Analisi II – Elettronica & Telecomunicazioni, A.A.2011-2012
Materiale non presente sul libro di testo o di esercizi

Si tenga presente che quanto segue è parte a tutti gli effetti del programma e può essere chiesto in sede di esame orale.

Lezione del 4/10/2011

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ Dimostriamo che sono equivalenti le tre affermazioni

1) $A = \overline{A}$, 2) $\partial A \subset A$, 3) $A' \subset A$.

1) $\Rightarrow$ 3). Supponiamo che esista $\underline{x} \in A'$ ma $\underline{x} \notin A$. Allora $\underline{x} \in A^c = \overset{\circ}{A^c}$ ma tutti i punti di A^c sono interni e quindi esiste $B_{\underline{x}}(r) \subset A^c$. Ciò è vietato dal fatto che $\underline{x} \in A'$.

3) $\Rightarrow$ 2). I punti di ∂A sono o di accumulazione o isolati. Se sono isolati appartengono ad A. Se sono di accumulazione allora per ipotesi appartengono ad A e questo conclude l'argomento

2) $\Rightarrow$ 1). Vogliamo far vedere che $A = \overline{A}$ ossia A^c è aperto. Sia $\underline{x} \in A^c$ e sia $B_{\underline{x}}(r)$. Se per ogni r accade che in $B_{\underline{x}}(r)$ cade almeno un punto di A allora vuol dire che $\underline{x} \in \partial A \subset A$ ma questo è impossibile in quanto sappiamo che $\underline{x} \in A^c$. L'unica conclusione è che esiste r_0 tale che $B_{\underline{x}}(r_0) \cap A = \emptyset$ e quindi $B_{\underline{x}}(r_0) \subset A^c$ ossia A^c è aperto

---

Dimostrazione che $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sin(x^2y) = \sin(x_0^2y_0)$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0\ t.c.\ \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\sin(x^2y) - \sin(x_o^2y_o)| < \varepsilon.$

$$|\sin(x^2y) - \sin(x_o^2y_o)| \le |(x^2 - x_o^2)y + x_o^2(y-y_o)| = |(x-x_o)(x+x_o)y + x_o^2(y-y_o)|.$$

Ora imponiamo $|x - x_o| \le 1$ e $|y - y_o| \le 1$ ottenendo

$$\begin{aligned}&|\sin(x^2y) - \sin(x_o^2y_o)| \le (1+2|x_o|)(1+|y_o|)|x-x_o| + x_o^2|y-y_o| \le\\ &\max\{(1+2|x_o|)(1+|y_o|), x_o^2\}(|x-x_o|+|y-y_o|) \le\\ &\max\{(1+2|x_o|)(1+|y_o|), x_o^2\}\sqrt{2}\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} < \varepsilon\end{aligned}$$

per $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} < \dfrac{\varepsilon}{\max\{(1+2|x_o|)(1+|y_o|), x_o^2\}\sqrt{2}}$ Abbiamo usato $x_o - 1 \le x \le 1 + x_o$ per cui $-1-|x_o| \le x \le 1+|x_o|$ ossia $|x| \le 1+|x_o|$ ed anche per y e poi abbiamo usato $a+b \le \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$ con $a, b \ge 0$ nell'ultimo passaggio. La dimostrazione viene appresso.

Alla fine

$$\delta_\varepsilon = \min\{2, \frac{\varepsilon}{\max\{(1+2|x_o|)(1+|y_o|), x_o^2\}\sqrt{2}}\}.$$

Il 2 deriva dal fatto che $\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$ con $a, b \ge 0$ e quindi se $0 \le a \le 1$ e $0 \le b \le 1$ si ha $\sqrt{a^2+b^2} \le 2$.

Si poteva stimare anche nel seguente modo $|\sin(x^2y) - \sin(x_o^2y_o)| \le (1+2|x_o|)(1+|y_o|)|x-x_o| + x_o^2|y-y_o| \le ((1+2|x_o|)(1+|y_o|)+x_o^2)\sqrt{2}\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} < \varepsilon$ da cui $\delta'_\varepsilon = \min\{2, \frac{\varepsilon}{((1+2|x_o|)(1+|y_o|)+x_o^2)\sqrt{2}}\}$

In conclusione $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \sin(x^2y) = \sin(x_o^2y_o)$ e quindi la funzione è continua in $\mathbf{R}^2$.

Dimostrazione che $|x-x_0|+|y-y_0| \le \sqrt{2}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. È equivalente a dire $|x|+|y| \le \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$. Almeno uno fra x e y è non nullo, as esempio x per cui scriviamo $1+\dfrac{|y|}{|x|} \le \sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{y^2}}$ ossia $1+t \le \sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$ per ogni $t \ge 0$. Ci sono molti modi di dimostrare tale relazione. Ad esempio si considera la funzione $\sqrt{x}$ e si osserva che essa è concava per cui $\sqrt{x+y} \ge (\sqrt{x}+\sqrt{y})/\sqrt{2}$. Si ricordi che per una funzione concava di una variabile si ha $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \ge \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ con $0 \le \lambda \le 1$. Nel nostro caso $\lambda = 1/2$. Dunque otteniamo $\sqrt{1+t^2} \ge (\sqrt{1}+\sqrt{t^2})/\sqrt{2} = (1+t)/\sqrt{2}$.

Un secondo modo consiste nel prendere la funzione $f(t) = \sqrt{2}\sqrt{1+t^2}-(1+t)$ ed osservare che è sempre positiva per $t \ge 0$.

Dimostrazione che la funzione $f_1(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \underline{x} \ne \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ è discontinua nell'origine.

Dimostrazione che la funzione $f_2(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \underline{x} \ne \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ è continua nell'origine.

Dimostrazione che la funzione $f_6(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \ge x^2 \\ 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è discontinua nell'origine.

f_1. Al variare di m, le infinite restrizioni $f(x,mx) = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ tendono a limiti diversi e quindi il limite non può esistere in quanto sappiamo che il limite esiste se e solo se su ogni restrizione si ha quel limite.

