Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
20–02–2012 A.A. 2011/2012, Terzo scritto, compito A

Allegare tutti i conti ritenuti necessari. Risultati senza giustificazione non verranno presi in considerazione

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1), punti **(7.5)** Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{xy} & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$

i) Si trovi l'insieme dei punti in cui è continua e si scriva il risultato nello spazio sottostante. *Si evitino affermazioni non giustificate*

La funzione è $\dfrac{\sin y}{y} - \dfrac{\sin x}{x}$ per cui è certamente continua in ogni punto che non sta sugli assi. Dato quindi $P \equiv (0, y_0)$, $y_0 \neq 0$ e scriviamo

$$f(\underline{x}) = \frac{x(\sin y - \sin y_0) + x\sin y_0 - y(x - o(x^2))}{xy} = \frac{\sin y - \sin y_0}{y} + \frac{\sin y_0}{y} - 1 + o(x) \to \frac{\sin y_0}{y_0} - 1,$$

Se il punto è $P \equiv (x_0, 0)$ otteniamo $\dfrac{-\sin x_0}{x_0} + 1$.

Se il punto è $P \equiv (0, 0)$ abbiamo

$$f(\underline{x}) = \frac{x(y + o(y)) - y(x + o(x))}{xy} = \frac{o(y)}{y} + \frac{o(x)}{x} \to 0$$

Quindi la funzione è continua dappertutto tranne sugli assi cartesiani con eccezione dell'origine dove è continua.

ii) si calcolino le derivabile parziali e le si scriva nello spazio sottostante

Fuori dagli assi abbiamo $f_x = \dfrac{-x\cos x + \sin x}{x^2}$, $f_y = \dfrac{y\cos y - \sin y}{y^2}$ e sono continue essendo il rapporto di funzioni continue il cui denominatore mai si annulla.

In $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$ abbiamo

$$f_y(0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{t\sin y_0 - y_0 \sin t}{ty_0} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sin y_0 - y_0 t + y_0 \frac{t^3}{6} + y_0 o(t^4)}{y_0 t^2}$$

ed evidentemente non esiste.

In $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$ abbiamo

$$f_x(x_0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$f_y(x_0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{x_0 \sin t - t\sin x_0}{tx_0} = \lim_{t\to 0} \frac{t(x_0 - \sin x_0) - x_0 \frac{t^3}{6} + o(t^4)}{t^2 x_0}$$

ed evidentemente non esiste.

In $\underline{x}=\underline{0}$ abbiamo evidentemente $f_x(\underline{0})=f_y(\underline{0})=0$. Alla fine scriviamo

$$f_x(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{-x\cos x+\sin x}{x^2} & x\neq 0, y\neq 0\\ \nexists & x=0, y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}\qquad f_y(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{y\cos y-\sin y}{y^2} & x\neq 0, y\neq 0\\ \nexists & x\neq 0, y=0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Ne segue che le derivate parziali sono continue entrambe in $\mathbf{R}^2\backslash\{x=0,y\neq 0\}\backslash\{x\neq 0,y=0\}\cup\{\underline{0}\}$ e quindi la funzione è ivi differenziabile.

iii) si trovi l'insieme dei punti in cui la funzione è differenziabile e si scriva il risultato nello spazio sottostante

Chi avesse fatto il ragionamento precedente starebbe a posto. Altrimenti, dopo avere detto che sugli assi ma non l'origine, la funzione non è continua, si poteva continuare dicendo che fuori dagli assi le derivate sono date dal rapporto di polinomi in cui il denominatore non si annulla e quindi sono continue e quindi la funzione è differenziabile. Nell'origine si ha

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|}=\frac{h_1\sin h_2-h_2\sin h_1}{h_1h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Usiamo $\sin t=t-\frac{1}{6}t^3+o(t^4)$ e quindi

$$\frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|}=\frac{h_1^2-h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+\frac{o(h_2^4)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+\frac{o(h_1^4)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Poi $0<\dfrac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\dfrac{h_1^2}{|h_1|}$, $0<\dfrac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\dfrac{h_2^2}{|h_2|}$, $0<\dfrac{|o(h_1^4)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\dfrac{|o(h_1^4)|}{|h_1|}$, $0<\dfrac{|o(h_2^4)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\dfrac{|o(h_2^4)|}{|h_2|}$ e tutti charamente tendono a zero.

