Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
17–02–2012 A.A. 2011/2012, Secondo scritto, compito A

Allegare tutti i conti ritenuti necessari. Risultati senza giustificazione non verranno presi in considerazione

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1), punti **(7.5)** Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x(\sin(x+y)-(x+y))}{x^2+2y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

i) Si trovi l'insieme dei punti in cui è continua e si scriva il risultato nello spazio sottostante. Suggerimento. *Si usi la formula di Taylor di* $\sin z$ *per* $z \to 0$. *Vengono fuori quattro termini da analizzare in dettaglio. Si evitino affermazioni non giustificate*

ii) si calcolino le derivabile parzialie e le si scriva nello spazio sottostante

iii) si trovi l'insieme dei punti in cui la funzione è differenziabile e si scriva il risultato nello spazio sottostante

iv) la derivata direzionale nella direzione $(1,-1)$ e calcolata nell'origine e si scriva nello spazio sottostante il risultato

Sbagliare una delle derivate richieste al punto ii)**, comporta l'annullamento del compito**

2), punti **(5.5)** Sia data la seguente funzione $f(x,y) = x+y \doteq z$ soggetta al vincolo $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura. Si scriva la risposta nello spazio sottostante. È un problema di estremi vincolati

3), punti **(5.5)** Si calcoli il volume del solido S definito da $S = \{(\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \le y,\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$. Si scriva il risultato nello spazio sottostante. Suggerimento: si usino coordinate polari *centrate nell'origine* e si faccia attenzione agli estremi di variabilità dell'angolo

4), punti **(5.5)** Sia γ la curva intersezione delle due superfici nell'esercizio precedente. 1) Si dimostri che γ è una curva chiusa. 2) Si calcoli $\displaystyle\oint_\gamma \omega$ dove $\omega = \dfrac{-(y-\frac{1}{2})dx + xdy}{x^2+(y-\frac{1}{2})^2} + ydz \doteq \omega_1 + \omega_2$. Si scriva il risultato nello spazio sottostante. La curva γ passa per l'origine ma non ci si preoccupi del fatto che la prima parte della forma differenziale non è definita nell'origine Avvertimento: Servono pochissimi calcoli

5) , punti **(3.5)** Sia data la successione di funzioni: $f_n(x) = \dfrac{x}{n} e^{-\frac{x^2}{n^s}}$. Si trovino i valori di s per cui la convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$ e si scriva il risultato nello spazio sottostante

6) , punti **(7.5)** Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint \frac{Rez}{z(z-2)} dz$ esteso al cerchio di raggio 1 e centro l'origine e percorso in senso antiorario. Si scriva il risultato nello spazio sottostante

Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
17–02–2012 A.A. 2011/2012, Secondo scritto, compito B

Allegare tutti i conti ritenuti necessari. Risultati senza giustificazione non verranno presi in considerazione

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1), punti **(7.5)** Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y(\sin(x-y)-(x-y))}{y^2+2y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

i) Si trovi l'insieme dei punti in cui è continua e si scriva il risultato nello spazio sottostante. Suggerimento. *Si usi la formula di Taylor di* $\sin z$ *per* $z \to 0$. *Vengono fuori quattro termini da analizzare in dettaglio. Si evitino affermazioni non giustificate*

ii) si calcolino le derivabile parzialie e le si scriva nello spazio sottostante

iii) si trovi l'insieme dei punti in cui la funzione è differenziabile e si scriva il risultato nello spazio sottostante

iv) la derivata direzionale nella direzione $(1,1)$ e calcolata nell'origine e si scriva nello spazio sottostante il risultato

Sbagliare una delle derivate richieste al punto ii)**, comporta l'annullamento del compito**

2), punti **(5.5)** Sia data la seguente funzione $f(x,y) = x-y \doteq z$ soggetta al vincolo $\dfrac{x^2}{4}+y^2 = 1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura. Si scriva la risposta nello spazio sottostante. È un problema di estremi vincolati

3), punti **(5.5)** Si calcoli il volume del solido S definito da $S = \{(\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}x,\ 0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\}$. Si scriva il risultato nello spazio sottostante. Suggerimento: si usino coordinate polari *centrate nell'origine* e si faccia attenzione agli estremi di variabilità dell'angolo

4), punti **(5.5)** Sia γ la curva intersezione delle due superfici nell'esercizio precedente. 1) Si dimostri che γ è una curva chiusa. 2) Si calcoli $\oint_\gamma \omega$ dove dove $\omega = \dfrac{(x-\frac{1}{4})dy - ydx}{y^2+(x-\frac{1}{4})^2} + xdz \doteq \omega_1 + \omega_2$. Si scriva il risultato nello spazio sottostante. La curva γ passa per l'origine ma non ci si preoccupi del fatto che la prima parte della forma differenziale non è definita nell'origine Avvertimento: Servono pochissimi calcoli