Naturalmente in tutti i punti diversi da $(x_0,y_0) \ne (0,0)$ la funzione ammette limite e vale $\dfrac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}$

f_6 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = 0$ e questo perché se $m \ne 0$, la retta $y = mx$ ad un certo punto "entra" dentro ciascuna delle due parabole. Sia infatti $m > 0$; la relazione $mx \ge x^2$ è risolta da $0 \le x \le m$ mentre se $x <\le 0$ si ha $mx \le -x^2$ da $x \ge -m$ e quindi per $m > 0$ se $|x| \le m$ allora il punto (x,mx) si trova all'interno di una delle due parabole. Lo stesso accade se $m < 0$.

Se $m = 0$ la funzione vale 1 e quindi su ogni retta il limite vale 1. D'altra parte $f(x,x^2/2) \equiv 0$ e la parabola $y = x^2/2$ certamente ha $(0,0)$ come punto di accumulazione per cui possiamo dire che la funzione in $(0,0)$ non ammette limite.

Neppure nei punti sul bordo delle due parabole e sull'asse delle ascisse la funzione ammette limite. Negli altri punti invece il limite esiste.

f_2. Osserviamo che $f(x,mx) = \dfrac{mx^2}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \dfrac{m|x|}{\sqrt{1+m^2}} \to 0$ per $x \to 0$. Sull'asse delle ordinate la funzione è identicamente zero ossia $f(0,y) = 0$ con $y \ne 0$. Possiamo concludere che se $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ esiste, esso è zero ma non possiamo affermare che tale limite esiste alla luce dell'esercizio precedente. Immaginando che il limite possa essere zero, maggioriamo

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Il motivo è che una quantità tende a zero se e solo se tende a zero il suo modulo. Poi osserviamo che

$x^2+y^2=|x|^2+|y|^2\geq 2|xy|$ segue da $(|x|-|y|)^2\geq 0$ e quindi

$$\Big|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{|xy|}} = \sqrt{|xy|} \leq \frac{|x|+|y|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}} < \varepsilon$$

e questo accade se $\|\underline{x}\|\leq 2\varepsilon^2$. Ne segue che il limite vale zero.

Lezione del 7/10/2011

Studio della continuità delle seguenti funzioni

$$g_1(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases} \qquad g_2(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases} \qquad g_3(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$$

$$g_4(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4y^2+x^4+|xy|-|x^3y|}, & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$$

Per g_1, g_2, g_3 si veda il file denominato “qui–duevar”, esercizio 2.7

Per g_4 bisogna ricordare che se $a_1,\ldots,a_n\geq 0$ allora $a_1+\ldots+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$ (la media geometrica è minore o uguale alla media aritmetica, detta a volte “AGM”) ed applicarlo a denominatore. La AGM si può dimostrare eseguendo il logaritmo naturale

$$\ln\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \ln\big(\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln a_i$$

ma questa è esattamente la proprietà di concavità del logaritmo la cui derivata seconda è negativa

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_1 \ln a_i \qquad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,\ \alpha_i\geq 0$$

In realtà la nozione di concavità viene data per due elementi ossia

$$\ln(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)\geq \alpha_1\ln a_1+\alpha_2\ln a_2, \quad \alpha_1+\alpha_2=1$$

Dimostrare che la relazione per n elementi è conseguenza di quella per 2 elementi

Introduzione delle coordinate polari $x=x_0+\rho\cos\vartheta$, $y=y_0+\rho\sin\vartheta$.

L'esistenza delle derivate parziali non implica la continuità .

Lezione del 11/10/2011 Analisi dei massimi e minimi della funzione $f(\underline{x})=-xye^{y-x^2}$, $f(\underline{x})=x^2+y^4$, $f(\underline{x})=x^2-y^4$.

Lezione del 14/10/2011

Formula di Taylor a qualsiasi ordine per funzioni di n variabili. Data una funzione reale $f\in C^m(A)$ con $A=\overset{\circ}{A}\subset \mathbf{R}^n$, il suo UNICO polinomio di Taylor di ordine m centrato in $\underline{x}$ è

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_n=0\\ i_1+i_2+\dots+i_n=k}}^{k} \frac{1}{i_1!i_2!\dots i_n!} h_1^{i_1}\cdot\dots\cdot h_n^{i_n} \frac{\partial^k f(\underline{x})}{(\partial x_1)^{i_i}(\partial x_2)^{i_2}\dots(\partial x_n)^{i_n}} + o(||\underline{h}||^m)$$

• Esercizio. Analizzare il punto $(0,0)$ per la funzione $f(x,y)=3x^4-4yx^2+y^2$

Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 della funzione $\ln(1+xy)$ centrato in $(0,0)$. Sapendo che $\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)$ si ha

$$\ln(1+xy) = xy - \frac{1}{2}(xy)^2 + \frac{1}{3}(xy)^3 + o(x^3y^3)$$

ora dobbiamo far vedere che $o(x^3y^3)=o((\sqrt{x^2+y^2})^6)=o((x^2+y^2)^3)$. ma questo è immediato

$$o(x^3y^3) = \frac{o(x^3y^3)}{x^3y^3}\frac{o(x^3y^3)}{(x^2+y^2)^3}(x^2+y^2)^3$$

Il primo termine tende a zero per definizione. Il secondo è limitato in quanto $|(xy)^3|=|xy|^3\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)^3$ e quindi la limitatezza. La moltiplicazione dei tre termini quindi è un $o((x^2+y^2)^3)$.

• Esercizio. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 della funzione $\ln(1+xy)$ centrato in $(x_0,0)$ con x_0 generico.

• Trovare massimo minimo assoluti della funzione $f(\underline{x})=xy(1-x^2-y^2)$ nell'insieme $\{\underline{x}:,\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$. Si faccia attenzione che l'insieme non è aperto per cui sul bordo della figura bisogna studiare.....

Lezione del 17/10/2011

Parametrizzazione dell'intersezione fra il paraboloide $z=x^2+y^2$ e il piano $z=x+y+1$. Poi lo stesso esercizio ma con il paraboloide $z=x^2+y^2+xy$ e il piano $z=x+y+1$.

