Massimi e minimi assoluti vincolati: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni di due variabili sugli insiemi specificati:

a) $f(x, y) = x + y, \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ punto di massimo assoluto,} \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1, \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 9\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0, \pm 3) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (\pm 3, 0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (3, 6) \text{ punto di massimo assoluto,} \\ (-1, -2) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

d) $f(x, y) = xy, \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (1, -1), (-1, 1) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2+y^2\right) \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \le 9\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (0,\pm 3),\ (\pm 3,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (\pm 2,\pm 2) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

f) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \le 1\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (-1,0) \text{ punto di massimo assoluto,} \\ \left(\frac{1}{4},0\right) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

g) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12 \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2-4 \le 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (-2,0) \text{ punto di massimo assoluto,} \\ (1,0) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

h) $f(x,y) = e^{xy} \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2-1 \le y \le 3\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (2,3) \text{ punto di massimo assoluto,} \\ (-2,3) \text{ punto di minimo assoluto} \end{array}\right]$$

Svolgimento

a) La funzione $f(x,y) = x+y$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 = 1\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y) = x^2+y^2-1$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x + y - \lambda\left(x^2+y^2-1\right).$$

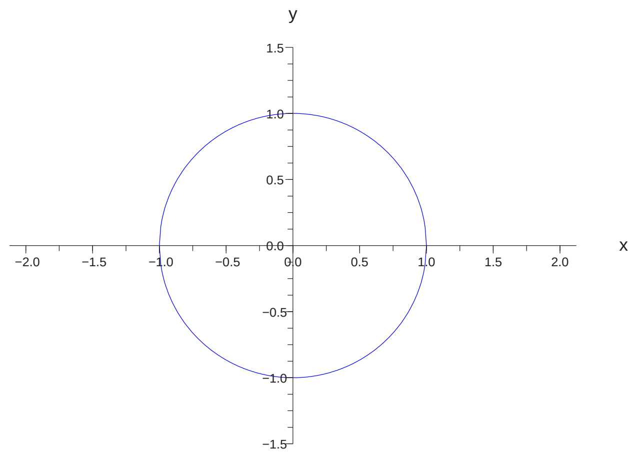

Fig. 1: L'insieme M.

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 1\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Essendo

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}, \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

si ha che $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è il punto di massimo assoluto di f su M e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è il punto di minimo assoluto di f su M.

b) La funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 9\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f

ammette massimo e minimo su M.

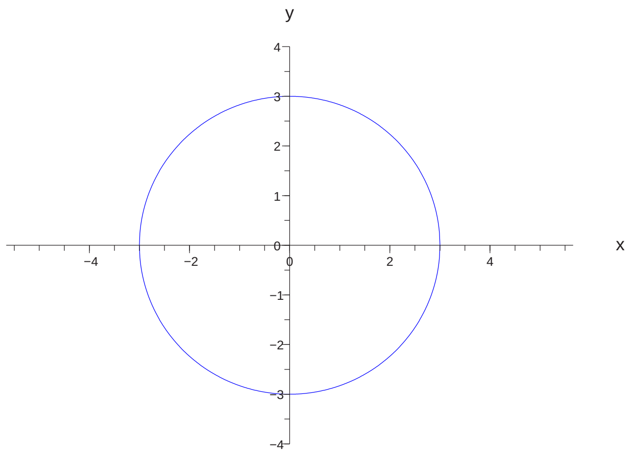

Fig. 2: L'insieme M.

Per ogni $(x, y) \in M$ si ha $x^2 = 9 - y^2$. Posto $\varphi = f_{|M}$, si ha che $\varphi : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ è definita da $\varphi(y) = f(x(y), y) = y^2 + 2$. Quindi per ogni $-3 \leq y \leq 3$ si ha $2 \leq \varphi(y) \leq 11$, più precisamente

$$\min_M \varphi = 2 = \varphi(0), \qquad \max_M \varphi = 11 = \varphi(\pm 3),$$

ossia

$$\min_M f = 2 = f(\pm 3, 0), \qquad \max_M f = 11 = f(0, \pm 3).$$

Ne segue che $(\pm 3, 0)$ sono punti di minimo assoluto per f su M e $(0, \pm 3)$ sono punti di massimo assoluto per f su M.

c) La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0 \right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20$,

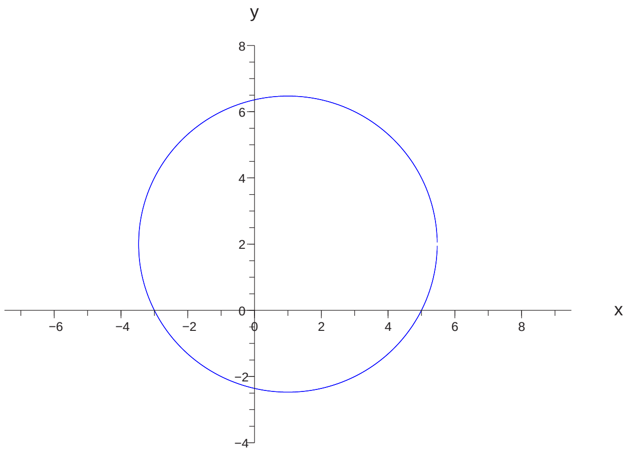

Fig. 3: L'insieme M.

consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda \left[(x-1)^2 + (y-2)^2 - 20\right].$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - 2\lambda(x-1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - 2\lambda(y-2) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left[(x-1)^2 + (y-2)^2 - 20\right]. \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} x(1-\lambda) = -\lambda \\ y(1-\lambda) = -2\lambda \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x = \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ y = \frac{2\lambda}{\lambda-1} \\ \lambda = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $\left(-1, -2, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(3, 6, \frac{3}{2}\right)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(-1, -2)$ e $(3, 6)$. Essendo

$$f(-1, -2) = 5, \qquad f(3, 6) = 45,$$

si ha che $(3, 6)$ è il punto di massimo assoluto di f su M e $(-1, -2)$ è il punto di minimo assoluto di f su M.

d) La funzione $f(x,y) = xy$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0\right\}$$

è compatto. Infatti, è chiuso in quanto complementare di

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 + xy - 1 > 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 + xy - 1 < 0\right\}$$

che è aperto in quanto unione di due aperti. Inoltre è anche limitato. Infatti, se non lo fosse, allora esisterebbero in M punti (x,y) con $|x|$ o $|y|$ arbitrariamente grande. Ma se $(x,y) \in M$, allora $x^2 + y^2 = 1 - xy$. Quindi

$$|x| \text{ o } |y| \to +\infty \quad \implies \quad x^2 + y^2 \to +\infty \quad \implies \quad xy \to -\infty \text{ con } xy \sim -(x^2 + y^2).$$

Ne segue che deve essere $y \sim -x$, cioè $-x^2 \sim xy \sim -2x^2$ per $|x| \to +\infty$: assurdo. In modo del tutto equivalente, si osserva che la curva $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ è l'equazione di un'ellisse reale. Infatti, la matrice associata al polinomio $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1$ e la matrice dei termini di secondo grado del polinomio g sono rispettivamente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\det A = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tr}(A) = 2$ e $\det B = -\frac{3}{4} \neq 0$. Essendo $\det A > 0$ e $\operatorname{tr}(A) \cdot \det B < 0$, si ha che la conica $g(x,y) = 0$ è un'ellisse reale.

Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M. Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = xy - \lambda\left(x^2 + y^2 + xy - 1\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = y - \lambda(2x + y) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = x - \lambda(x + 2y) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 + xy - 1\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} y(1-\lambda)=2\lambda x\\ x(1-\lambda)=2\lambda y\\ x^2+y^2+xy=1\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} (y-x)(1+\lambda)=0\\ x(1-\lambda)=2\lambda y\\ x^2+y^2+xy=1.\end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(1,-1)$, $(-1,1)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Essendo

$$f(1,-1)=f(-1,1)=-1, \qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

si ha che $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ sono punti di massimo assoluto di f su M e $(1,-1)$ e $(-1,1)$ sono punti di minimo assoluto di f su M.

e) La funzione $f(x,y)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

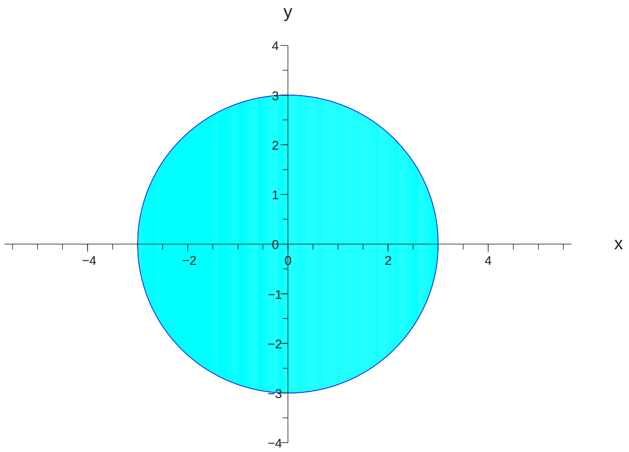

Fig. 4: L'insieme M. In azzurro $int(M)$ e in blu ∂M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<9\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y)\in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y)=0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-16x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-16y.$$

Quindi i punti stazionari di f in $int(M)$ sono: $(0,0)$, $(0,\pm 2)$, $(\pm 2,0)$, $(\pm 2,\pm 2)$. Per stabilire se sono di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 16, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 16, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi la matrice Hessiana di f in (x,y) è

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 16 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \implies (0,0) \text{ è un punto di massimo locale per } f \text{ su } M;$$

$$\mathcal{H}_f(0,\pm 2) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \implies (0,\pm 2) \text{ sono punti di sella per } f \text{ su } M;$$

$$\mathcal{H}_f(\pm 2,0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \implies (\pm 2,0) \text{ sono punti di sella per } f \text{ su } M;$$

$$\mathcal{H}_f(\pm 2,\pm 2) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \implies (\pm 2,\pm 2) \text{ sono punti di minimo locale per } f \text{ su } M.$$

Il massimo locale è $f(0,0) = 0$ e il minimo locale è $f(\pm 2,\pm 2) = -32$.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 9\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e M una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, allora i punti di estremo su M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2 + y^2\right) - \lambda\left(x^2 + y^2 - 9\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 4x^3 - 16x - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 4y^3 - 16y - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 9\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2x\left(2x^2 - 8 - \lambda\right) = 0 \\ 2y\left(2y^2 - 8 - \lambda\right) = 0 \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(0, \pm 3, 10)$, $(\pm 3, 0, 10)$, $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}, 1\right)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(0, \pm 3)$, $(\pm 3, 0)$, $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Essendo

$$f(0, \pm 3) = f(\pm 3, 0) = 9 > 0 = f(0,0),$$

$$f\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{63}{2} > -32 = f(\pm 2, \pm 2),$$

si ha che $(0, \pm 3)$ e $(\pm 3, 0)$ sono punti di massimo assoluto per f su M, mentre $(\pm 2, \pm 2)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.

