Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
09–02–2012 A.A. 2011/2012, Primo scritto, compito A

3 ore, 5 punti per ogni domanda tranne la numero due che vale 7

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2y^3}{x^2+y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ Si trovino i punti in cui è : i) continua, ii) derivabile e si calcolino le derivare parziali, iii) Si trovino i punti in cui la funzione è differenziabile, iv) la derivata direzionale calcolata in $(0,0)$ e nella direzione $(1,1)$. Si svolgano tutti i calcoli necessari che vanno allegati al compito. **Sbagliare una delle derivate richieste al punto** ii)**, comporta l'annullamento del compito**

2) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = -x^3 + y^2 + xy - y$. Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

• Si trovino massimo e minimo assoluti della precedente funzione ristretta al triangolo di vertici $(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,2)$ (bordo compreso)

3) Si calcoli l'area della superficie definita dalle condizioni: $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ e $z^2 \leq 4x^2 + \dfrac{y^2}{4}$

4) Sia dato il campo vettoriale in $\mathbf{R}^3$, $\underline{F}(\underline{x}) = (4x^2+y^2-4)\underline{i} + \sqrt{4x^2 + \dfrac{y^2}{4}}\,\underline{j} + e^{xy}\underline{k}$. Se ne calcoli il flusso attraverso la superficie definita nel precedente esercizio.

5) Siano date le seguenti successioni di funzioni: $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $g_n(x) = xe^{-n+x^2}$. i) Si dimostri che convergono puntualmente in $\mathbf{R}$, ii) Si dica se la convergenza è uniforme in $[-N,N]$ con N intero positivo arbitrario. iii) si dica se la convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$

6) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint \frac{Rez}{1+z^2}dz$ esteso al segmento di estremi $-2-2i$ e $2+2i$ ed alla semicirconferenza di raggio $2\sqrt{2}$ e centrata nell'origine che collega i precedenti punti. Il cammino è percorso in senso antiorario.

Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
09–02–2012 A.A. 2011/2012, Primo scritto, compito B

3 ore, 5 punti per ogni domanda tranne la numero 2 che vale 7

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2y^4}{x^2+y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ Si trovino i punti in cui è : i) continua, ii) derivabile e si calcolino le derivare parziali, iii) Si trovino i punti in cui la funzione è differenziabile, iv) la derivata direzionale calcolata in $(0,0)$ e nella nella direzione $(1,1)$. Si svolgano tutti i calcoli necessari che vanno allegati al compito. **Sbagliare una delle derivate richieste al punto** ii)**, comporta l'annullamento del compito**

2) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = -2x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy - y$. Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura
• Si trovino massimo e minimo assoluti della precedente funzione ristretta al triangolo di vertici $(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,2)$ (bordo compreso)

3) Si calcoli l'area della superficie definita dalle condizioni: $x^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$ e $y^2 \leq 9x^2 + \dfrac{z^2}{9}$

4) Sia dato il campo vettoriale in $\mathbf{R}^3$, $\underline{F}(\underline{x}) = (9x^2+z^2-9)\underline{i} + \sqrt{9x^2+\dfrac{z^2}{9}}\,\underline{j} + e^{xyz}\underline{k}$. Se ne calcoli il flusso attraverso la superficie definita nel precedente esercizio.

5) Siano date le seguenti successioni di funzioni: $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ $\quad g_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{n^3+|x|^2}$. i) Si dimostri che convergono puntualmente in $\mathbf{R}$, ii) Si dica se la convergenza è uniforme in $[-N,N]$ con N intero positivo arbitrario. iii) si dica se la convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$

6) Si calcoli l'integrale $\oint \dfrac{Imz}{1+z^2}dz$ esteso al segmento di estremi $-2-2i$ e $2+2i$ ed alla semicirconferenza di raggio $2\sqrt{2}$ e centrata nell'origine che collega i precedenti punti. Il cammino è percorso in senso antiorario.