Lezione del 18/10/2011

Calcolare la lunghezza di un filo disposto lungo la parabole $y=ax^2$ con $0\le x\le x_0$. Successivamente se ne calcoli il baricentro. Si veda l'esercizio 2.8.1 del file intsup

Lezione del 21/10/2011

Data la forma differenziale in $\mathbf{R}^2$ $\omega(x,y)=4x^3ydx+(2y+x^4)dy$ calcolare $\int_\varphi \omega$ dove φ è la curva $\varphi\colon[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbf{R}^2$

$$\varphi(t) = \begin{cases} t \\ \arctan(\sin t) \end{cases}$$

Esercizio num. 4.8.1 del file denominato "19intsup"

Lezione del 24/10/2011

Data la forma differenziale in $\mathbf{R}^2$ $\omega(x,y)=4x^3ydx+(2y+x^4)dy$ si calcoli la primitiva eseguendo l'integrale lungo una generica curva (ad esempio una curva unione di due curve in ciascuna delle quali una coordinata è tenuta fissata ogni volta).

Calcolo della primitiva della forma $\omega = \dfrac{xdx}{x^2+y^2} + \dfrac{ydy}{x^2+y^2}$

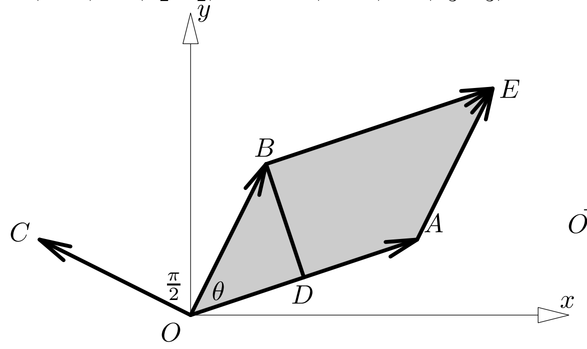
$\displaystyle\int_\gamma \omega_1$ dove $\gamma=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=3a^2,\ 2az=x^2+y^2\}$ (orientata in senso antiorario) $a>0$,

$\omega_1 = 2x^2ydx+ydy+zdz$,

Lezione del 04/11/2011

Spiegazione intuitiva del perché compare il dterminante della matrice Jacobiana nel cambio di variabile neglim integrali multipli.

Supponiamo che nel piano (x,y) il parallelogramma qui sotto sia immagine del rettangolo di vertici (u,v), (u',v), (u',v'), (u,v') secondo la applicazione $\underline{\Phi}(u,v)$ per cui $O \equiv \underline{\Phi}(u,v) = (0,0)$, $A \equiv \underline{\Phi}(u',v) = (x_1,y_1)$, $B \equiv \underline{\Phi}(u,v') = (x_2,y_2)$, $E \equiv \underline{\Phi}(u',v') = (x_3,y_3)$,



$\vec{OA} = (x_1,y_1)$, $\vec{OB} = (x_2,y_2)$, $\vec{OC} = (-y_2,x_2)$,

L'area è data da $|\vec{OA}|\cdot|\vec{BD}| = |\vec{OA}||\vec{OB}||\sin\theta| = |\vec{OA}||\vec{OB}||\cos(\theta+\frac{\pi}{2})| = |(\vec{OA},\vec{OC})| = |(-x_1y_2+y_1x_2)| =$ $|Det(M)|$ dove $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

Nel nostro caso si ha $\vec{OA} \equiv \underline{\Phi}(u',v) - \underline{\Phi}(u,v) = \underline{\Phi}_x(\xi,v)(u'-u) \sim \underline{\Phi}_x(\xi,v)du$, $\vec{OB} \equiv \underline{\Phi}(u,v') - \underline{\Phi}(u,v) =$ $\underline{\Phi}_y(u,\eta)(v'-v) \sim \underline{\Phi}_y(u,\eta)dv$ e la matrice M diventa quindi $M = \begin{pmatrix} (\underline{\Phi}_1)_x(\xi,v) & (\underline{\Phi}_2)_x(\xi,v) \\ (\underline{\Phi}_1)_y(u,\eta) & (\underline{\Phi}_2)_y(u,\eta) \end{pmatrix}$

Si può dire quindi che sotto effetto della trasformazione $\underline{\Phi}$, l'elemento d'area $dudv$ va in $|Det(M)(u,v)|dudv = dxdy$. Come si nota a sinista compare $dudv$ moltiplicato per una funzione che dipende dal punto. Se la trasformazione $\underline{\Phi}$ fosse lineare, si avrebbe una costante pari al modulo del determinante.

- Calcolare il volume della sfera $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ per strati. $V = \int_0^r du A_u$ dove A_u è l'area dell'insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2 \le r^2-u^2, z=u\}$ da cui $V = \int_0^r du\pi(r^2-u^2) = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Calcolare il volume della precedente sfera parametrizzando il volume tramite coordinate polari sferiche.
- Calcolare il volume della precedente sfera integrando per fili: $V = 2\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le r^2, z\ge 0} dx\,dy\,dz =$ $2\int\int_{x^2+y^2\le r^2, z\ge 0}\sqrt{r^2-x^2-y^2}$
- Il precedente integrale lo si è calcolato insistendo sulle coordinate cartesiane oppure passando alle polari nel piano.
- Risolvere l'esercizio di pag. 239 del libro sempre integrando per strati

Lezione del 08/11/2011

Calcolare il volume definito da $\{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le x+y+1\}$

Lezione del 11/11/2011

Data una forma ω chiusa in $\mathbb{R}^2$ oppure $\mathbb{R}^3$ definita su di un semplicemente connesso possiamo trovare una funzione (detta anche *funzione potenziale*) $f(\underline{x})$ tale che $\omega = df$. Infatti sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva tale che $\underline{\gamma}(a) = \underline{x}_o$ e $\underline{\gamma}(b) = \underline{x}$. $\underline{\gamma}(t) \in E$ per ogni t. Come funzione $f(\underline{x})$ basta prendere $\int_{\underline{\gamma}} \omega$. Ai fini del calcolo però conviene prendere la curva che rende l'integrale il più semplice possibile e ciò dipende dalla struttura di E. Se ad esempio $E = \mathbb{R}^3$ e $\omega = \sum_{i=1}^3 a_i(\underline{x})dx_i$ allora una possibile curva regolare a tratti è : $\underline{\gamma}_1(t) = (t, y_o, z_o)$ $x_o \le t \le x$, $\underline{\gamma}_2(t) = (x, t, z_o)$ $y_o \le t \le y$, $\underline{\gamma}_3(t) = (x, y, t)$ $z_o \le t \le z$. $f(\underline{x}) \stackrel{\rm def}{=} \int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega + \int_{\underline{\gamma}_2} \omega + \int_{\underline{\gamma}_3} \omega = \int_{x_o}^x dta_1(t, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y dta_2(x, t, z_o) + \int_{z_o}^z dta_3(x, y, t)$.