f) La funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

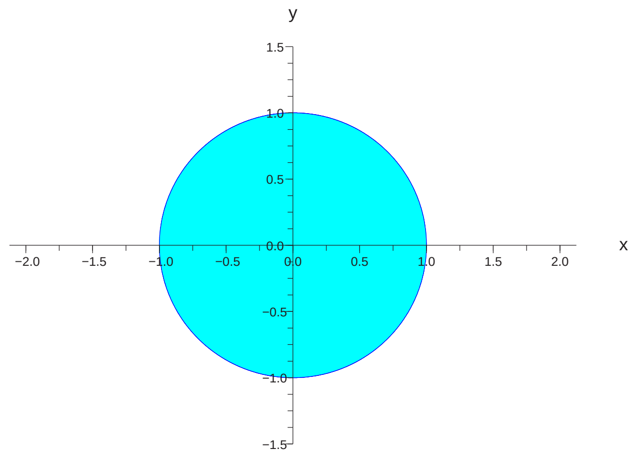

Fig. 5: L'insieme M. In azzurro $int(M)$ e in blu ∂M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Quindi l'unico punto stazionario di f in $int(M)$ è $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Quindi la matrice Hessiana di f in $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ è

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ è un punto di minimo locale per f su M e il minimo locale è $f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{8}$.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Per ogni $(x,y) \in \partial M$ si ha che $y^2 = 1 - x^2$. Posto $\varphi = f_{|\partial M}$, si ha che $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ è definta da

$$\varphi(x) = f(x, y(x)) = x^2 - x + 1.$$

I punti di estremo di f su ∂M sono i punti $(x, y(x))$ con x di estremo per φ. Essendo φ di classe C^∞ sull'intervallo chiuso e limitato $[-1,1]$, i suoi punti di estremo vanno cercati tra i punti stazionari e gli estremi dell'intervallo $[-1,1]$. Si ha che $\varphi'(x) = 2x - 1$. Quindi $\varphi'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$ e $\varphi'(x) > 0$ se e solo se $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Ne segue che $x = \frac{1}{2}$ è un punto di minimo per φ. Inoltre $x = \pm 1$ sono punti di massimo locale per φ. Più precisamente, essendo $\varphi(-1) = 3$ e $\varphi(1) = 1$, si ha che $x = -1$ è un punto di massimo assoluto per φ, mentre $x = 1$ è un punto di massimo locale per φ. Quindi $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sono punti di minimo assoluto per f su ∂M, $(-1,0)$ è un punto di massimo assoluto per f su ∂M e $(1,0)$ è un punto di massimo locale per f su ∂M. Essendo

$$f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} > -\frac{1}{8} = f\left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

si ha che $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ è il punto di minimo assoluto per f su M, mentre $(-1, 0)$ è un punto di massimo assoluto per f su M.

g) La funzione $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 4 \leq 0\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

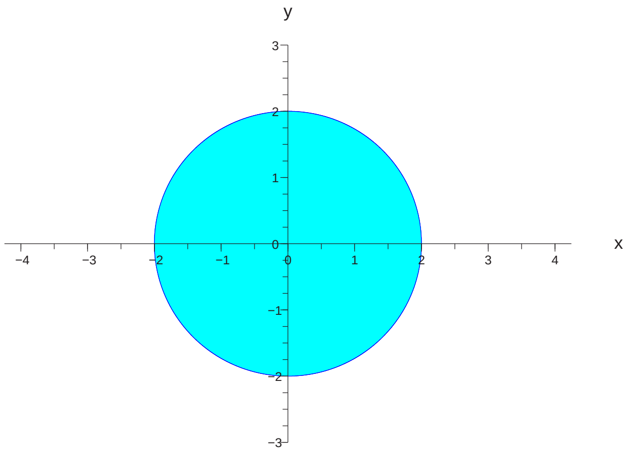

Fig. 6: L'insieme M. In azzurro $int(M)$ e in blu ∂M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8y.$$

Quindi l'unico punto stazionario di f in $int(M)$ è $(1, 0)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

Quindi la matrice Hessiana di f in $(1, 0)$ è

$$\mathcal{H}_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $(1,0)$ è un punto di minimo locale per f su M e il minimo locale è $f(1,0) = -15$.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

Per ogni $(x,y) \in \partial M$ si ha che $y^2 = 4 - x^2$. Posto $\varphi = f_{|\partial M}$, si ha che $\varphi : [-2,2] \to \mathbb{R}$ è definta da

$$\varphi(x) = f(x, y(x)) = -x^2 - 6x + 4.$$

I punti di estremo di f su ∂M sono i punti $(x, y(x))$ con x di estremo per φ. Essendo φ di classe C^∞ sull'intervallo chiuso e limitato $[-2,2]$, i suoi punti di estremo vanno cercati tra i punti stazionari e gli estremi dell'intervallo $[-2,2]$. Si ha che $\varphi'(x) = -2x - 6$. Quindi φ non ha punti stazionari in $[-2,2]$ e $\varphi'(x) < 0$ per ogni $x \in [-2,2]$. Ne segue che $x = -2$ è un punto di massimo assoluto per φ e $x = 2$ è un punto di minimo assoluto per φ. Quindi $(-2,0)$ è un punto di massimo assoluto per f su ∂M, $(2,0)$ è un punto di minimo assoluto per f su ∂M. Essendo

$$f(2,0) = -12 > -15 = f(1,0),$$

si ha che $(1,0)$ è il punto di minimo assoluto per f su M, mentre $(-2,0)$ è il punto di massimo assoluto per f su M.

h) La funzione $f(x,y) = e^{xy}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 - 1 \leq y \leq 3 \leq 0\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 - 1 < y < 3\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y) \in \; int(M)$ tali che $\nabla f(x,y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}.$$

