap + a^2} = \lim_{p\to a} \frac{d}{dp} e^{p(t-b)} H(t-b) + \lim_{p\to a} \frac{d}{dp} e^{pt} H(t) = (t-b)e^{a(t-b)}H(t-b) + te^{at}H(t)$, $a_o > a$.

• $\begin{cases} y'' + 2ay' + a^2 y = \delta(t-b) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

$y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp e^{pt} \frac{e^{-pb} + p + 2a}{p^2 + 2ap + a^2} =$

$\lim_{p\to -a} \dfrac{d}{dp} e^{p(t-b)} H(t-b) + \lim_{p\to -a} \dfrac{d}{dp} e^{pt}(p+2a)H(t) = (t-b)e^{-a(t-b)}H(t-b) + (1+ta)e^{-at}H(t)$, $a_o > a$.

• $\begin{cases} y'' + 2ay' + a^2 y = \delta(t-b) \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$

$y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp e^{pt} \frac{e^{-pb} + 1}{p^2 + 2ap + a^2} = \lim_{p\to -a} \frac{d}{dp} e^{p(t-b)} H(t-b) + \lim_{p\to -a} \frac{d}{dp} e^{pt} H(t) = (t-b)e^{-a(t-b)}H(t-b) + te^{-at}H(t)$, $a_o > a$.

Quarto esercizio

A parte il dominio della variabile t, la curva è la stessa per tutti i compiti ossia $\underline{r}(t) = t\cos t\underline{i} + t\sin t\underline{j} + t\underline{k}$.

• 1) Regolarità : Chiaramente $\underline{r}'(t)$ esiste per ogni valore di t e $\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{2+t^2} \neq 0$ per ogni t

• 2) Semplicità : La terza componente è certamente iniettiva per cui è semplice.

• 3) $\displaystyle\int_\varphi \omega = 0$. La forma differenziale di ciascun compito è esatta (è chiusa e definita ovunque in $\mathbf{R}^3$ quindi è esatta) per cui il calcolo di $\displaystyle\int_\varphi \omega$ può essere effettuato in diversi modi.

Prima maniera compito A $\quad 0 \le t \le 4\pi$. Il punto iniziale è $P_1 \equiv (0,0,0)$, il punto finale è $P_2 \equiv (4\pi, 0, 4\pi)$. Come curva congiungente i due punti si può prendere $\underline{\gamma}_1(t) \cup \underline{\gamma}_2(t)$ con $\underline{\gamma}_1(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 4\pi \\ 0 \\ 4\pi \end{cases}$, $\underline{\gamma}_2(t) =$

$\begin{cases} 4\pi \\ 0 \\ t - 4\pi & 4\pi \le t \le 8\pi \end{cases}$ e quindi $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = 0$ (basta farsi i calcoli).

Seconda maniera compito A $\quad$ Si può trovare una funzione potenziale $F(x,y,z)$ e calcolare $F(P_2) - F(P_1)$.

Il quarto esercizio degli altri compiti si risolve in modo analogo.

• 4) Calcolo terza componente baricentro (b_3). $b_3 = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_\varphi \delta\|\underline{r}'(t)\| r_3(t) dt$ e $m = \displaystyle\int_\varphi \|\underline{r}'(t)\|\delta dt =$

$= \displaystyle\int_0^a dt\sqrt{2+t^2}\delta$; cambiando variabile $t = \sqrt{2}\sinh x$ si ottiene $m = \delta(\cosh x \sinh x + x)(\sinh^{-1}(\dfrac{a}{\sqrt{2}})) - \delta(\cosh x \sinh x + x)(0) = \delta(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\dfrac{a^2}{2}} + \ln(\dfrac{a}{2} + \sqrt{1+\dfrac{a^2}{2}}))$. $\qquad b_3 = \dfrac{\delta}{m}\displaystyle\int_0^a dt t\sqrt{2+t^2} = \dfrac{\delta}{m}\dfrac{1}{3}((2+a^2)^{3/2} - 2\sqrt{2})$. Il valore di a cambia da compito a compito.

• (compito A) $\displaystyle\int_\varphi f(x,y,z)ds = \int_0^{4\pi} \frac{\sqrt{2+t^2}dt}{\sqrt{2+t^2}(2+\cos t)} = 2\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$. Con la sostituzione $z = e^{it}$ ed applicando la teoria dei residui si ottiene $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$. Si poteva pure effettuare la sostituzione $t = 2\arctan x$ ma bisognava stare attenti all'intervallo di integrazione.....