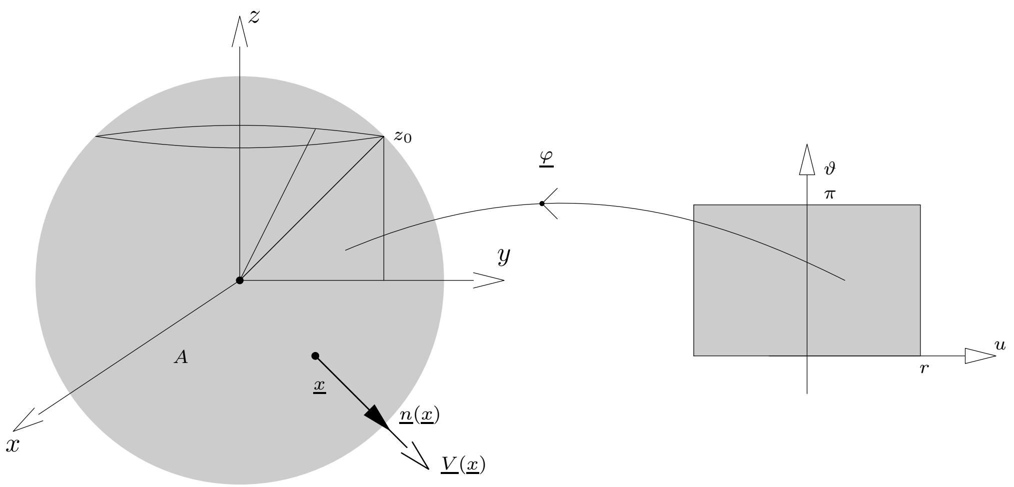
Si verifichi che $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \omega(\underline{x})$. Ogni altra funzione potenziale differisce dalla precedente per una costante. Ad esempio si può procedere nella seguente maniera. Si risolve la equazione $f_x(\underline{x}) = a_1(\underline{x})$ e quindi $f(\underline{x}) = \int_{x_0}^x dta_1(t, y, z) + q(y, z)$. Si ottiene $f_y(\underline{x}) = \int_{x_0}^x \frac{\partial a_1}{\partial y}(t, y, z) + q_y(y, z) =$ (usando la esattezza di ω) $\int_{x_0}^x \frac{\partial a_2}{\partial x}(t, y, z) + q_y(y, z) =$ integrando $a_2(x, y, z) - a_2(x_0, y, z,) + q_y(y, z) = a_2(x, y, x)$ e quindi $q_y(y, z) = a_2(x_0, y, z)$. Una ulteriore integrazione dà $q(y, z) = \int_{y_0}^y dsa_2(x_0, s, z) + p(z)$. A questo punto la funzione potenziale è $f(x, y, z) = \int_{x_0}^x dta_1(t, y, z) + \int_{y_0}^y dsa_2(x_0, s, z) + p(z)$. L'ultima derivazione dà $f_z(x, y, z) = \int_{x_0}^x \frac{\partial a_3}{\partial x}(t, y, z)dt + \int_{y_0}^y \frac{\partial a_3}{\partial y}(x_0, s, z)ds + p_z = a_3(x, y, z)$. Integrando si ha $P_z(z) = a_3(x_0, y_0, z)$ e quindi $p(z) = c + \int_{z_0}^z dua_3(x_0, y_0, u)$ e quindi la funzione potenziale è $f(x, y, z) = \int_{x_0}^x dta_1(t, y, z) + \int_{y_0}^y dsa_2(x_0, s, z) + \int_{z_0}^z dua_3(x_0, y_0, u) + c$

Lezione del 14/11/2011

Potenziale vettore

Sappiamo che se un campo vettoriale ha il rotore nullo è possbile trovarne un potenziale (almeno nelle regioni in cui il campo ammette circuitazione nulla su ogni curva chiusa). Ciò nasce dal fatto che il rotore di un gradiente è sempre uguale a zero. Supponiamo ora di avere un campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 V_i(\underline{x})\underline{e}_i$ tale che $div\underline{V} \equiv 0$. Essendo $div\underline{rotH} = 0$, ci si pone la domanda se per caso sia vera la relazione $\underline{V} = \underline{rotH}$ per un qualche campo vettoriale $\underline{H}$. Sotto opportune condizioni sul dominio la risposta è si ma la semplice connessione non basta come mostra il caso del campo gravitazionale.

• Sia dato l'insieme semplicemente connesso $A = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \backslash \{\underline{0}\}\}$. $\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 \frac{x_k \underline{e}_k}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$ (si può scrivere anche come $\underline{V}(\underline{x}) = \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3}$). Si può verificare che $div\underline{V} = 0$. Consideriamo la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e la curva evidenziata che è data da $z = z_0$, e $x = \sqrt{1 - z_0^2} \cos\vartheta$, $y = \sqrt{1 - z_0^2} \sin\vartheta$. Sia S_{z_0} la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \le z_0$, e $\underline{\gamma}(t)$ la parametrizzazione della curva. Se fosse vera la equazione $\underline{V} = \underline{rotH}$, per il teorema di Stokes, avremmo che l'integrale curvilineo $\oint_{\underline{\gamma}} \sum_{i=1}^3 H_i(\underline{x})dx_i$ è uguale a $\int\int_{S_{z_0}} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n})d\sigma$. Il campo vettoriale $\underline{H}(\underline{x})$ è limitato sulla curva $\underline{\gamma}$ e quindi, per $z_0 \to 1$ l'integrale curvilineo tende a zero. D'altra parte per $z \to z_0$, la superficie S_{z_0} tende all'intera sfera e quindi $\int\int_{S_{z_0}} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n})d\sigma$. tende a diventare $\int\int_S \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3} \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|} d\sigma = \int\int_S \frac{d\sigma}{\|\underline{r}\|^2} = 4\pi$, una palese contraddizione. L'unico modo per evitare la contraddizione è dire che non si ha $\underline{V} = rot\underline{H}$.