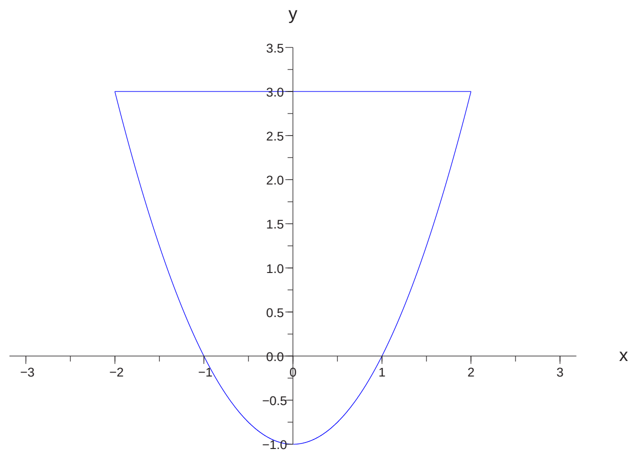

Fig. 7: L'insieme M è la parte di piano limitata dalla linea blu (∂M).

Quindi l'unico punto stazionario di f in $int(M)$ è $(0,0)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di f in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy}(1+xy).$$

Quindi la matrice Hessiana di f in $(0,0)$ è

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Quindi $(0,0)$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo locale per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M. Osserviamo che ∂M non è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$, infatti in un intorno dei punti $(\pm 2, 3)$ l'insieme ∂M non è il grafico di una funzione di classe C^1 di una delle due variabili rispetto all'altra. Si osservi inoltre che $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 3, \ -2 \le x \le 2\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2 - 1, \ -2 \le x \le 2\right\}.$$

Cerchiamo separatamente i punti di estremo di f su Γ_1 e Γ_2. Consideriamo inizialmente Γ_1. Per ogni $(x,y) \in \Gamma_1$ si ha che $y = 3$. Posto $\varphi_1 = f_{|\Gamma_1}$, si ha che

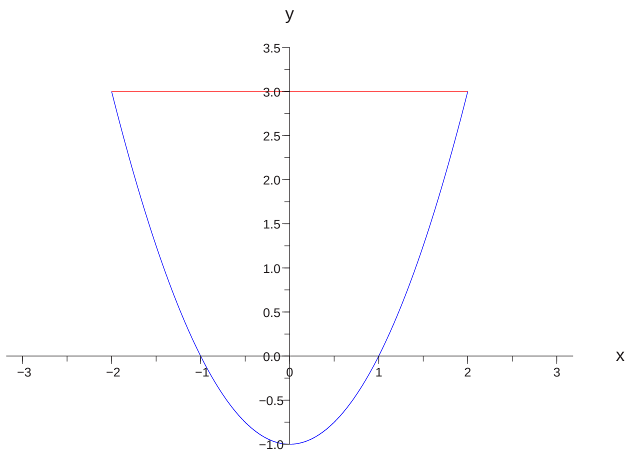

Fig. 8: Gli insiemi Γ_1 (in rosso) e Γ_2 (in blu).

$\varphi_1 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ è definta da

$$\varphi_1(x) = f(x, 3) = e^{3x}.$$

I punti di estremo di f su Γ_1 sono i punti $(x, 3)$ con x di estremo per φ_1. Essendo φ_1 strettamente crescente in $[-2, 2]$, si ha che $x = -2$ è un punto di minimo assoluto per φ_1 e $x = 2$ è un punto di massimo assoluto per φ_1. Quindi $(-2, 3)$ è un punto di minimo assoluto per f su Γ_1, $(2, 3)$ è un punto di massimo assoluto per f su Γ_1.

Consideriamo ora Γ_2. Per ogni $(x, y) \in \Gamma_2$ si ha che $y = x^2 - 1$. Posto $\varphi_2 = f_{|\Gamma_2}$, si ha che $\varphi_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ è definta da

$$\varphi_2(x) = f(x, y(x)) = e^{x^3 - x}.$$

I punti di estremo di f su Γ_2 sono i punti $(x, y(x))$ con x di estremo per φ_2. Essendo φ_2 di classe C^∞ sull'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$, i suoi punti di estremo vanno cercati tra i punti stazionari e gli estremi dell'intervallo $[-2, 2]$. Si ha che $\varphi_2'(x) = (3x^2 - 1)e^{x^3 - x}$. Quindi $\varphi_2'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\varphi_2'(x) > 0$ per $x \in \left[-2, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\right]$. Ne segue che $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = 2$ sono punti di massimo locale per φ_2, $x = -2$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono punti di minimo locale per φ_2. Ne segue che i punti $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $(2, 3)$ sono di massimo locale per f su Γ_2, $(-2, 3)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ sono di minimo locale per f su Γ_2. Quindi il punto $(2, 3)$ è di massimo locale per f ristretta a $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e il punto $(-2, 3)$ è di minimo locale per f

ristretta a $\partial M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Essendo

$$f(-2,3) = e^{-6}, \quad f(2,3) = e^{6}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = e^{\frac{2}{9}\sqrt{3}}, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{2}{9}\sqrt{3}},$$

si ha che $(2,3)$ è il punto di massimo assoluto per f su M e $(-2,3)$ è il punto di minimo assoluto per f su M.