5), punti **(4.5)** Sia data la successione di funzioni: $f_n(x) = \dfrac{x}{n}e^{-\frac{x^3}{n^s}}$. Si trovino i valori di s per cui la convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$ e si scriva il risultato nello spazio sottostante

6), punti **(7.5)** Si calcoli l'integrale $\oint \dfrac{Imz}{z(z-2)}dz$ esteso al cerchio di raggio 1 e centro l'origine e percorso in senso antiorario. Si scriva il risultato nello spazio sottostante

Soluzioni

Problema 1, compito A

Chiaramente in $\underline{x} \neq \underline{0}$ la funzione è differenziabile. L'unico punto dove bisogna guardare è l'origine

i) $\sin(x+y)-(x+y)=\dfrac{1}{6}(x+y)^3+o((x+y)^2)$ da cui

$$\frac{x(\sin(x+y)-(x+y))}{x^2+2y^4}=\frac{1}{6}\frac{x(x^3+y^3+3x^2y+3xy^2)}{x^2+2y^4}+\frac{o((x+y)^3)}{x^2+2y^4}$$

Mettiamo i moduli dappertutto in quanto pensiamo che il limite esista e sia zero.

$$\frac{x^4}{x^2+2y^4}\leq\frac{x^4}{x^2}=x^2,\quad \left|\frac{xy^3}{x^2+2y^4}\right|\leq\frac{|x|\cdot|y|^3}{2|x|y^2}=|y|,\quad \frac{|x|^3\cdot|y|}{x^2+2y^4}\leq\frac{|x|^3\cdot|y|}{x^2}=|xy|$$

$$\frac{|xy|^2}{x^2+2y^4}\leq|y|^2$$

Il secondo termine è il più difficile. A denominatore ho applicato la maggiorazione fra media aritmetica e geometrica ossia $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ per $a,b\geq 0$ che può trovarsi a pag. 3 del file denominato "Mteriale non presente". Nel caso di due varabiili si può dimostrare ricorrendo a $(a-b)^2\geq 0$. Chiaramente il termine con $o((x+y)^3)$ a numeratore tende a zero a fortiori.

ii) Le derivate fuori dall'origine non presentano nessun problema. Si tratta di applicare le note formule

Nell'origne abbiamo $f_x(\underline{0})=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t(\sin t-t)}{t^2}=0$

$f_y(\underline{0})=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0\cdot(\sin t-t)}{t^2}=0$

iii) Differenziabilità nell'origine

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{f(\underline{0}+\underline{h})-f(\underline{0})}{\|\underline{h}\|}=\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{h_1(\sin(h_1+h_2)-(h_1+h_2))}{(h_1^2+2h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Come prima abbiamo

$$\frac{\frac{1}{6}h_1(h_1+h_2)^3+h_1o((h_1+h_2)^3)}{(h_1^2+2h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

e poi prendiamo $h_2=a\sqrt{h_1}$ $(h_1>0)$ da cui

$$\frac{1}{6}\frac{h_1(h_1+a\sqrt{h_1})^3}{h_1^2(1+2a^4)\sqrt{h_1^2+a^2h_1}}+\frac{h_1o((h_1+a\sqrt{h_1})^3)}{h_1^2(1+2a^4)\sqrt{h_1^2+a^2h_1}}\sim\frac{1}{6}\frac{a^3}{(1+2a^4)|a|}+o(1)$$

Scivere solo $\dfrac{1}{6}\dfrac{a^3}{(1+2a^4)|a|}$ è un errore in quanto dobbiamo essere sicuri che il termine successivo non cambi la situazione.

iv) $\underline{\partial}_v f(\underline{0})=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}(f(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\dfrac{-t}{\sqrt{2}})-f(\underline{0}))=0$ evidentemente.

Problema 1, compito B

A causa di un errore di battitura è venuto fuori l'esercizio in questione anziché lo stesso esercizio con a denominatore $y^2 + 2x^4$. La funzione non era definita in quanto non era definita la parte superiore per $y = 0$. La risposta quindi è che non era continua, né derivabile, né differenziabile in ogni punto con $y = 0$. Negli altri punti è differenziabile. La derivata direzionale vale zero.