iv) Siano (α,β), $\alpha,\beta\neq 0$, $\alpha^2+\beta^2=1$, le componenti di un generico versore. Si dica che relazione deve intercorrere tra α e β affinché la derivata direzionale calcolata nell'origine sia nulla.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t\alpha\sin(t\beta)-t\beta\sin(t\alpha)}{t^2\alpha\beta}=0$$

qualunque sia $\alpha,\beta\neq 0$. Lo si poteva evincere anche dal fatto che $\partial_{(\alpha,\beta)}f(\underline{0})=\underline{\partial}f(\underline{0})\cdot(\alpha,\beta)$ ma questa formula è valida solo perché in $\underline{0}$ la funzione è differenziabile. Altrimenti è in generale falsa.

Sbagliare una delle derivate richieste al punto ii)**, comporta l'annullamento del compito**

2), punti **(5.5)** Si calcoli il volume della porzione finita di spazio compresa fra i due paraboloidi $z=x^2+y^2-xy$ e $z=x^4+y^4$ *che si proietta sul piano* (x,y) *all'interno del cerchio* $x^2+y^2\leq r^2$. con $0<r^2<r_0^2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Si scriva la risposta nello spazio sottostante. Lo studente/ssa non si preocccupi del valore di r_0^2 ma si concentri solo su r^2.

L'integrale è semplicemente

$$\int\int_{x^2+y^2\le r^2}(x^2+y^2-xy-x^4-y^4)dxdy =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\rho(\rho^2-\rho^2\frac{1}{2}\sin(2t)-r^2\rho^4\cos^4 t-r^2\rho^4\sin^4 t)d\rho = \frac{\pi r^4}{2}(1-\frac{r^2}{2})$$

Tutti gli studenti tranne uno hanno scritto

$$\dots\int_{x^2+y^2-xy}^{x^4+y^4} dz$$

Non l'ho considerato errore neanche quando costoro sono giunti ad *volume negativo*. Lo studente/ssa accorto/a avrebbe dovuto osservare che facendo parte del dominio di integrazione punti di coordinate arbitrariamente piccole, il precedente integrale era per lo meno sospetto. Infatti la presenza di r_0^2 serviva proprio ad evidenziare che $x^4+y^4\le x^2+y^2-xy$ per $x^2+y^2\le r_0^2$.

3), punti **(5.5)** Si consideri l'intersezione dei due parabolidi $z=x^2+y^2-xy$ e $z=x^4+y^4+\frac{1}{4}$. Si dimostri che il punto di coordinate $(0,1/\sqrt{2})$ è un punto critico non singolare per l'intersezione e se ne stabilisca la natura. È un problema di "funzione implicita". Si scriva il risultato nello spazio sottostante

L'intersezione dei due paraboloidi dà luogo alla curva di equazione definita implicitamente da

$$F(x,y)=\frac{1}{4}+x^4+y^4-x^2-y^2+xy=0,\qquad F_x=4x^3-2x+y,\qquad F_y=4y^3-2y+x$$

e $F_x(0,\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ mentre $F_y(0,\frac{1}{\sqrt{2}})=0$ e quindi possiamo scrivere la curva nell'intorno del punto in question come $x=f(y)$ con $|x|<\delta$, $|y-\frac{1}{\sqrt{2}}|<\delta$ e $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=0$. Inoltre abbiamo

$$F(f(y),y)\equiv 0,\quad |y-\frac{1}{\sqrt{2}}|<\delta,\quad\Longrightarrow\quad F_xf'+F_y\equiv 0\quad\Longrightarrow\quad f'(y)=\frac{-F_y(f(y),y)}{F_x(f(y),y)}$$

Ne segue che $f'(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{-F_y(f(y),y)}{F_x(f(y),y)}\Big|_{y=\frac{1}{\sqrt{2}}}=0$. Derivando ulteriormente $F_xf'+F_y\equiv 0$ si ottiene

$$F_{xx}(f')^2+F_{xy}f'+F_xf''+F_{xy}f'+F_{yy}\equiv 0$$

Calcolando tutto nel punto otteniamo

$$f''(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{-F_{yy}(f(y),y)}{F_x(f(y),y)}\Big|_{y=\frac{1}{\sqrt{2}}}=-4\sqrt{2}>0$$

per cui è un massimo.