Esercizio 2. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni di tre variabili sugli insiemi specificati:

a) $f(x,y,z) = z^2\, e^{xy} \qquad M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\Big\}$

$$\begin{bmatrix} (0,0,\pm 1) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (x,y,0) \text{ tali che } x^2+y^2 \leq 1 \text{ sono punti di minimo assoluto} \end{bmatrix}$$

b) $f(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2} \qquad M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\Big\}$

$$\begin{bmatrix} \Big(1, \sqrt{\tfrac{5}{2}}, \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\Big) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ \Big(1, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}, \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\Big) \text{ punti di minimo assoluto} \end{bmatrix}$$

c) $f(x,y,z) = x^2 + \cos y \qquad M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + e^{z^2} = 10\Big\}$

$$\begin{bmatrix} (\pm 3,0,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,\pm 3,0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{bmatrix}$$

**d)* $f(x,y,z) = g(x) + g(y) + g(z)$, dove $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$g(t) = \begin{cases} t\log t & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases} \qquad M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z = 1, \ x,y,z \geq 0\Big\}$$

$$\begin{bmatrix} (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ \Big(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\Big) \text{ punto di minimo assoluto} \end{bmatrix}$$

e) $f(x,y,z) = \dfrac{y^2 - z^2}{1 + x^2} \qquad M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\Big\}$

$$\begin{bmatrix} (0,\pm 2,0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,0,\pm 2) \text{ punti di minimo assoluto} \end{bmatrix}$$

f) $f(x,y,z) = \Big(1 + z^2\Big)\, e^{-y^2} \qquad M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 4 \leq 8e^{-y^2-z^2}\Big\}$

$$\begin{bmatrix} (0,0,\pm\sqrt{\log 2}) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0,\pm\sqrt{\log 2},0) \text{ punti di minimo assoluto} \end{bmatrix}$$

g) $f(x,y,z) = \left(1+x^2\right) e^{-z^2}$ $\qquad M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 \le 0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l} (\pm 1, \pm 1, 0) \text{ punti di massimo assoluto,} \\ (0, \pm 1, \pm 1) \text{ punti di minimo assoluto} \end{array} \right]$$

Svolgimento

I grafici dei domini di questi esercizi si trovano sulla pagina web

http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici_maxmin_assoluti_esercizio_2.html

.

---

a) La funzione $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz^2 e^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z\, e^{xy}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \text{ o } z = 0 \\ x = 0 \text{ o } z = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(x,y,0)$ con $x^2 + y^2 < 1$. Osserviamo che anche $(x,y,0)$ con $x^2 + y^2 = 1$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Essendo $f \ge 0$ e $f(x,y,0) = 0$, si ha che i punti $(x,y,0)$ con $x^2 + y^2 \le 1$ sono di minimo assoluto per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = z^2\, e^{xy} - \lambda \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, z, λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = yz^2\, e^{xy} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = xz^2\, e^{xy} - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 2z\, e^{xy} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = -\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} yz^2\, e^{xy} = 2\lambda x \\ xz^2\, e^{xy} = 2\lambda y \\ 2z\,(e^{xy} - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(\pm1, 0, 0, 1)$, $(0, \pm1, 0, 1)$, $(0, 0, \pm1, 1)$, $(x, y, 0, 0)$ con $x^2 + y^2 = 1$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 = 1$ e $(0, 0, \pm1)$. Per quanto detto in precedenza, i punti $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 = 1$ sono di minimo assoluto per f su M. Inoltre i punti $(0, 0, \pm1)$ sono di massimo assoluto per f su M.

b) La funzione $f(x, y, z) = y\sqrt{1 + z^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \le 4\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 < 4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y, z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y, z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{yz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Quindi f non ammette punti stazionari in $int(M)$ e di conseguenza neppure punti di estremo.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = (x-1)^2+y^2+z^2-4$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = y\sqrt{1+z^2} - \lambda\left((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda(x-1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = \sqrt{1+z^2} - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = \dfrac{yz}{\sqrt{1+z^2}} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} \lambda(x-1) = 0 \\ \sqrt{1+z^2} = 2\lambda y \\ z\left(\frac{y}{\sqrt{1+z^2}} - 2\lambda\right) = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono

$$\left(1,2,0,\frac{1}{4}\right), \quad \left(1,-2,0,-\frac{1}{4}\right), \quad \left(1,\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}\right), \quad \left(1,-\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{2}\right).$$

Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(1,\pm 2,0)$ $\left(1,\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Si ha che

$$f(1,2,0) = 2, \quad f(1,-2,0) = -2,$$
$$f\left(1,\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5}{2}, \quad f\left(1,-\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{5}{2}.$$

Quindi i punti $\left(1,\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $\left(1,-\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ sono di minimo assoluto per f su M.

c) La funzione $f(x,y,z) = x^2 + \cos y$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + e^{z^2} = 10\right\}$$

è chiuso e limitato. Infatti, si ha che se $(x,y,z) \in M$, allora $x^2 + y^2 = 10 - e^{z^2}$ ed essendo $e^{z^2} \geq 1$ si ha che $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ e $0 \leq z^2 \leq \log 10$. Quindi $\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 + \log 10$. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + e^{z^2} - 10$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = x^2 + \cos y - \lambda\left(x^2 + y^2 + e^{z^2} - 10\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -\sin y - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda z e^{z^2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 + e^{z^2} - 10\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2\lambda y + \sin y = 0 \\ \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + e^{z^2} = 10. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(0,0,\pm\sqrt{\log 10},0)$, $\left(0,\pm 3,0,-\frac{1}{6}\sin 3\right)$, $(\pm 3,0,0,1)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su M sono $(0,0,\pm\sqrt{\log 10})$, $(0,\pm 3,0,)$, $(\pm 3,0,0)$. Si ha che

$$f\left(0,0,\pm\sqrt{\log 10}\right) = 1, \qquad f(0,\pm 3,0) = \cos 3, \qquad f(\pm 3,0,0) = 10.$$

Quindi $(\pm 3,0,0)$ sono punti di massimo assoluto per f su M e $(0,\pm 3,0)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.