La condizione sufficiente perché dalla relazione $div\underline{V} \equiv 0$ si possa dire che $\underline{V} = rot\underline{H}$ è che l'insieme su cui si vuole vera la relazione sia *fortemente connesso.* Un insieme connesso $A \subset \mathbf{R}^3$ si dice *fortemente connesso* se qualunque superficie chiusa regolare $\Sigma \subset A$ è frontiera di un insieme limitato D contenuto in A.

Da un punto di vista figurativo un insieme è fortemente connesso se qualsiasi superficie chiusa regolare contenuta in esso è frontiera di un insieme contraibile con continuità fino a ridurlo ad un punto senza mai uscire dall'insieme.

È evidente che $\mathbf{R}^3 \backslash \{\underline{0}\}$ non è fortemente connesso.

Supponiamo ora di avere un campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})$ in un insieme fortemente connesso e $div\underline{V}(\underline{x}) \equiv 0$. Vogliamo trovare un campo vettoriale $\underline{H}(\underline{x})$ tale che $\underline{V} = rot\underline{H}$. Sia $\underline{V}(\underline{x}) = (V_1(\underline{x}), V_2(\underline{x}), V_3(\underline{x}))$.

Se esiste $\underline{H}(\underline{x}) = (H_1, H_2, H_3)$ tale che $rot\underline{H} = \underline{V}$ allora, *per qualsiasi* funzione $r(\underline{x})$ si ha $rot(\underline{H} + \underline{\partial} r) = \underline{V}$. Se si sceglie $r(\underline{x})$ in modo tale che $r_x + H_1 \equiv 0$ allora si può supporre che la prima componente del vettore $\underline{H}$ sia nulla e quindi si parte prendendo $\underline{H} = (0, H_2, H_3)$.

Dobbiamo risolvere l'equazione $rot\underline{H} = ((H_3)_y - (H_2)_z, -(H_3)_x, (H_2)_x) = (V_1, V_2, V_3)$. $H_3 = -\int_{x_0}^{x} dt V_2(t, y, z) + q(y, z)$, $H_2 = \int_{x_0}^{x} dt V_3(t, y, z) + p(y, z)$.

Poi $(H_3)_y - (H_2)_z = -\int_{x_0}^{x} dt (V_2)_y(t, y, z) + q_y(y, z) - \int_{x_0}^{x} dt (V_3)_z(t, y, z) - p_z(y, z) = V_1 =$ (essendo $div\underline{V}(\underline{x}) = 0$) $= q_y(y, z) - p_z(y, z) + \int_{x_0}^{x} dt (V_1)_x(t, y, z) = q_y(y, z) - p_z(y, z) + V_1(x, y, z) - V_1(x_0, y, z) = V_1(x, y, z)$ e quindi $q_y(y, z) - p_z(y, z) - V_1(x_0, y, z) = 0$

Prendiamo $p \equiv 0$ e otteniamo $q(y, z) = \int_{y_0}^{y} ds V_1(x_0, s, z)$. Alla fine il risultato è $H_1 \equiv 0$, $H_2(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} dt V_3(t, y, z)$, $H_3(\underline{x}) = -\int_{x_0}^{x} dt V_2(t, y, z) + \int_{y_0}^{y} ds V_1(x_0, s, z)$.

Il campo $\underline{H}(\underline{x})$) trovato non è certo l'unico possibile. *Tutti gli altri differiscono dal precedente per un gradiente.*

- Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x\underline{i} + x^2 y\underline{j} + y^2 z\underline{k}$ attraverso la supeficie del solido definito da $2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2$ (Preso dal file denominato "intsup")

- Sia C l'insieme dato dall'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e il piano $x + y + z = 0$. Sia data la forma differenziale $\omega = ydx + zdy + xdz$. Sia $\partial^+ C$ l'orientazione positiva su C. Si calcoli $\int_{\partial^+ C} \omega$. (Preso dal file denominato "duevar")

Lezione del 18/11/2011

Teorema *Siano* $f, g\colon X \to \mathbf{R}$, $\overset{\circ}{X} \subset \mathbf{R}^n$ *di classe* C^2. *Se la forma quadratica* $\sum_{i,j=1}^n [f_{x_i x_j}(\underline{x}^o) - \lambda^o g_{x_i x_j}(\underline{x}^o)] h_i h_j = (\underline{h}, H(\underline{x}^o)\underline{h})$, *ristretta all'insieme dei vettori* $\underline{h}$ *tangenziali al vincolo in* $\underline{x}^o$ *ossia* $(\underline{\partial} g(\underline{x}^o), \underline{h}) = 0$ *è definita negativa (positiva) allora* $\underline{x}^o$ *è punto di massimo (minimo) forte vincolato.*

Esercizio **24.7** (sta sul file denominato "13–duevar") Sulla curva di equazione $y = x^2$, $z = x^2$ nello spazio $\mathbf{R}^3$ trovare il punto $\underline{x}^o = (x^o, y^o, z^o)$ più vicino al punto $(0, 0, 1)$.

Lezione del 21/11/2011

• Trovare gli estremi locali della funzione y ristretta all'insieme definito da $x^2 + xy + y^2$.

• Determinare il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y) = xy$ dove (x, y) appartiene alla proiezione sul piano della curva data dall'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con il piano $x + y + z = 0$

Lezione del 25/11/2011

• Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n = nxe^{-nx^2}$, $x \in \mathbf{R}$ e $f_n(x) = \frac{1+x}{x^n+n^2}$ con $x \geq 0$.

Lezione del 28/11/2011

Criterio di cauchy per la convergenza di serie di funzioni La serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente nell'insieme I se e solo se

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\ k_\varepsilon\colon\ \forall\ n, m > k_\varepsilon \implies \sup_I |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

e naturalmente $\displaystyle S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)$

• Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ dove $\displaystyle f_k(x) = \frac{x}{k(x+k)}$, per $x \geq 0$ e $\displaystyle f_k(x) = \frac{\sin\frac{x}{k}}{k + x^2}$ per $x \in \mathbf{R}$.

• Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ converge uniformemente per ogni x che non rende zero nessuno dei denominatori ma non converge totalmente in nessun intervallo.

• Studiare l'intervallo di convergenza delle serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ con riguardo pure a quanto accade agli estremi.

• Dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + (-1)^k k}$ non converge (non è una serie di Leibnitz).

• Dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ non converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$.

Lezione del 02/12/2011

• Risolvere la equazione $iz^2+(1-i)z+1=0$, $z^2=1$, $z^2=-1$, $z^4=1$, $z^4=-1$, $z^3=1$, $z^3=-1$.

• Semplificare il numero complesso $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

Lezione del 05/12/2011

Disegnare ed identificare algebricamente il luogo dei punti del piano complesso tali che $|z-z_0|<|z-z_1|$ dove z_0 e z_1 sono due numeri complessi.

Dimostrare che $\left|\frac{z}{|z|}-1\right|<arg(z)$

Dare la condizione per cui il prodotto di due numeri complessi z e w è un numero immaginario puro.

Definizione: *Una funzione complessa* $f\colon A\to\mathbf{C}$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *con* A *aperto e derivabile in ogni punto di* A *è detta olomorfa*

Enunciato e dimostrazione del teorema:

Teorema1 *Una funzione data come sopra è olomorfa se e solo se* $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$ *sono differenziabili ed inoltre* $u_x(x,y)=v_y(x,y)$, $u_y(x,y)=-v_x(x,y)$

Dimostrazione Sia f olomorfa. Ciò vuol dire che $f(z)=f(z_0)+(a+ib)(z-z_0)+o(|z-z_0|)$ dove $a+ib=f'(z_0)$. Separando parte reale e immaginaria si arriva a $u(x,y)+iv(x,y)=(u(x_0,y_0)+(a(x-x_0)-b(y-y_0))+Re(o(|z-z_0|)))+i\left(v(x_0,y_0)+(a(y-y_0)+b(x-x_0))+Im(o(|z-z_0|))\right)$.

$u(x,y)=(u(x_0,y_0)+(a(x-x_0)-b(y-y_0))+Re(o(|z-z_0|)))$ è la relazione di differenziabilità di $u(x,y)$ e la seconda la stessa cosa per $v(x,y)$. Ne segue che $a=u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$ e $b=v_y(x_0,y_0)=-u_x(x_0,y_0)$.

Viceversa supponiamo che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ siano differenziabili e valgano le condizioni di Cauchy–Riemann. Dunque sappiamo che $u(\underline{x})=u(\underline{x}_0)+u_x(\underline{x}_0)+u_y(\underline{x}_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|)$ e $v(\underline{x})=v(\underline{x}_0)+v_x(\underline{x}_0)+v_y(\underline{x}_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|)$. Sommano $u(\underline{x})+iv(\underline{x})$ si ottiene $u(\underline{x})+iv(\underline{x})=u(\underline{x}_0)+iv(\underline{x}_0)+(x-x_0)(u_x(\underline{x}_0)iv_x(\underline{x}_0))+i(y-y_0)(-iu_y(\underline{x}_0)+v_y(\underline{x}_0)+o(|z-z_0|)$ ed usando le condizioni di Cauchy Riemann si arriva a $u(\underline{x})+iv(\underline{x})=u(\underline{x}_0)+iv(\underline{x}_0)+(x-x_0)(u_x(\underline{x}_0)iv_x(\underline{x}_0))+i(y-y_0)(iv_x(\underline{x}_0)+u_x(\underline{x}_0)+o(|z-z_0|)=f(z_0)+(z-z_0)(u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))+o(|z-z_0|)$ da cui segue la derivabilità della funzione $f(z)$ in $z_0=x_0+iy_0$ e $f'(z_0)=u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))=\frac{1}{i}(u_y(\underline{x}_0)+iv_y(\underline{x}_0))$ q.e.d.

Lezione del 06/12/2011

• Studio delle funzioni $f(z)=z^2$, $f(z)=z^4$, $f(z)=z^n$ in particolare per quanto rigurda la iniettività .

• Derivata della funzione $f(z)=e^z$ Esplicitazione delle formule relative all'esponenziale $e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

• Non olomorfia della funzione $f(z)=z^2-|z|$

Enunciato e dimostrazione del seguente teorema

Teorema2 *Sia data la funzione olomorfa* $f\colon A\to\mathbf{C}$ *con* A *aperto e semplicemente connesso. Allora* $\oint_\gamma f(z)dz=0$ *per qualsiasi curva chiusa contenuta in* A

Dimostrazione, (non unica) Dopo avere esplicitato $\oint_\gamma f(z)dz$ con $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ed assumendo che le derivate parziali di u e v siano continue, si usi il lemma di Gauss–Green unitamente alle condizioni di Cauchy–Riemann. q.e.d.

Lezione del 09/12/2011

• Studio delle funzioni inverse delle funzioni $f(z) = z^2$, $f(z) = z^3$, $f(z) = e^z$ ed in generale $f(z) = z^n$.

• Dimostrazione della formula integrale di Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

• Prendere l'esercizio num.86 a pag.61 e dire se le funzioni ivi date sono olomorfe (ricordare che le funzioni sono olomorfe se e solo se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, u, v sono differenziabili e $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

• Sia data la funzione continua $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = x^2 + y^2$ e analitica (derivabile) in $(0, 0)$. Trovare l' errore nei seguenti passaggi.

Eseguiamo l'integrale $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z} dz$ lungo la curva $z = e^{i\varphi}$. Ora eseguiamo l'integrale lungo una circonferenza di raggio r che circonda $z = 0$ ed otteniamo $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} ir^2 d\varphi$. Se ora mandiamo r a zero otteniamo zero e quindi $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 0$. Che ciò sia falso lo si evince dal fatto che $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\vartheta = 1$.

Calcolare i seguenti integrali.

• $\displaystyle\int_\gamma z^2 dz$ dove γ è l'unione dei due segmenti: da $(-1, 0)$ a $(-1, 1)$ e da $(-1, 1)$ a $(2, 2)$.