Soluzioni

Problema 1

Compito A. Continuità .

$(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Si tratta del rapporto di due polinomi in cui il denominatore non si annulla. Da ciò segue la differenziabilità e quindi la cointinuità insieme con la derivabilità .

$(x_0, y_0) = (0,0)$. Se si pone $y = x$ si ottiene $\dfrac{5x^3}{x^2 + x^4}$ ed il limite sulla restrizione $f(x,x)$ è zero. Quindi, se si immagina che il limite della funzione di due variabili debba esistere, esso è zero. Se però ci si mette sulla restrizione $y = \sqrt{x}$ si ottiene

$$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^3 + x^{3/2}}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{\sqrt{x}})$$

il cui limite per $x \to 0^+$ è $+\infty$

Errori più o meno significativi.

Primo errore. Si passa a coordinate polari in

$$0 < \frac{|x^3 + 2y^3|}{x^2 + y^4} \leq 2\frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^4}$$

e si ottiene

$$2\frac{|\rho^3(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta)|}{\rho^2(\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^4\vartheta)} = 2\frac{|\rho(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta)|}{\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^4\vartheta}$$

e si conclude che, essendo a numeratore presente ρ, il limite è zero. Ciò è inesatto in quanto bisogna liberarsi della presenza di ϑ sia a numeratore che a denominatore.

È un errore anche se si scrive

$$\frac{|\rho(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta)|}{\cos^2\vartheta + \sin^4\vartheta} \leq \frac{2\rho}{\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^4\vartheta}$$

e si conclude che il limite è zero. Alcuni hanno "osservato" che per ρ che tende a zero, a denominatore rimane $\cos^2\vartheta$ e a numeratore ρ da cui il limite zero. Riflettendo sulla definizione di limite si capisce dove sta l'errore.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\colon\ \|\underline{x}\| < \delta_\varepsilon \implies |f(\underline{x}) - f(\underline{0})| < \varepsilon$$

Ora $\|\underline{x}\| < \delta_\varepsilon$ è la sfera di centro l'origine e raggio δ_ε. Nella espressione

$$\frac{2\rho}{\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^4\vartheta}$$

si prenda ρ piccolo quanto si vuole, ma poi si prenda una successione ϑ_k che tende a $\pi/2$ abbastanza velocemente. È evidente che il precedente rapporto non sarà mai piccolo quanto una quantità fissata piccola a piacere. Se si vuole un esempio concreto si prenda ρ piccolo e poi si osservi che $\cos\vartheta = \sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta)$ da cui $\cos^2\vartheta \leq \left(\dfrac{\pi}{2} - \vartheta\right)^2$ e prendiamo $\vartheta = \vartheta_0 \doteq \dfrac{\pi}{2} - \rho$. Inoltre si ha $\sin\vartheta_0 \leq 1$. In questo modo minoriamo

$$\frac{2\rho}{\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^4\vartheta} \geq \frac{2\rho}{\rho^2 + \rho^2}$$

che non è piccolo se ρ è piccolo.

• Secondo errore. Alcuni hanno scritto $y = mx$ e poi hanno verificato che $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx) = 0$ per ogni valore di m concludendo che siccome il valore der limite, zero, non dipende da m, la funzione di due variabili ammette limite e vale zero pure per essa. Lo/a studente/ssa cerchi di spiegare a se stesso/a perché il limite nell'origine della funzione che segue smentisce tale asserzione

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \geq x^2 \\ 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ad ogni modo chi si fosse degnato/a di leggere il file denominato "Materiale non presente", avrebbe trovato tutti gli elementi per non sbagliare in particolare in relazione a quest'ultimo possibile errore.

Continuità - Compito B

Essendo

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x, \sqrt{x}) = \frac{1}{2}$$

anche in questo caso il limite non esiste.