Problema 2, compito A

$F(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1) \doteq f(x, y) - \lambda g(x, y)$

$F_x = 1 - 2\lambda x = 0, \quad F_y = 1 - \lambda\dfrac{y}{2} = 0, \quad F_\lambda = -x^2 - \dfrac{y^2}{4} + 1 = 0$ da cui $1 = \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2}$ e quindi $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. A λ_+ corrisponde il punto $(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}})$ mentre a λ_- corrisponde $(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{-4}{\sqrt{5}})$. Abbiamo $f(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$ mentre $f(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5}$. Per stabilire che il primo è il massimo assoluto e il secondo il minimo esistono due strade.

La prima è il teorema non dimostrato e presente sulle note denominate "materiale non presente". Dobbiamo considerare la forma quadratica

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix}$$

ristretta ai vettori tangenziali al vincolo $g(x, y) = 0$ ossia a quei vettori (h_1, h_2) ortogonali al gradiente del vincolo $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Dunque si ha $(\underline{\partial} g(\underline{x}_0), \underline{h}) = 0$ ossia $2xh_1 + \dfrac{y}{2}h_2 = 0$. La matrice hessiana è

$$(\underline{h}, (f_{\underline{xx}} - \lambda g_{\underline{xx}})\underline{h}) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -2\lambda h_1^2 - \frac{\lambda}{2}h_2^2$$

e si vede che nel primo punto la forma quadratica è negativa nel primo punto (massimo, autovalori nagativi)) mentre è positiva (minimo, autovalori positivi) nel secondo *qualunque sia* (h_1, h_2).

Il secondo modo fa uso del Teorema di Weierstrass secondo cui una funzione continua su di un compatto ammette massimo e minimo. Nel nostro caso la funzione è $f(x, y)$ menre l'insieme compatto è $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\}$ che è una ellisse e quindi un insieme chiuso e limitato (compatto). Quindi il massimo e il minimo di $f(x, y) = x + y$ sul vincolo esistono. Essendo tutte le funzioni differenziabili, nei punti di massimo e minimo deve essere pari a zero il gradiente della funzione $F(x, y, \lambda)$ e quindi la conclusione che, come si vede, non necessita di calcolo alcuno.

Problema 2, compito B

$F(x, y, \lambda) = x - y - \lambda(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1) \doteq f(x, y) - \lambda g(x, y)$

$F_x = 1 - 2\lambda x = 0, \quad F_y = -1 - \lambda\dfrac{y}{2} = 0, \quad F_\lambda = -x^2 - \dfrac{y^2}{4} + 1 = 0$ da cui $1 = \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2}$ e quindi $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. A λ_+ corrisponde il punto $(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{-4}{\sqrt{5}})$ mentre a λ_- corrisponde $(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}})$. Abbiamo $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$ mentre $f(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5}$. Da qui in poi è come il compito A.

Problema 3, compito A Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int\int_{x^2+(y-\frac{1}{2})^2\leq\frac{1}{4}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Passiamo a coordinate polari *centrate nell'origine* $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$ da cui $x^2+y^2-y=0$ equivale a $\rho^2=\rho\sin t$ e quindi $\rho=\sin t$. L'integrale diventa

$$\int_0^\pi dt\int_0^{\sin t}\rho^2 d\rho=\int_0^\pi \frac{1}{3}\sin^3 t=\frac{1}{3}\int_0^\pi \sin t(1-\cos^2 t)dt=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\cos^3 t\Big|_0^\pi=\frac{4}{9}$$

Se si fossero scelte coordinate centrate in $(0,\frac{1}{2})$ si sarebbe ottenuto

$$\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1}{4}+\rho^2+\rho\sin t d\rho}$$

certamente un integrale poco "rassicurante".

• Se si integrasse fino a 2π si otterrebbe zero e ciò è assurdo.

• Si poteva pure parametrizzare direttamente il volume con $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, $z=u$, $0\leq\vartheta\leq\pi$, $0\leq\rho\leq\sin\vartheta$, $0\leq u\leq\sqrt{x^2+y^2}=\rho$ ed il volume diventa (lo Jacobiano è ρ)

$$\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{\sin\vartheta}d\rho\int_0^\rho du\rho=\frac{4}{9}$$

Problema 3, compito B Dobbiamo calcolare l'integrale

$$2\int\int_{(x-\frac{1}{4})^2+y^2\leq\frac{1}{16}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

Passiamo a coordinate polari *centrate nell'origine* $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$ da cui $x^2+y^2-\frac{1}{2}x=0$ equivale a $\rho^2=\frac{1}{2}\rho\cos t$ e quindi $\rho=\frac{1}{2}\cos t$. L'integrale diventa