• $\displaystyle\int_\gamma (z^2 - |z|) dz$ lungo lo stesso cammino e lungo il cammino che va direttamente in linea retta da $(-1, 0)$ a $(2, 2)$.

• $\displaystyle\int_\gamma z|z| dz$ lungo la semicirconferenza di centro l'origine e raggio r percorsa in senso antiorario una sola volta $0 \le \varphi \le 2\pi$.

• $\displaystyle\int_\gamma z|z| dz$ lungo il segmento che va da $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.

• La frase a fine pag.96 delle dispense di Bruschi va intergata sostituendo alla frase "curva chiusa posta nel dominio" con la frase "curva chiusa posta nel dominio insieme con il suo interno"

Lezione del 12/12/2011

Definizione *Sia $f\colon A \to \mathbf{C}$. f ammette primitiva in A se esiste una funzione olomorfa $G\colon A \to \mathbf{C}$ tale che $G' \equiv f$.*

Teorema. Sia $f\colon A \to \mathbf{C}$ continua con A aperto. Allora se $\displaystyle\int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)dw$ non dipende da γ ma solo da $z_0, z \in A$ qualunque siano z_0 e z, allora $F(z) = \displaystyle\int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)dw$ è una primitiva si $f(z)$. Inoltre se G è una qualsiasi primitiva di f in A si ha $\displaystyle\int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)dw = G(z) - G(z_0)$.

• Integrale $\displaystyle\oint \frac{z^2}{z-2} dz$ lungo le due circonferenze $|z| = 1$ e $|z| = 3$ in due modi. Il primo facendo uso del teorema sulla rappresentazione integrale di Cauchy. Il secondo usando la funzione primitiva di $z^2/(z-2)$.

Integrale $\oint Re(z)dz$ lungo la corconferenza $|z|=1$.

bullet Sia f olomorfa definita su $\mathbf{C}$. Dimostarre che se $|f(z)|$ è costante allora pure $f(z)$ lo è .

Lezione del 13/12/2011

• Calcolare l'integrale $\oint_\gamma \frac{z^2}{(z-2)^2}dz$ dove $\gamma = |z| = 3$ percorsa in senso antiorario. Si esegua il calcolo usando la rappresentazione integrale di Cauchy ed usando la primitiva della funzione.

• Calcolare $\oint \frac{Im(z)dz}{1+z^2}$ e $\oint \frac{Re(z)dz}{1+z^2}$ lungo il segmento rettilineo che va dal punto $-2-2it$ a $2+2it$ e poi ritorno lungo l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio $2\sqrt{2}$.

Teorema del massimo *Sia $f\colon A \to \mathbf{C}$ con A aperto connesso e f olomorfa su A e continua su $\overline{A}$. Allora $|f(z)|$ assume il massimo sulla frontiera di A.*

Dim. Che il massimo esista deriva dal teorema di Weierstrass per funzioni continue su insiemi chiusi e limitati in $\mathbf{R}^n$. Se la funzione è costante allora tutti i punti sono di massimo e quindi anche quelli della frontiera.

Lezione del 16/12/2011

• Sviluppo in serie di potenze con indentificazione del raggio di convergenza della funzione $\frac{1}{z^2-z(1+2i)+2i}$. Gli sviluppi vanno centrati in un qualsiasi punto del piano complesso diverso da $z=1$ e $z=2i$. Eseguire gli sviluppi sia dopo avere eseguito la scomposizione in fratti semplici, sia dopo avere fattorizzato il denominatore ma senza scriverlo come somma di reciproci di termini lineari. In questo secondo caso bisogna utilizzare la formula

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k}$$

Verificare che i coefficienti degli sviluppi sono uguali.

• Sviluppare il serie di potenze la funzione $f(z) = \frac{1}{1-z}$ centrandola in un qualsiasi punto del piano complesso.

• Dimostrare che la funzione $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ è la parte reale di una funzione olmorfa $f(z)$ (a meno di una costante) e trovare tale funzione. Per il procedimento si vedano i primi esercizi del secondo capitolo degli esercizi messi in rete. La procedura può anche svilupparsi nel seguente modo:

Da $u_x = v_y$ otteniamo $v(x,y) = \int u_x\, dy + h(x)$ e poi da $u_y = -v_x$ si ha $v_x = \int u_{xx}\, dy + h'(x) = -\int u_{yy}\, dy + h'(x) = -u_y + q(x) + h'(x)$ dove $q(x) = u_y - \int u_{yy}\, dy$. Poi si ha $-u_y + q(x) + h'(x) = -u_y$ da cui $h'(x) = -q(x)$ ossia $h(x) = -\int q(x)dx + cost$. Essendo $q(x) = -2y + 2x + 2y = 2x$, si ottiene $h(x) = -x^2$ e quindi $v(x) = \int (2x+2y)dy - x^2 = 2xy + y^2 - x^2$. La funzione cercata è quindi $x^2 - y^2 + 2xy + i(2xy + y^2 - x^2) = z^2(1-i)$.

• Dimostrare che la funzione $u(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$ è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$ (a meno di costanti) e trovare $f(z)$.

Lezione del 19/12/2011

Calcolare l'integrale $\oint \frac{z^2}{(z-2)(z-3)}dz$ esteso alla circonferenza di raggio 4 e centro l'origine usando il teorema dei residui.

Calcolare $\oint \frac{z^2}{(z-2)(z-3)}dz$ esteso alla circonferenza di raggio 1/2 e centro l'origine usando il teorema dei residui.

Lezione del 20/12/2011

- $\oint \frac{dz}{(z-3)(z^6-1)}$ esteso all'insieme $|z-1|=1$ e percorso in senso antiorario. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}dx$

Lezione del 09/01/2011

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x++1}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$

Lezione del 10/01/2011

Calcolare $\oint_{|z|=5} \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}dz$,

Trovare i primi quattro interi naturali per cui è diverso da zero l'integrale $\oint_{|z|=5} \frac{z^n dz}{z(z^2-1)(z^3-1)(z^5-1)}$

Calcolare $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+a^2)}dx,\ a>0.$

Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^{2n}}dx$

Lezione del 13/01/2011

Teorema di Morera *Sia $f\colon A\to\mathbb{C}$ una funzione continua in un aperto A semplicemente connesso. Se accade che $\oint_\gamma f(z)dz$ per ogni curva chiusa contenuta in A, allora $f(z)$ è olomorfa*

Dim. L'integrale $\int_{\gamma(z_0,z)} f(w)dw$ dipende solo da z_0 e z ma non dal cammino γ che connette i due punti. Ciò implica che la funzione $F(z)\doteq \int_{\gamma(z_0,z)} f(w)dw$ è derivabile (lo si dimostra come nel caso delle forme differenziali esatte) ed inoltre $F'(z)=f(z)$. Essendo una funzione olomorfa a sua volta derivabile, possiamo derivare $f(z)$ e quindi affermare la sua olomorfia. q.e.d.