Uno studente ha scritto

$\left|\dfrac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^4}\right| \leq \left|\dfrac{x^4 + 2y^4}{x^2 + y^2}\right|$ che presuppone $y^4 \geq y^2$ ma ciò è vero se $|y| \geq 1$ mentre nel nostro caso $y \to 0$.

Derivabilità - Compito A. Per quanto detto prima ci preoccupiamo solo dell'origine.

$$f_x(\underline{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(\underline{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$f_y(\underline{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(\underline{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3}{h^5} = +\infty$$

Al di fuori dell'origine

$$f_x = \frac{x(x^3 + 3xy^3 - 4y^4)}{(x^2 + y^3)^2} \qquad f_y = \frac{y^2(8yx^2 + 2y^4 - 3x^3)}{(x^2 + y^3)^2}$$

Domanda a bruciapelo: sono continue le derivate nell'origine? Evidentemente no ma si dimostri che non esiste neppure il limite $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f_y(\underline{x})$. Fuori dall'origine sono continue

Derivabilità - Compito B. Per quanto detto prima ci preoccupiamo solo dell'origine.

$$f_x(\underline{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(\underline{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$f_y(\underline{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(\underline{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^4}{h^5} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$$

ed il limite non esiste.

Al di fuori dell'origine

$$f_x = \frac{x(x^3 + 3xy^4 - 4y^4)}{(x^2 + y^4)^2} \qquad f_y = \frac{-4y^3x^2(-2 + x)}{(x^2 + y^4)^2}$$

Domanda a bruciapelo: sono continue le derivate nell'origine? Evidentemente no ma si dimostri che non esiste neppure il limite $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f_y(\underline{x})$. Fuori dall'origine sono continue

Derivata direzionale. Compito A.

Bisogna calcolare

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t/\sqrt{2},t/\sqrt{2})-f(\underline{0})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{3t^3}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Derivata direzionale. Compito B.

Bisogna calcolare

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t/\sqrt{2},t/\sqrt{2})-f(\underline{0})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}}+\frac{t^4}{4}}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e in nessuno dei due casi vale la formula $\underline{\partial} f(\underline{0})\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}})$ dal momento che la seconda componente del gradiente nell'origine vale $+\infty$ oppure non esiste.

Differenziabilità . Compito A Fuori dall'origine sono differenziabili in quanto ivi le derivate parziali sono continue. Nell'origine non è differenziabile in quanto non esiste (nel senso che non è finita) $f_y(\underline{0})$ e quindi non si può impostare il limite

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{f(\underline{h})-f(\underline{0})-\underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h}}{\|\underline{h}\|}$$

Differenziabilità . Compito B. Non esistendo $f_y(\underline{0})$ certamente non è differenziabile.

Problema 2. Compito A

È un esercizio standard. I punti critici sono $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ e sono rispettivamente una sella ed un minimo. $f(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})=-\frac{7}{16}$

• Seconda domanda. Bisogna studiare i tre casi: 1) $f(-2,y)$, $-2\le y\le 2$, $\quad f(x,2)$, $-2\le x\le 2$, 3) $f(x,x)$, $-2\le x\le 2$.

1) $f(-2,y)\doteq g(y)=8+y^2-3y$ che ha un minimo locale in $y=3/2$ e $g(\frac{3}{2})=\frac{23}{4}$. Inoltre si ha $g(2)=6$, $g(-2)=18$.

2) $f(x,2)\doteq g(x)=-x^3+2x+2$ che ha un minimo locale in $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ed un massimo locale in $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $g(-\sqrt{\frac{2}{3}})=2-\frac{\sqrt{6}}{4}$, $g(\sqrt{\frac{2}{3}})=2+\frac{\sqrt{6}}{4}$,. Inoltre si ha $g(2)=-2$, $g(-2)=6$.