**d*) La funzione $f(x, y, z) = g(x) + g(y) + g(z)$, dove $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$g(t) = \begin{cases} t \log t & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

è continua. L'insieme $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 1, \ x, y, z \geq 0\right\}$ è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Per ogni $(x, y, x) \in M$ si ha che $z = 1 - x - y$, con $x, y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. Posto $\varphi = f_{|M}$, si ha che $\varphi : M_\varphi \to \mathbb{R}$ è definita da $\varphi(x, y) = f(x, y, z(x, y)) = g(x) + g(y) + g(1 - x - y)$, dove $M_\varphi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \leq 1, \ x, y \geq 0\right\}$.

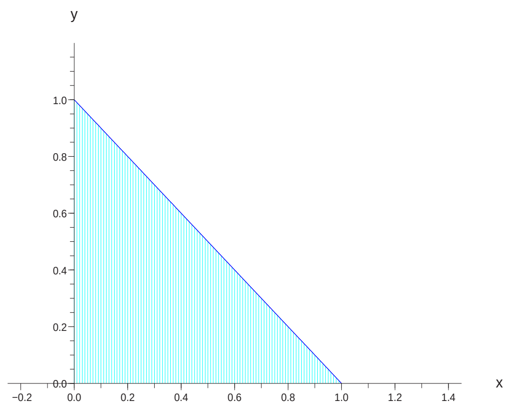

Fig. 9: L'insieme M_φ.

I punti di estremo di f su M sono i punti $(x, y, z(x, y))$ con (x, y) di estremo per φ. Essendo M_φ chiuso e limitato, i punti di estremo di φ vanno cercati sia in $int\,(M_\varphi)$ che su ∂M_φ. Consideriamo inizialmente i punti di estremo di φ in $int\,(M_\varphi) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y < 1, \ x, y > 0\right\}$. Si ha che per ogni $(x, y) \in int\,(M_\varphi)$

$$\varphi(x, y) = g(x) + g(y) + g(1 - x - y) = x \log x + y \log y + (1 - x - y) \log (1 - x - y).$$

Essendo φ di classe C^∞ in $int\,(M_\varphi)$, i punti di estremo vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y) \in int\,(M_\varphi)$ tali che $\nabla\varphi(x, y) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \log x - \log (1 - x - y), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \log y - \log (1 - x - y).$$

Quindi

$$\nabla\varphi(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi l'unico punto stazionario di φ interno a M_φ è $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Per stabilire se è di massimo, di minimo o di sella, calcoliamo la matrice Hessiana di φ in questo punto. Si ha che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1-y}{x(1-x-y)}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1-x}{y(1-x-y)}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{1-x-y}.$$

Quindi la matrice Hessiana di φ in $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è

$$\mathcal{H}_\varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono $3, 9$. Quindi $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo locale per φ. Si ha che $\varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\log 3$. Ne segue che $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo locale per f su M.

Consideriamo ora i punti di estremo di φ su ∂M_φ. Osserviamo che M_φ è il triangolo equilatero di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Quindi ∂M_φ non è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ i lati del triangolo. Si ha che

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0, \ 0 \leq x \leq 1\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 1-x, \ 0 \leq x \leq 1\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0, \ 0 \leq y \leq 1\right\}$$

e $\partial M_\varphi = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

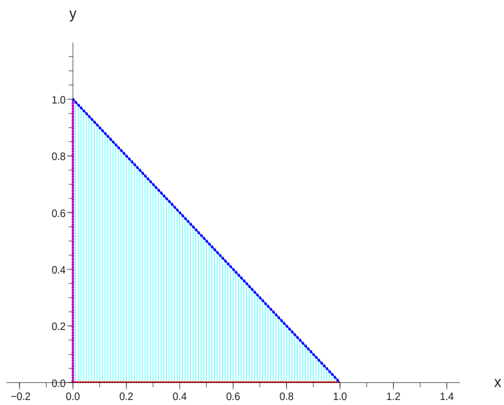

Fig. 10: I lati Γ_1 (in rosso), Γ_2 (in blu) e Γ_3 (in fucsia).

Osserviamo che

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} x\log x + (1-x)\log(1-x) & \text{se } (x,y) \in \Gamma_1 \setminus \{(0,0),(1,0)\}, \\ x\log x + (1-x)\log(1-x) & \text{se } (x,y) \in \Gamma_2 \setminus \{(1,0),(0,1)\}, \\ y\log y + (1-y)\log(1-y) & \text{se } (x,y) \in \Gamma_3 \setminus \{(0,0),(0,1)\}, \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \{(0,0),(1,0),(0,1)\}. \end{cases}$$

È quindi sufficiente cercare punti di estremo su uno qualunque dei tre lati Γ_i, per $i = 1,2,3$. Consideriamo $\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 0, \; 0 \le x \le 1\right\}$. Posto $\psi = \varphi_{|\Gamma_1}$, allora $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ è definita da

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ x\log x + (1-x)\log(1-x) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