4), punti **(5.5)** Si calcoli $\int_\varphi\omega$ dove $\omega=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}+$ $(x+y)dz$; φ è la curva data da $\{z=x^2+y^2\}\cap\{z=4x+4y+1\}$ e percorsa in modo tale che la sua proiezione sul piano (x,y) sia a sua volta percorsa in senso antiorario.

La curva è $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ e quindi è una circonferenza che gira intorno all'origine. Per quanto riguarda la parte in dx e dy della forma differenziale, ci sono due modi di prrocedere.

i) La forma è definita dappertutto tranne in $(0,0)$ ed ammette la primitiva $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}$ che è ovunque definita e quindi la forma è esatta. L'integrale è nullo.

ii) Si osserva che la forma è chiusa ed allora grazie al lemma di Gauss–Green, eseguiamo l'integrale sulla curva $x^2+y^2=1$ sapendo che i due risultati sono gli stessi. Parametrizzando $x=\cos t$ e $y=\sin t$ con $0\le t\le 2\pi$ otteniamo ugualmente zero.

La seconda parte della forma differenziale è

$$\int_\gamma (x+y)dz=\int_\gamma((x+y)(4dx+4dy)=\int_\gamma(2d(x^2)+2d(y^2)+4xdy+4ydx)=4\int_\gamma(xdy+ydx)=0$$

essendo esatta.

5) , punti **(4)** Sia data la SERIE di funzioni: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}e^{-\frac{x^2}{n^s}}$. 1) Si trovi l'insieme per cui la serie converge puntualmente. Al variare di s, l'insieme può cambiare 2) Si trovino i valori di s per cui la convergenza è uniforme e quelli per cui la convergenza non è uniforme. Si scriva ordinatamente il risultato nello spazio sottostante nel seguente modo: per la risposta alla domanda 1), accanto ai valori di s si indichi l'insieme di convergenza puntuale; per la risposta alla domanda 2), accanto ai valori di s si dica se la convergenza è uniforme o no

i) $s\le -1$. $s=-|s|$ per cui si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}e^{-n^{|s|}x^2}$

i.1) $x\ge 1$. $\dfrac{x^n}{n}e^{-n^{|s|}x^2}=\dfrac{1}{n}e^{-x^2n^{|s|}+n\ln x}=\dfrac{1}{n}e^{-n(x^2n^{|s|-1}-\ln x)}\le\dfrac{1}{n}e^{-n(x^2-\ln x)}$. Poiché $x^2-\ln x\ge\min\limits_{x\ge1}(x^2-\ln x)=\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)=y_0>0$, abbiamo $\dfrac{x^n}{n}e^{-n^{|s|}x^2}\le\dfrac{1}{n}e^{-ny_0}$ scatta il teorema sulla convergenza totale e quindi la serie converge uniformemente.

i.2) $|x|<1$. Se $|x|\le c<1$ allora possiamo maggiorare $\dfrac{|x|^n}{n}e^{-n^{|s|}x^2}\le\dfrac{c^n}{n}\le c^n$ e quindi la serie converge uniformemente in $|x|\le c<1$. Se $c<|x|<1$ maggioriamo $\dfrac{|x|^n}{n}e^{-n^{|s|}x^2}\le\dfrac{|x|^n}{n}e^{-n^{|s|}c^2}\le e^{-n^{|s|}c^2}$ e anche in questo caso scatta il teorema sulla convergenza totale.

i.3) $x\le -1$. Abbiamo $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n|x|^n}{n}e^{-n^{|s|}x^2}\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n}e^{-n^{|s|}x^2}$ e si rifanno i conti di i.1).