3) $f(x,x)\doteq g(x)=-x^3+2x^2-x$ che ha un minimo locale in $x=1/3$, ed un massimo locale in $x=1$. $g(\frac{1}{3})=-\frac{4}{27}$ e $g(1)=0$. Inoltre si ha $g(-2)=18$, $g(2)=-2$

Se ne conclude che il minimo è -2 ed il massimo è 18. Inoltre si può notare che nessuno dei due estremi corrisponde a punti in cui la funzione di due variabili assume un estremo. Per evidenziare ciò scriviamo $f(-2+\xi,-2+\eta)=18-14\xi+6\xi^2-\xi^3-7\eta+\eta^2+\xi\eta$. Poi prendiamo $\eta=0$ e facciamo variare ξ per valori sia positivi che negativi ma piccoli abbastanza da far si che il segno di $-14\xi+6\xi^2-\xi^3$ sia lo stesso di -14ξ. Le ordinate passano da valori più grandi di 18 a valori più piccoli.

Per quanto riguarda il massimo assoluto abbiamo $f(2+\xi,2+\eta)=-2-10\xi-6\xi^2-\xi^3+5\eta+\eta^2+\xi\eta$ e valgono considerazioni analoghe.

Problema 2. Compito B

È un esercizio standard. I punti critici sono $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ e $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ e sono rispettivamente una sella ed un minimo. $f(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=-\frac{8}{27}$, $f(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})=-\frac{7}{8}$

• Seconda domanda. Bisogna studiare i tre casi: 1) $f(-2,y)$, $-2\le y\le 2$, $f(x,2)$, $-2\le x\le 2$, 3) $f(x,x)$, $-2\le x\le 2$.

1) $f(-2,y)\doteq g(y)=16+\frac{1}{2}y^2-3y$ che ha un minimo locale in $y=3$ e $g(3)=\dfrac{23}{2}$. Inoltre si ha $g(2)=8$, $g(-2)=24$.

2) $f(x,2)\doteq g(x)=-2x^3+2x$ che ha un minimo locale in $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ed un massimo locale in $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, e $g(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})=-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$, $g(\dfrac{1}{\sqrt{3}})=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$. Inoltre si ha $g(2)=0$, $g(-2)=16$.

3) $f(x,x)\doteq g(x)=-2y^3+\frac{3}{2}y^2-y$ che è sempre decrescente. Inoltre si ha $g(-2)=24$, $g(2)=-12$

Ne concludiamo che -12 è il minimo assoluto e 24 è il massimo assoluto.

$f(-2+\xi,-2+\eta)=24-26\xi+12\xi^2-2\xi^3-5\eta+\frac{1}{2}\eta^2+\xi\eta$ e si può notare come $(-2,-2)$ non sia un massimo assoluto.

$f(2+\xi,2+\eta)=-12-22\xi-12\xi^2-2\xi^3+3\eta+\frac{1}{2}\eta^2+\xi\eta$ e si può notare come $(2,2)$ non sia un minimo assoluto.

Problema 3 - Compito A

La superficie è cilindrica parallela all'asse z con ma con base ellittica . La parametrizzazione è $x=\cos\vartheta$, $y=2\sin\vartheta$, $z=u$ con $0\le\vartheta\le 2\pi$, $-u_0\doteq-\sqrt{4x^2+\dfrac{y^2}{4}}=-\sqrt{4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\le u\le\sqrt{4x^2+\dfrac{y^2}{4}}=\sqrt{4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\doteq u_0$. La normale esterna alla superficie è $\underline{n}_e=2\cos\vartheta\underline{i}+\sin\vartheta\underline{j}$ e quindi l'area della superficie è

$$\int_0^{2\pi}\int_{-u_0}^{u_0}\sqrt{4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\,du\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}2\sqrt{4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\sqrt{4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\,d\vartheta=10\pi$$