I punti di estremo di φ su Γ_1 sono i punti $(x, y(x))$ con x di estremo per ψ. Si ha che ψ è continua su $[0,1]$ e derivabile su $(0,1)$ con $\psi'(x) = \log x - \log(1-x)$. Quindi $\psi'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$ e $\psi'(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Quindi il punto $x = \frac{1}{2}$ è di minimo assoluto per ψ e i punti $x = 0,1$ sono di massimo locale per ψ. Essendo $\psi(0) = \psi(1) = 0$ questi punti sono di massimo assoluto per ψ. Ne segue che il punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ è di minimo assoluto per φ su Γ_1 e i punti $(0,0)$ e $(1,0)$ sono di massimo assoluto per φ su Γ_1. Analogamente si ha che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è di minimo assoluto per φ su Γ_2 e i punti $(1,0)$ e $(0,1)$ sono di massimo assoluto per φ su Γ_2, il punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ è di minimo assoluto per φ su Γ_3 e i punti $(0,0)$ e $(0,1)$ sono di massimo assoluto per φ su Γ_3. Essendo

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \varphi\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\log 2,$$

$$\varphi(0,0) = \varphi(1,0) = \varphi(0,1) = 0,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\log 3,$$

si ha che i punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ sono di massimo assoluto per φ su M_φ e il punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è di minimo assoluto per φ su M_φ. In conclusione i punti $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ sono di massimo assoluto per f su M e il punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è di minimo assoluto per f su M.

e) La funzione $f(x,y,z) = \frac{y^2 - z^2}{1 + x^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \le 4\right\}$$

è compatto. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 < 4\Big\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x, y, z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x, y, z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{2x(y^2 - z^2)}{(1 + x^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2y}{1 + x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{2z}{1 + x^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(x, 0, 0)$ con $|x| < 2$. Osserviamo che anche $(\pm 2, 0, 0)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Si ha che $f(x, 0, 0) = 0$ per ogni $|x| \leq 2$. Inoltre, fissato un punto $(x_0, 0, 0)$ con $|x_0| \leq 2$ si ha che per ogni intorno I di questo punto esistono punti del tipo $(x, y, 0)$ e $(x, 0, z)$ appartenenti a $I \cap M$ tali che

$$f(x, 0, z) < 0 < f(x, y, 0).$$

Quindi i punti $(x, 0, 0)$ per ogni $|x| \leq 2$ non sono né di massimo né di minimo per f su M.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 4\Big\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = \frac{y^2 - z^2}{1 + x^2} - \lambda \Big(x^2 + y^2 + z^2 - 4\Big).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x, y, z, λ) tali che $\nabla \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$.

Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = -\dfrac{2x(y^2-z^2)}{(1+x^2)^2} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = \dfrac{2y}{1+x^2} - 2\lambda y \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = -\dfrac{2z}{1+x^2} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\Big(x^2+y^2+z^2-4\Big). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} -2x\left[\frac{y^2-z^2}{(1+x^2)^2} + \lambda\right] = 0 \\ 2y\left(\frac{1}{1+x^2} - \lambda\right) = 0 \\ -2z\left(\frac{1}{1+x^2} + \lambda\right) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4. \end{cases}$$

Si ottengono quindi i punti stazionari $(0,0,\pm 2,-1)$, $(0,\pm 2,0,1)$, $(\pm 2,0,0,0)$ di $\mathcal{L}$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(0,0,\pm 2)$, $(0,\pm 2,0)$, $(\pm 2,0,0)$. Per quanto detto in precedenza, i punti $(\pm 2,0,0)$ non sono né di massimo né di minimo per f su M. Inoltre si ha che

$$f(0,0,\pm 2) = -4, \qquad f(0,\pm 2,0) = 4.$$

Quindi i punti $(0,\pm 2,0)$ sono di massimo assoluto per f su M, i punti $(0,0,\pm 2)$ sono di minimo assoluto per f su M.

f) La funzione $f(x,y,z) = (1+z^2)\,e^{-y^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2+4 \le 8e^{-y^2-z^2}\Big\}$$

è chiuso e limitato. Infatti, si ha che

$$(x,y,z) \in M \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |x| \le \sqrt{8e^{-y^2-z^2}-4} \le 2, \\ y^2+z^2 \le -\log\left[\frac{1}{8}(x^2+4)\right] \le \log 2. \end{cases}$$

Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x^2+4 < 8e^{-y^2-z^2}\Big\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2y\Big(1+z^2\Big)\,e^{-y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z\,e^{-y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(x,0,0)$ con $-2 < x < 2$. Osserviamo che anche $(\pm 2,0,0)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Per stabilire se questi punti sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, determiniamo gli autovalori della matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \left(1+z^2\right)\left(4y^2-2\right) e^{-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2\, e^{-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -4yz\, e^{-y^2}.$$

Quindi per ogni $-2 < x < 2$ si ha che

$$\mathcal{H}_f(x,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono 0, -2, 2. Ne segue che i punti $(x,0,0)$ non sono né di massimo né di minimo per f.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + 4 = 8e^{-y^2-z^2}\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞ e ∂M una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, allora i punti di estremo su ∂M vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su ∂M. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2 + 4 - 8e^{-y^2-z^2}$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = \left(1+z^2\right) e^{-y^2} - \lambda \left(x^2 + 4 - 8e^{-y^2-z^2}\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla \mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = -2\lambda x \\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -2y(1+z^2)e^{-y^2} - 16\lambda y \\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = 2ze^{-y^2} - 16\lambda z \\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2 + 4 - 8e^{-y^2-z^2}\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \lambda x = 0 \\ -2y\left[(1+z^2)e^{-y^2}+8\lambda\right]=0 \\ 2z\left(e^{-y^2}-8\lambda\right)=0 \\ x^2+4=8e^{-y^2-z^2}. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $(\pm 2,0,0,0)$, $\left(0,0,\pm\sqrt{\log 2},\frac{1}{4}\right)$, $\left(0,\pm\sqrt{\log 2},0,-\frac{1}{16}\right)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $(\pm 2,0,0)$, $(0,0,\pm\sqrt{\log 2})$, $(0,\pm\sqrt{\log 2},0)$. Si ha che

$$f(\pm 2,0,0)=1, \qquad f\left(0,0,\pm\sqrt{\log 2}\right)=1+\log 2, \qquad f\left(0,\pm\sqrt{\log 2},0\right)=\frac{1}{2}.$$