In definitiva per $s\le -1$, la convergenza è uniforme su tutto $\mathbf{R}$.

ii) $-1<s<0$.

ii.1) Se $x>1$ abbiamo $\dfrac{1}{n}e^{(n\ln x-\frac{x^2}{n^s})}\to+\infty$ per $n\to\infty$ e quindi è violata la condizione necessaria per la convergenza delle serie.

ii.2) Se $x<-1$ scriviamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}e^{\frac{-x^2}{n^s}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n|x|^n}{n}e^{\frac{-x^2}{n^s}}$ ma $\dfrac{|x|^n}{n}e^{\frac{-x^2}{n^s}}=e^{n\ln|x|-\frac{x^2}{n^s}}$ e non tende a zero per $n\to+\infty$

ii.3) Se $|x|\le 1$ allora stimiamo $\dfrac{|x|^n}{n}e^{-\frac{x^2}{n^s}}\le\dfrac{|x|^n}{n}$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n}$ converge per $|x|<1$ e converge uniformemente in ogni intervallo $|x|\le x_0<1$. Per $x=\pm1$ non converge ma in tal caso torniamo alla forma originaria ossia $\frac{x^n}{n}e^{-\frac{x^2}{n^s}}$ che vale $\frac{1}{n}e^{-n^{|s|}}$ se $x=1$ e $\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^{|s|}}$ se $x=-1$. Le due serie convergono entrambe e quindi la conclusione è che per $-1<s<0$ la serie converge uniformemente in $|x|\le 1$ e non converge per $|x|>1$.

iii) $s=0$. La serie è $\frac{x^n}{n}e^{-x^2}$ che converge in $[-1,1)$, in $x=-1$ è una serie di Leibnitz ossia $\frac{(-1)^n}{n}e^{-x^2}$ e quindi converge. La serie diverge per $|x|>1$ e $x=1$. La convergenza è uniforme in $|x|\le x_0<1$ per ogni $0<x_0<1$. In realtà esiste un teorema che consente di arrivare a dire che la convergenza è uniforme in $[-1,x_0]$ con $x_0<1$ ma a lezione non è stato trattato.

iv). $s>0$. Accade quello che accade per $s=0$.

6) , punti **(7)** Si calcoli l'integrale $\int_{\gamma^+}dz\frac{z^2}{\sin^2 z(1-\cos z)}$ dove γ è la circonferenza di raggio 5 e centro l'origine. Si scriva il risultato nello spazio sottostante

Abbiamo $\int_{\gamma^+}dz\frac{z^2}{\sin^2 z(1-\cos z)}=2\pi i\sum Res(f(z))$ e i residui si trovano a $z=0$, $z=+\pm\pi$.

A $z=0$ si ha un polo di ordine 2 in quanto $\frac{z^2}{\sin^2 z}$ è continua per $z=0$ e quindi

$$f(z)=\frac{z^2}{\sin^2 z}\frac{1}{1-\cos z}=\frac{z^2}{\sin^2 z}\frac{1}{\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+O(z^6)}=\frac{z^2}{\sin^2 z}\frac{1}{\frac{z^2}{2}(1-\frac{z^2}{12}+O(z^4))}=$$
$$\frac{z^2}{\sin^2 z}\frac{2}{z^2}(1+\frac{z^2}{12}+O(z^4))$$

e quindi si ha un polo di ordine 2. Per avere il residuo si può applicare la formula $Resf(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}z^2 f(z)$ ma non conviene. Conviene invece scrivere lo sviluppo di Taylor in $z=0$ e quindi

$$\frac{z^2}{(z-\frac{z^3}{6}+O(z^5))^2}\frac{2}{z^2}(1+\frac{z^2}{12}+O(z^4))=\frac{z^2}{z^2(1-\frac{z^2}{6}+O(z^4))^2}\frac{2}{z^2}(1+\frac{z^2}{12}+O(z^4))=$$
$$\frac{2}{z^2}(1-\frac{z^2}{6}+O(z^4))^2(1+\frac{z^2}{12}+O(z^4))=\frac{2}{z^2}(1-\frac{5}{6}z^2+O(z^4))$$

e quindi il residuo è zero.