- Trasfomata di Laplace. Sua definizione e dimostrazione della olomorfia. (vedi allegato scaricabile)
- Nozione di integrale improprio uniformemente convergente. Sia data la funzione $f(x,y)\colon[0,+\infty)\times Y(=(y_0,y_1))\to\mathbf{R}$ uniformemente continua su ogni insieme della forma $[0,n)\times Y$ con n intero positivo qualsiasi e integrabile in senso improprio in $[0,+\infty)$. Diciamo che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x,y)dx$ è *uniformemente convergente* se

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ x_\varepsilon : \overline{x}>x_\varepsilon \implies \Big|\int_{\overline{x}}^{+\infty} f(x,y)dx\Big|<\varepsilon\ \forall\ y\in Y$$

che è come dire

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ x_\varepsilon : \overline{x}>x_\varepsilon \implies \sup_{y\in Y}\Big|\int_{\overline{x}}^{+\infty} f(x,y)dx\Big|<\varepsilon$$

La nozione di uniforme convergenza di un integrale improprio entra nel teorema 8.2 a pag.225 sulla trasformata di Laplace laddove dice "since the n–th remainder.....the series converges uniformly". Infatti la stima (8–4) del Teorema 8.1 a pag.222 consente di dire che $\Big|\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt\Big| < \varepsilon$ per ogni $t_0 > t_\varepsilon$ e quindi la uniforme convergenza dell'integrale (8–2) in $Rep \geq x > a$ che a sua volta consente di concludere circa l'uniforme convergenza della serie (8–9) scritta a pag. 225 in quanto $\Big|\displaystyle\int_{t_{n+1}}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt\Big| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$.

Teorema *Se l'integrale* $I(y) \doteq \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,y)dy$ *è uniformemente convergente in* $y \in Y$, $I(y)$ *è una funzione continua*

Dim. Costruiamo $I_n(y) \doteq \displaystyle\int_0^{x_n} f(x,y)dx$ con $x_n \to +\infty$ e $x_0 = 0$. Sappiamo che $f(x,y)$ è uniformemente continua in $[0,n) \times Y$ e quindi

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon :\ |x-x'| + |y-y'| < \delta_\varepsilon\ \{x,x'\} \in [0,n),\ \{y,y'\} \in Y \implies |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$$

Da ciò segue che $I_n(y)$ è una funzione continua in quanto $\Big|\displaystyle\int_0^{x_n} (f(x,y) - f(x,y_0))dx\Big| \leq x_n\varepsilon$. Essendo $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,y)dx \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx$, dalla uniforme convergenza segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k_ε tale che $k > k_\varepsilon$ implica $\displaystyle\sup_{y\in Y}\Big|\sum_{j=k}^{+\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y)dx\Big| < \varepsilon$ che è come dire l'uniforme convergenza della serie $\displaystyle\sup_{y\in Y} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx$. Ne segue la continuità della funzione limite $I_\infty(y)$ per il teorema a pag.4 del libro di testo (TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DEL LIMITE) q.e.d.

Teorema (della maggiorante integrabile) *Se esiste una funzione* $g(x)$ *tale che* $|f(x,y)| \leq g(x)$ *e* $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx < +\infty$ *allora l'integrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,y)dx$ *è uniformemente convergente*

Dim.

$$\Big|\int_{\overline{x}}^{+\infty} f(x,y)dx\Big| \leq \int_{\overline{x}}^{+\infty} g(x)dx < \varepsilon$$

in quanto il secondo integrale converge. q.e.d.

Notare che se l'integrale fosse $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x,y)dx \doteq I(y)$, sotto le ipotesi date sulla $f(x,y)$ ossia integrabilità come funzione di x e continuità come funzione di y, si avrebbe la continuità di $I(y)$ senza che sia necessaria l'uniforme convergenza dell'integrale

Lezione del 17/01/2011

Trovare l'originale della funzione $\dfrac{16p^2 + 3p - 1}{p(p^2+1)}$

Risolvere la equazione differenziale $u' = u + H(t-5)$, se $t > 0$ e $u(0) = 1$.

Lezione del 20/01/2011

- Risolvere la equazione $u'' + u' + u = H(t - t_0)$, $u(0) = a$, $u'(0) = b$.

• Risolvere la equazione $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$, $u(0,t) = \sin(\omega t)$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \omega$

• Esercizi proposti per casa

l) $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \alpha \sin t \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ e si dica per quali valori di a, b, α, la soluzione è limitata

m) $\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \alpha \sin t + \beta \sin(2t) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$ e si dica per quali valori di a, b, α, β, la soluzione è limitata

i) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$ j) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x + \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$ k1) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\cos(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

Lezione del 23/01/2011

• Risolvere la equazione $y'''' + 2y'' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = a$

• Risolvere la equazione $my'' = A\delta(t-T)$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$

• Risolvere la equazione $y'' + y = \sin t$, $y(0) = y'(0) = 0$

Lezione del 24/01/2011

Risoluzione di alcuni esercizi dei compiti dati negli anni passati

Lezione del 30/01/2011

• Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4+1} dx$,

• Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = y\underline{i} + x\underline{j} + xy\underline{k}$ attraverso la superficie $S = \{x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1, 0 \le z \le xy, x = 0,\ y \ge 0\} \cup \{x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1, 0 \le z \le xy, x \ge 0,\ y = 0\} \cup \{x^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1, z = xy, x \ge 0,\ y \ge 0\}$ (la normale è diretta verso l'esterno)

Lezione del 31/01/2011

• Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3+1} dx$,

• Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$