Quindi $(0,0,\pm\sqrt{\log 2})$ sono punti di massimo assoluto per f su M e $(0,\pm\sqrt{\log 2},0)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.

g) La funzione $f(x,y,z)=(1+x^2)\,e^{-z^2}$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. L'insieme

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^4-2y^2+z^2\le 0\right\}$$

è chiuso e limitato. Infatti, si ha che $x^2+y^4-2y^2+z^2=x^2+(y^2-1)^2+z^2-1$. Quindi

$$(x,y,z)\in M \quad\Longrightarrow\quad x^2+\left(y^2-1\right)^2+z^2\le 1 \quad\Longrightarrow\quad |x|\le 1,\ |y|\le\sqrt{2},\ |z|\le 1.$$

Ne segue che $\|(x,y,z)\|\le 2$. Quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su M.

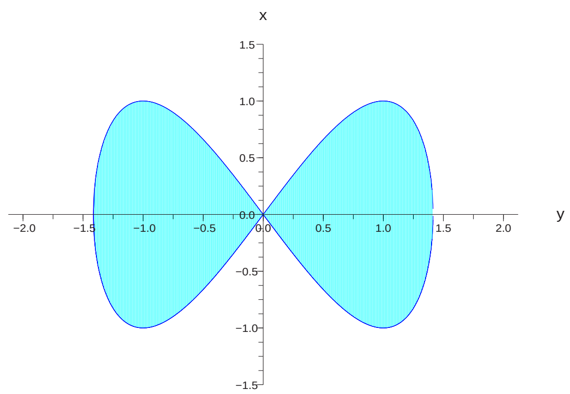

Fig. 11: Sezione dell'insieme M con il piano yx.

Cerchiamo inizialmente i punti di estremo interni a M, ossia in

$$int(M) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 < 0\right\}.$$

Essendo f di classe C^∞, i punti di estremo in $int(M)$ vanno cercati fra i punti stazionari, ossia fra i punti $(x,y,z) \in int(M)$ tali che $\nabla f(x,y,z) = 0$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x\, e^{-z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z\left(1 + x^2\right) e^{-z^2}.$$

Quindi

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari interni a M sono i punti $(0,y,0)$ con $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$, $y \neq 0$. Osserviamo che anche $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right)$ e $(0,0,0)$ sono stazionari per f su M ma non sono interni a M. Per stabilire se questi punti sono di massimo, di minimo oppure né l'uno né l'altro, determiniamo gli autovalori della matrice Hessiana di f in questi punti. Si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2\, e^{-z^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \left(1 + x^2\right)\left(4z^2 - 2\right) e^{-z^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -4xz\, e^{-z^2}.$$

Quindi per ogni $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$, $y \neq 0$, si ha che

$$\mathcal{H}_f(0,y,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono 2, 0, -2. Ne segue che i punti $(0,y,0)$ con $-\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$, $y \neq 0$, non sono né di massimo né di minimo per f.

Cerchiamo ora i punti di estremo sul bordo di M, ossia in

$$\partial M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 = 0\right\}.$$

Osserviamo che ∂M non è una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Infatti, in ogni intorno di $(0,0,0) \in \partial M$ si ha che ∂M non è il grafico di una funzione di classe C^1 di una delle tre variabili rispetto alle altre due. Più precisamente è l'unione dei grafici delle due funzioni

$$\varphi_{1,2}(x,y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - \left(y^2 - 1\right)^2}$$

che sono continue in $(0,0)$ ma non differenziabili. Quindi il punto $(0,0,0)$ va trattato a parte facendo uno studio locale di f in un intorno di questo punto. Però $\partial M \setminus \{(0,0,0)\}$ è una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Quindi essendo f di classe C^∞, allora i punti di estremo su $\partial M \setminus \{(0,0,0)\}$ vanno cercati fra i punti stazionari vincolati di f su $\partial M \setminus \{(0,0,0)\}$. Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x,y,z) = x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2$, consideriamo la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = \left(1 + z^2\right) e^{-y^2} - \lambda \left(x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2\right).$$

Cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, ossia i punti (x,y,z,λ) tali che $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x\, e^{-z^2} - 2\lambda x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = -4\lambda y(y^2-1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = -2z\left(1+x^2\right) e^{-z^2} - 2\lambda z \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = -\left(x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2\right). \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x\left(e^{-z^2} - \lambda\right) = 0 \\ 4\lambda y(y^2-1) = 0 \\ -2z\left[(1+x^2)\, e^{-z^2} + \lambda\right] = 0 \\ x^2 + y^4 - 2y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari di $\mathcal{L}$ sono $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, \pm1, \pm1, -\frac{1}{e}\right)$, $(\pm1, \pm1, 0, 1)$. Quindi i punti stazionari vincolati di f su ∂M sono $\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right)$, $(0, \pm1, \pm1)$, $(\pm1, \pm1, 0)$. Si ha che

$$f\left(0, \pm\sqrt{2}, 0\right) = 1, \qquad f(0, \pm1, \pm1) = \frac{1}{e}, \qquad f(\pm1, \pm1, 0) = 2.$$

Quindi $(\pm1, \pm1, 0)$ sono punti di massimo assoluto per f su M e $(0, \pm1, \pm1)$ sono punti di minimo assoluto per f su M.