In $z=\pi$ scriviamo $\sin z=\sin(z-\pi+\pi)=-\sin(z-\pi)$ e quindi $z=\pi$ è un polo di ordine 2. Quindi abbiamo

$$f(z)=\frac{z^2}{\sin^2 z}\frac{1}{1-\cos z}=f(z)=\frac{(z-\pi+\pi)^2}{\sin^2(z-\pi)}\frac{1}{1+\cos(z-\pi)}$$

Poniamo $z-\pi=y$ ed abbiamo

$$g(y)=\frac{(y+\pi)^2}{\sin^2 y(1+\cos y)}=\frac{y^2+2\pi y+\pi^2}{\sin^2 y(1+\cos y)}$$

e rifacendo i conti di prima abbiamo

$$g(y)=\frac{y^2+2\pi y+\pi^2}{y^2}(1-\frac{y^2}{6}+O(y^4))^2\frac{1}{1+\cos y}=\frac{y^2+2\pi y+\pi^2}{y^2}(1-\frac{y^2}{6}+O(y^4))^2\frac{1}{2}(1+O(y^2))$$

da cui il residuo è π. Il residuo a $z=-\pi$ è $-\pi$ per cui l'integrale è zero.

Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
20–02–2012 A.A. 2011/2012, Terzo scritto, compito B

Allegare tutti i conti ritenuti necessari. Risultati senza giustificazione non verranno presi in considerazione

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1), punti **(7.5)** Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x\tan y - y\tan x}{xy} & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$

i) Si trovi l'insieme dei punti in cui è continua e si scriva il risultato nello spazio sottostante. *Si evitino affermazioni non giustificate*

In questo caso avrei dovuto aggiungere $x, y \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$. Il calcolo procede esattamente come sopra ed anche il risultato è analogo in quanto $\tan t = t + o(t)$ esattamente come $\sin t = t + o(t)$. Dunque otteniamo che il limite è $\dfrac{\tan y_0}{y_0} - 1$, se il punto è $(0, y_0)$ mentre se il punto è $P \equiv (x_0, 0)$, otteniamo $\dfrac{-\tan x_0}{x_0} + 1$. In questo caso però la funzione è continua negli infiniti punti $(0, \alpha)$ o $(\alpha, 0)$ per i quali $\tan\alpha = \alpha$ (un grafico della situazione fa capire che ci sono infiniti punti che soddisfano la relazione).

Nell'origine è continua. D'ora in avanti assumiamo che $x, y \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$

ii) si calcolino le derivabile parziali e e le si scriva nello spazio sottostante

Fuori dagli assi le derivate sono $f_x = \dfrac{\sin(2x) - 2x}{2x^2\cos^2 x}$ $f_y = \dfrac{-\sin(2y) + 2y}{2y^2\cos^2 y}$

Sia $\underline{x}_0 = (0, y_0)$

$$f_x(\underline{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{t\tan y_0 - y_0\tan t}{ty_0} = \lim_{t\to 0} \frac{t\tan y_0 - y_0 t - y_0\frac{t^3}{3} + o(t^4)}{t^2 y_0}$$

e si vede che non esiste se $\tan y_0 \neq y_0$ mentre se $\tan y_0 = y_0$ abbiamo $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t - \tan t}{t^2} = 0$. Inoltre si ha $f_y(\underline{x}_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$

Sia $\underline{x}_0 = (x_0, 0)$

$$f_y(\underline{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{-t\tan x_0 + x_0\tan t}{tx_0} = \lim_{t\to 0} \frac{-t\tan x_0 + x_0 t + x_0\frac{t^3}{3} + o(t^4)}{t^2} = 0$$

se $\tan x_0 = x_0$ mentre non esiste se $\tan x_0 \neq x_0$. Inoltre $f_x(\underline{x}_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0$

$$f_x(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x) - 2x}{2x^2\cos^2 x} & x \neq 0, y \neq 0 \\ \nexists & x = 0, y \neq 0 \ \wedge \ \tan y \neq y \\ 0 & x = 0, y \neq 0 \ \wedge \ \tan y = y \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$f_y(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(2y)+2y}{2y^2\cos^2 y} & x\neq 0, y\neq 0 \\ \nexists & y=0, x\neq 0 \ \wedge\ \tan x \neq x \\ 0 & y=0, x\neq 0 \ \wedge\ \tan x = x \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Sia $A=\{x=0\}$ e $B=\{y=0\}$. Le derivate sono entrambe continue in $\mathbf{R}^2\backslash(A\cup B)\cup\{\underline{0}\}$ e quindi la funzione è ivi differenziabile. In $A\cup B\backslash\{\underline{0}\}$ la funzione non è differenziabile. Si osservi che non esiste il limite $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f_x(\underline{x})$ con $\underline{x}=(0,y_0)$ e $\tan y_0 = y_0$ né $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f_y(\underline{x})$ con $\underline{x}=(x_0,0)$ e $\tan x_0 = x_0$.