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^{\frac{1}{2}\cos t,}\rho^2 d\rho=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt\frac{1}{24}\cos^3 t=\frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt\cos t(1-\sin^2 t)dt=2\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{9}$$

Se si fossero scelte coordinate centrate in $(\frac{1}{4},0)$ l'integrale sarebbe stato brutto come il precedente

• Come prima si poteva fare $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, $z=u$, $-\frac{\pi}{2}\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\rho\leq\frac{1}{2}\cos\vartheta$, $0\leq u\leq 2\sqrt{x^2+y^2}=\rho$ ed il volume diventa (lo Jacobiano è ρ)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^{\frac{1}{2}\cos\vartheta}d\rho\int_0^{2\rho}du\rho=\frac{1}{9}$$

L'esercizio a pag.239 del libro di testo, anche se con un errore evidente, aiuta non poco a capire l'impostazione del calcolo.

Problema 4, compito A L'integrale $\oint_{\underline{\gamma}} \omega_1 = \oint_{\underline{\gamma}_1} \frac{-(y-\frac{1}{2})dx + xdy}{x^2+(y-\frac{1}{2})^2}$ riguarda la proiezione della curva sul piano (x,y) il cui sostegno è $x^2+y^2=y$ che gira intorno al punto $(0,-1/2)$. La forma è chiusa e per il Lemma di Gauss-Green l'integrale è lo stesso che otterremmo se l'integrale fosse eseguito lungo la curva $x^2+(y-1/2)^2=1/16$. Quindi parametrizzando come $x=(\cos t)/4$, $y=1/2+(\sin t)/4$, $0\le t\le 2\pi$ si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{\cos t}{4}\frac{\cos t}{4} - (1/2+\frac{\sin t}{4})(-\frac{\sin t}{4})}{\frac{1}{16}} dt = 2\pi$$

Inoltre da $x^2+y^2=z^2$ e $x^2+y^2=y$ segue $z^2=y$ e quindi $ydz=z^2dz$ ed essendo la curva chiusa si ha $\oint_\gamma ydz = 0$

Problema 4, compito B La soluzione è del tutto analoga alla precedente e il risultato è lo stesso.

Problema 5, compito A La successione converge puntualmente a zero. Converge uniformemente se e solo se

$$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon:\ n>n_\varepsilon \implies \sup_{x\in\mathbf{R}} f_n(x) < \varepsilon$$

Per il sup deriviamo e troviamo il massimo che vale $\xi_n \doteq \sqrt{\frac{n^s}{2}}$ e quindi $f_n(\xi_n) = \frac{n^{\frac{s-2}{2}}}{\sqrt{2}}e^{-2}$ che tende a zero se e solo se $s<2$ per cui la convergenza è uniforme in $\mathbf{R}$ se e solo se $s<2$.

Problema 5, compito B Stavolta il massimo di $f_n(x)$ lo si ha per $\sqrt[3]{\frac{n^s}{3}}$ e vale $f_n(\xi_n) = \frac{n^{\frac{s-3}{3}}}{3^{1/3}}e^{-3}$ e quindi la convergenza è uniforme se e solo se $s<3$.

Anche se non era richiesto, la convergenza è puntuale per ogni valore di s e fissato N, è uniforme in $[-N,N]$ per ogni valore di s in entrambe gli esercizi

Problema 6, compito A

L'integrale è $\int_0^{2\pi} ie^{it}\frac{\cos t}{e^{it}(e^{it}-2)}dt = \int_0^{2\pi} ie^{it}\frac{1}{e^{it}(e^{it}-2)}\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})dt$ ora poniamo $e^{it}=w$ da cui

$$\oint_{|w|=1} \frac{1}{2}\frac{w^2+1}{w^2(w-2)} \doteq \oint_{|w|=1} f(w)dw = 2\pi i Resf(0) = \pi i \lim_{w\to 0}\frac{d}{dw}\frac{w^2+1}{w-2} = \frac{-\pi i}{4}$$

Problema 6, compito B

L'integrale è $\int_0^{2\pi} ie^{it}\frac{\sin t}{e^{it}(e^{it}-2)}dt = \int_0^{2\pi} ie^{it}\frac{1}{e^{it}(e^{it}-2)}\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})dt$ ora poniamo $e^{it}=w$ da cui

$$\frac{1}{i}\oint_{|w|=1} \frac{1}{2}\frac{w^2-1}{w^2(w-2)} \doteq \oint_{|w|=1} f(w)dw = 2\pi i Resf(0) = \pi \lim_{w\to 0}\frac{d}{dw}\frac{w^2-1}{w-2} = \frac{\pi}{4}$$