Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
09–07–2012 A.A. 2011/2012, Sessione estiva, Primo scritto valido per l'orale

Allegare tutti i conti ritenuti necessari. Risultati senza giustificazione non verranno presi in considerazione. Gli esercizi valgono: primo e secondo 8 punti; terzo e quarto 7 punti; quinto 5 punti

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Si dimostri il seguente Lemma

Lemma *Sia D un dominio normale rispetto allasse x. Per ogni $\delta > 0$ esiste una partizione di D in domini normali rispetto all'asse x con la proprietà che il diametro di ogni dominio della partizione è minore di δ.*

2) Si dimostri il TEOREMA DEL DINI

Teorema *Sia $f(x, y)$ una funzione di classe C^1 in un aperto $A \subset \mathbf{R}^2$. Se (x_0, y_0) è un punto di A nel quale risulta*

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \text{e} \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono numeri positivi δ e σ tali che l'equazione

$$F(x, y) = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione

$$f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$$

cioè una funzione tale che

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

e per cui risulta $f(x_0) = y_0$. Inoltre f è derivabile nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e si ha

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

3) Si calcoli $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z^6 + 4}{z^4(z^2 - z(1+i) + i)} dz$ dove $\gamma = \{|z| = 1/2\}$ e percorsa in senso antiorario. Si portino i calcoli il più avanti possibile.

4) Al variare di ω nei reali, si risolva la equazione differenziale $x''(t) + \omega^2 x(t) = \delta(t - T) \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

5) Si dimostri che la funzione $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x$ è la parte reale di infinite funzioni complesse $f(z)$ definite su tutto il piano complesso. Delle infinite funzioni dette prima si trovi quella che in $z = 1$ vale i.