iii) si trovi l'insieme dei punti in cui la funzione è differenziabile e si scriva il risultato nello spazio sottostante

Si può fare il ragionamento di sopra oppure impostare direttamente la differenziabilità . In $\underline{x}_0$ con $x_0, y_0\neq 0$ abbiamo che le derivate sono rapporti di funzioni continue in cui il denominatore non si annulla e quindi sono esse stesse continue.

Sia ora $\underline{x}_0 = (x_0, 0)$ e $\tan x_0 = x_0$. Il limite da studiare è

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\frac{(x_0+h_1)\tan h_2 - h_2\tan(x_0+h_1)}{(x_0+h_1)h_2}$$

Scriviamo $\tan(x_0+h_1) = \tan x_0 + \dfrac{1}{\cos^2 x_0}h_1 + O(h_1^2)$ e $\tan h_2 = h_2 + \dfrac{1}{3}h_2^3 + o(h_2^4)$. Si dimostra facilmente che il limite non esiste. Infatti avremmo

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{x_0h_2 + \frac{h_2^3}{3}x_0 + x_0 o(h_2^4) + h_1h_2 + h_1\frac{h_2^3}{3} + h_1 o(h_2^4) - h_2\tan x_0 - \frac{h_1h_2}{\cos^2 x_0} + h_2 O(h_1^2)}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{h_1h_2(1-\frac{1}{\cos^2 x_0}) + \frac{h_2^3}{3}x_0 + x_0 o(h_2^4) + h_1\frac{h_2^3}{3} + h_1 o(h_2^4) + h_2 O(h_1^2)}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

e il limite non esiste a meno che $\cos x_0 = 1$ che insieme con $\tan x_0 = x_0$ da $x_0 = 0$. Infatti se $|h_1| < |x_0|$

$$\Big|\frac{x_0}{3}\frac{h_2^3}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big| \leq \frac{|x_0|}{3}\frac{|h_2|^3}{(|x_0|-|h_1|)h_2^2} \leq \frac{|x_0|}{3}\frac{|h_2|}{(|x_0|-|h_1|)}$$

$$\Big|\frac{x_0 o(h_2^4)}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big| \leq \frac{|x_0|\cdot|o(h_2^4)|}{h_2^2(|x_0|-|h_1|)} = \frac{|x_0|\cdot|o(h_2^2)|}{(|x_0|-|h_1|)}$$

$$\Big|\frac{h_1h_2^3}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big| \leq \Big|\frac{h_1h_2^3}{(|x_0|-|h_1|)h_2|h_1|}\Big| = \frac{h_2^2}{(|x_0|-|h_1|)}$$

$$\Big|\frac{h_1 o(h_2^4)}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big| \leq \Big|\frac{h_1 o(h_2^4)}{(|x_0|-|h_1|)h_2|h_1|}\Big| = \frac{|o(h_2^3)|}{(|x_0|-|h_1|)}$$

$$\Big|\frac{h_2 O(h_1^2)}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big| \leq \Big|\frac{h_2 O(h_1^2)}{(|x_0|-|h_1|)h_2|h_1|}\Big| = \frac{|O(h_1)|}{(|x_0|-|h_1|)}$$

D'altra parte

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0} \frac{h_1h_2(1-\frac{1}{\cos^2 x_0})}{(x_0+h_1)h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

non esiste. Basta mettersi sulle rette $y = ax$ per osservare che il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2(1-\frac{1}{\cos^2 x_0})}{(x_0+x)ax|x|\sqrt{1+a^2}}$$

non esiste.