• (compito B) $\displaystyle\int_\varphi f(x,y,z)ds = \int_0^{3\pi} \frac{\sqrt{2+t^2}dt}{\sqrt{2+t^2}(2+\sin t)} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{dt}{2+\sin t} \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2$. Con la stessa sostituzione si ha $I_1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$ si calcola facilmente con la sostituzione $t = 2\arctan x$ come prima. È però istruttivo calcolarlo con il metodo della variabile complessa.

$I_2 = \displaystyle\int_{\{z\in\mathbf{C}:|z|=1,\ arg(z)\in[0,\pi]\}} 2\frac{dz}{z^2+4iz-1}$. Le radici del denominatore sono $z_{1,2,} = i(-2\pm\sqrt{3})$ per cui, chiudendo nel semipiano superiore, si ottiene $I_2 = \displaystyle\int_{\{z\in\mathbf{C}:|z|=1,\ arg(z)\in[0,\pi]\}} 2\frac{dz}{z^2+4iz-1} + 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+4ix-1} =$ 0. Di conseguenza si ha $I_2 = -2\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+4ix-1}$. $\dfrac{1}{x^2+4ix-1} = \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\dfrac{1}{x+2i-i\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\dfrac{1}{x+2i+i\sqrt{3}}$;

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+4ix-1} =$

$= \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\Big((\ln(x+2i-i\sqrt{3}) - \ln(x+2i+i\sqrt{3}))(x=1) - (\ln(x+2i-i\sqrt{3}) - \ln(x+2i+i\sqrt{3}))(x=-1)\Big) =$

$= \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\ln\dfrac{1+2i-i\sqrt{3}}{1+2i+i\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\ln\dfrac{-1+2i-i\sqrt{3}}{-1+2i+i\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2i\sqrt{3}}\ln\dfrac{1+2i-i\sqrt{3}}{-1+2i-i\sqrt{3}}\dfrac{-1+2i+i\sqrt{3}}{1+2i+i\sqrt{3}}$

Se indichiamo con $z_o = 1+i(2-\sqrt{3}) = |z_o|e^{i\varphi_o}$, si ha $z' = -1+i(2-\sqrt{3}) = |z_o|e^{i(\pi-\varphi_o)}$. Allo stesso modo abbiamo $z_1 = 1+i(2+\sqrt{3}) = |z_1|e^{i\varphi_1}$, si ha $z' = -1+i(2+\sqrt{3}) = |z_1'|e^{i(\pi-\varphi_1)}$.

$\ln\dfrac{1+2i-i\sqrt{3}}{-1+2i-i\sqrt{3}}\dfrac{-1+2i+i\sqrt{3}}{1+2i+i\sqrt{3}} = \ln(e^{i(-\pi+2\varphi_o)}(e^{i(\pi-2\varphi_1)}) = 2i\varphi_o - 2i\varphi_1 = 2i\arctan(2-\sqrt{3}) - 2i\arctan(2+\sqrt{3}) = 2i\arctan(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}) - 2i\arctan(2+\sqrt{3}) = 2i(\dfrac{\pi}{2} - 2\arctan(2+\sqrt{3})) = 2i(\dfrac{\pi}{2} - 2\dfrac{5}{12}\pi)$. Alla fine si ottiene $2i(-\dfrac{\pi}{3})\dfrac{1}{2i\sqrt{3}}(-2) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ e quindi $I_1 + I_2 = \dfrac{8}{3\sqrt{3}}\pi$

• (compito C) $\displaystyle\int_\varphi f(x,y,z)ds = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2+t^2}dt}{\sqrt{2+t^2}(2+\sin t)} = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin t} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

• (compito D) $\displaystyle\int_\varphi f(x,y,z)ds = \int_0^{5\pi} \frac{\sqrt{2+t^2}dt}{\sqrt{2+t^2}(2+\sin t)} = 2\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin t} + \int_0^{\pi}\frac{dt}{2+\sin t} = \frac{26}{3\sqrt{3}}\pi$

Quinto esercizio

Si applica il teorema di Gauss. La quantità cercata è $\displaystyle\int\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} (div\underline{F}(\underline{x}))dxdydz$. In tutti i problemi la divergenza è costante (diciamo d) per cui l'integrale è c volte il volume dell'ellissoide e quindi $\frac{4}{3}\pi abcd$. Per il calcolo del volume in oggetto si può passare alle coordinate polari adattate ossia $x = a\rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = c\rho\cos\vartheta$, $0\le\rho\le 1$, $0\le\vartheta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Lo iacobiano della trasformazione è $\rho^2\sin\vartheta abc$....