Problema 3 - Compito B

La superficie è cilindrica paralella all'asse y con ma con base ellittica. La parametrizzazione è $x=\cos\vartheta$, $z=3\sin\vartheta$, $y=u$ con $0\le\vartheta\le 2\pi$, $-u_0\doteq-\sqrt{9x^2+\dfrac{z^2}{4}}=-\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\le u\le\sqrt{9x^2+\dfrac{z^2}{9}}=\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\doteq u_0$. La normale esterna alla superficie è $\underline{n}_e=3\cos\vartheta\underline{i}+\sin\vartheta\underline{j}$ e quindi l'area della superficie è

$$\int_0^{2\pi}\int_{-u_0}^{u_0}\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\,du\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}2\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\,d\vartheta=20\pi$$

Uno degli errori più comuni è stato quello di sbagliare parametrizzazione del cilindro. Ad esempio chi ha scritto nel compito a $x = \rho\cos\vartheta$, $y = 2\rho\sin\vartheta$ ha parametrizzato l'insieme $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$. Indipendentemente da cosa si scrive per z, è sbagliato

Problema 4 - Compito A Detta S la superficie precedente, l'integrale che cerchiamo è

$$\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \frac{\underline{n}_e(\underline{x})}{\|\underline{n}_e(\underline{x})\|}) d\sigma$$

dove $n_e(\underline{x}) = 2\cos\vartheta\underline{i} + \sin\vartheta\underline{j}$ e $d\sigma = \|\underline{n}_e(\underline{x})\| d\vartheta du$. Il prodotto scalare nell'integrale è pari a

$$(2\cos\vartheta F_1(\underline{x}) + \sin\vartheta F_2(\underline{x}))\Big|_{\underline{x}\in S} = \sin\vartheta F_2(\underline{x})$$

per cui l'integrale da calcolare è

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-u_0}^{u_0} du \sin\vartheta\sqrt{4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 2\int_0^{2\pi} \sin\vartheta(4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)d\vartheta = 0$$

Problema 4 - Compito B Detta S la superficie precedente, l'integrale che cerchiamo è

$$\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \frac{\underline{n}_e(\underline{x})}{\|\underline{n}_e(\underline{x})\|}) d\sigma$$

dove $n_e(\underline{x}) = 2\cos\vartheta\underline{i} + \sin\vartheta\underline{k}$ e $d\sigma = \|\underline{n}_e(\underline{x})\| d\vartheta du$. Il prodotto scalare nell'integrale è pari a

$$(2\cos\vartheta F_1(\underline{x}) + \sin\vartheta F_3(\underline{x}))\Big|_{\underline{x}\in S} = \sin\vartheta F_3(\underline{x})$$

e l'integrale da calcolare diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-u_0}^{u_0} du \sin\vartheta e^{3\cos\vartheta\sin\vartheta u} =$$
$$2\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\sin\vartheta}{3\cos\vartheta\sin\vartheta}\left(e^{3\cos\vartheta\sin\vartheta\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}} - e^{-3\cos\vartheta\sin\vartheta\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}}\right)$$

ma l'integrale è impossibile. Terrò conto di tale fatto in sede di correzione.

Problema 5 - Compito A La successione $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ converge a zero per ogni valore di x. La convergenza è uniforme su $[-N, N]$ se

$$\forall\ \varepsilon\ \exists\ n_\varepsilon, :\ n > n_\varepsilon \implies \sup_{x\in[-N,N]} xe^{-nx^2} < \varepsilon$$

Usando le derivate si vede che il massimo di xe^{-nx^2} è raggiunto per $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ e $f_n(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}e^{-1}$ da cui la convergenza uniforme in $[-N, N]$.

D'altra parte $\sup\limits_{x\in[-N,N]} f_n(x) = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f_n(x)$ da cui la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$.

$f_n(x) = xe^{-n+x^2}$ converge puntualmente a zero per ogni x. Come prima dobbiamo analizzare

$$\forall\ \varepsilon\ \exists\ n_\varepsilon,:\ n > n_\varepsilon \implies \sup_{x\in[-N,N]} xe^{-n+x^2} < \varepsilon$$

e siccome $\sup\limits_{x\in[-N,N]} xe^{-n+x^2} = Ne^{N^2}e^{-n}$, tale quantità può essere resa piccola a piacere essendo N finito. Dunque la risposta è che la successione converge uniformemente in ogni insieme $[-N, N]$ ma non converge uniformemente in $\mathbf{R}$ in quanto l'estremo superiore è infinito.

