**Soluzioni del compito di Complementi di Analisi Matematica I del 12–09–05**

Esercizio n.1

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}=2\pi i(\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)}+\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z+2i)})==\frac{\pi}{9}$$

Esercizio n.2

$$\begin{cases} y''+y=f(t)+\delta(t-1) \\ y(0)=1, \quad y'(0)=1 \end{cases} \qquad f(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ t-1 & t\geq 1 \end{cases}$$

Tenendo conto che $\mathcal{L}(y')=p\mathcal{L}(y)-y(0)$ si ottiene $(a_0>0)$ $y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_o-i\infty}^{a_o+i\infty}dp\, e^{pt}(\frac{e^{-p}}{p^2}+$
$+\frac{1+p}{1+p^2})=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}e^{p(t-1)}H(t-1)+\lim_{p\to i}e^{pt}\frac{1+p}{i+p}H(t)+\lim_{p\to -i}e^{pt}\frac{1+p}{p-i}H(t)=(t-1)H(t-1)+(\sin t+\cos t)H(t)$

Esercizio n.3

La forma differenziale $\omega=(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+1)dx+2y\big(\ln(x^2+y^2)+\frac{y^2}{x^2+y^2}\big)dy$ è definita su $\mathbf{R^2}\setminus\{\underline{0}\}$ (*che non è semplicemente connesso e neppure stellato*) ed è *chiusa*. La curva su cui integrare giace in una porzione di piano che non contorna l'origine e quindi tale porzione è semplicemente connessa. Ciò vuol dire che per fare l'integrale basta unire i punti lungo una curva rispetto a cui l'integrale è più semplice. La curva più ovvia è quella che giace sulle ascisse (nel punto $(0,0)$ esiste il limite delle funzioni $\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+1$ e $2y\big(\ln(x^2+y^2)+\frac{y^2}{x^2+y^2}\big)$ per cui fa parte del dominio) e quindi integriamo lungo la curva $x(t)=t$, $y(t)\equiv 0$, $-1\leq t\leq 2$ e $\int_\varphi \omega=3$. Alternativamente si può trovare il potenziale: $F(x,y)=y^2\ln(x^2+y^2)+x$ da cui $\int_\varphi\omega=F(2,0)-F(-1,0)=3$

Esercizio n.4

Usiamo il Teorema della divergenza e quindi si ha $\int\int\int_{0\leq z\leq 1-\frac{x^2}{4}-y^2}(1+y)$. Passando alle seguenti coordinate $x=2\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=u$, $0\leq\rho\leq\sqrt{1-u}$, $0\leq u\leq 1$ ed il cui jacobiano è $2\rho$, l'integrale diventa $\int_0^1 du\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{1-u}}d\rho\, 2\rho(1-2\rho\sin\varphi)=\pi$