La stessa cosa accade in $(0, y_0)$ e $\tan y_0 = y_0$. Nell'origine abbiamo

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{h_1\tan h_2 - h_2\tan h_1}{h_1h_2} = \lim_{\|\underline{h}\|\to 0} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{\frac{1}{3}(h_1h_2^3 - h_2h_1^3) + h_1 o(h_2^4) + h_2 o(h_1^4)}{h_1h_2} = 0$$

iv) Siano (α, β), $\alpha, \beta \neq 0$, $\alpha^2+\beta^2 = 1$, le componenti di un generico versore. Si dica che relazione deve intercorrere tra α e β affinché la derivata direzionale calcolata nell'origine sia nulla.

Essendo la funzione differenziabile nell'origine, si ha $\partial_{(\alpha,\beta),} f(\underline{0}) = \underline{\partial} f(\underline{0}) \cdot (\alpha, \beta) = 0$ essendo nullo il gradiente nell'origine.

Volendo fare la derivata si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{3} \frac{t^4(-\beta\alpha^3 + \alpha\beta^3)}{t^3\alpha\beta} = 0$$

Sbagliare una delle derivate richieste al punto ii)**, comporta l'annullamento del compito**

2), punti **(5.5)** Si calcoli il volume della porzione finita di spazio compresa fra i due paraboloidi $z = x^2+y^2+xy$ e $z = x^4+y^4$ *che si proietta sul piano* (x, y) *all'interno del cerchio* $x^2+y^2 \leq r^2$. con $0 < r^2 < r_0^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Si scriva la risposta nello spazio sottostante. Lo studente/ssa non si preocccupi del valore di r_0^2 ma si concentri solo su r^2.

L'integrale è semplicemente

$$\int\int_{x^2+y^2\leq r^2} (x^2+y^2+xy-x^4-y^4)dxdy =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\rho(\rho^2+\rho^2\frac{1}{2}\sin(2t) - r^2\rho^4\cos^4 t - r^2\rho^4\sin^4 t)d\rho = \frac{\pi r^4}{2}(1-\frac{r^2}{2})$$

3), punti **(5.5)** Si consideri l'intersezione dei due parabolidi $z = x^2+y^2+xy$ e $z = x^4+y^4+\frac{1}{4}$. Si dimostri che il punto di coordinate $(0, -1/\sqrt{2})$ è un punto critico non singolare per l'intersezione e se ne stabilisca la natura. È un problema di "funzione implicita". Si scriva il risultato nello spazio sottostante

Si veda il compito A. I calcoli sono gli stessi con le dovute piccole differenze.

4), punti **(5.5)** Si calcoli $\displaystyle\int_\varphi \omega$ dove $\omega = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)} + \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)} +$ $(3x+2y)dz$; φ è la curva data da $\{z = x^2+y^2\} \cap \{z = 2x+2y+1\}$ e percorsa in modo tale che la sua proiezione sul piano (x,y) sia a sua volta percorsa in senso antiorario.

La parte in dx e dy è come il precedente esercizio. Per la restante osserviamo che $(3x+2y)dz = 2(x+y)d(2x+2y+1) + xd(2x+2y+1) = 2d((x+y)^2) + d(x^2) + 2xdy$ e l'unico integrale da calcolare è $2\oint_\gamma xdy = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 2\pi$.

5), punti **(4)** Sia data la SERIE di funzioni: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} e^{-\frac{x^3}{n^s}}$. 1) Si trovi l'insieme per cui la serie converge puntualmente. Al variare di s, l'insieme può cambiare 2) Si trovino i valori di s per cui la convergenza è uniforme e quelli per cui la convergenza non è uniforme. Si scriva ordinatamente il risultato nello spazio sottostante nel seguente modo: per la risposta alla domanda 1), accanto ai valori di s si indichi l'insieme di convergenza puntuale; per la risposta alla domanda 2), accanto ai valori di s si dica se la convergenza è uniforme o no

Da completare (simile ad A ma con qualche differenza)

6) , punti **(7)** Si calcoli l'integrale $\int_{\gamma^+} dz \frac{z^2}{\tan^2 z(1-\cos z)}$ dove γ è la circonferenza di raggio 5 e centro l'origine. Si scriva il risultato nello spazio sottostante

Come l'esercizio A in quanto $\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + O(z^5)$ ed a parte i coefficienti, i residui sono nulli.