Problema 5 - Compito B La successione $f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ converge a zero per ogni $x \in \mathbf{R}$ ma la convergenza non è uniforme in nessun $[-N, N]$. Basta osservare che $f_n(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) = \dfrac{1}{2}$ e quindi non può accadere

$$\sup_{x\in[-N,N]} \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} < \varepsilon$$

La successione $f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{n^3+|x|^2}$ converge a zero per ogni $x \in \mathbf{R}$ ma in questo caso la convergenza è uniforme in $\mathbf{R}$. Basta osservare che $n^3 + |x|^2 \geq 2n^{3/2}|x|$ e quindi

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{x\sqrt{n}}{n^3+|x|^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

e quindi la convergenza è uniforme anche in ogni sottoinsieme $[-N, N]$.

Problema 6 - Compito B $\displaystyle\oint \frac{Im(z)}{1+z^2}dz$. Il segmento è parametrizzato da $z(t) = 2(1+i)t$ e l'integrale diventa $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2t}{1+4(2i)t^2} 2(1+i)dt = \int_{-1}^{1} \frac{4(1+i)t}{1+8it^2}dt = \frac{1+i}{4i} \ln(1+8it^2)\Big|_{-1}^{1} = 0$ in quanto l'argomento del logaritmo assume lo stesso valore agli estremi. La parte di semicerchio è data da $z(t) = 2\sqrt{2}e^{it}$ e l'integrale diventa $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2}\sin t}{1+8e^{2it}} 2\sqrt{2}ie^{it}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{e^{it}-e^{-it}}{1+8e^{2it}}4e^{it}dt$. Cambiamo variabile $2t = u$ per cui $\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} du \frac{e^{iu}-1}{1+8e^{iu}} = \frac{1}{4i}\ln(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} du \frac{e^{-iu}}{e^{-iu}+8} = \frac{1}{4i}\ln(1+ 8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} + \frac{2}{i}\ln(e^{-iu}+8)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{2\pi i}{4i} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Osservazione È importante notare come sarebbe un errore scrivere $\displaystyle\frac{1}{4i}\ln(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{1}{4i}\ln(1+ 8e^{i\frac{5}{2}\pi}) - \frac{1}{4i}\ln(1+8e^{i\frac{\pi}{2}}) = 0$ in quanto non si tiene conto del fatto che la curva $1+8e^{i\frac{5}{2}\pi}$ gira intorno all'origine al contario della curva $e^{-iu}+8$

Un altro modo di risolvere l'integrale $\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} du \frac{e^{iu}-1}{1+8e^{iu}}$ consiste nel porre $z = e^{iu}$ ed arrivare all'integrale

$$2\oint_{|z|=1} \frac{z-1}{1+8z}\frac{dz}{iz}$$

ed applicare il teorema dei residui.

Uno degli errori più comuni è stato quello di scrivere

$$\oint \frac{Rez}{1+z^2}dz = Re \oint \frac{z}{1+z^2}dz$$

oppure con $Im(z)$, ma non siamo nella situazione in cui saremmo se avessimo

$$\int_a^b \cos x f(x)dx = \int_a^b Re(e^{ix})f(x)dx \int_a^b Re(e^{ix}f(x))dx = Re\int_a^b e^{ix}f(x)dx$$

Problema 6 - Compito A Con $\oint \frac{Re(z)}{1+z^2}dz$ si ha $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} i\frac{e^{it}+e^{-it}}{1+8e^{2it}}4e^{it}dt = i\frac{\pi}{2}+0.$

I precedenti integrali sono stati risolti a lezione