Analisi II per Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni
03–03–2012 A.A. 2011/2012, Terzo scritto valido per l'orale

Allegare tutti i conti ritenuti necessari. Risultati senza giustificazione non verranno presi in considerazione. Gli esercizi valgono tutti 7 punti.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Sia $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso nel piano complesso (dominio) e sia $\{u_n(z)\}$ una successione di funzioni olomorfe $u_n\colon A \to \mathbf{C}$. Sappiamo che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente alla funzione $f(z)$ in ogni insieme $\overline{B}$ dove B è un dominio sottiensieme di A.

Di dimostrino le affermazioni i) $f(z)$ è una funzione olomorfa in A ii) la derivata k–esima $f^{(k)}(z)$ è uguale a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(z)$ iii) la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(z)$ converge uniformemente in ogni insieme $\overline{B}$ con B dominio sottoinsieme di A.

Soluzione Bastava studiare

2) Sia data la funzione $f(z) = \dfrac{1}{2-i}\dfrac{1}{z^2 - z(2+i) + 2i}$. Si scrivano i tre sviluppi di Laurent $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$ (che comprende anche Taylor) centrati in $z=0$ e calcolato in z che soddisfa le tre condizioni i) $|z| \le 1$, ii) $1 < |z| < 2$, iii) $|z| > 2$. Si scriva poi lo sviluppo di Laurent centrato in $z = \infty$ e si calcoli il residuo. Si indichi chiaramente l'insieme di convergenza Suggerimento: per i)–iii) si usino i fratti semplici e si stia attenti ai raggi di converegnza)

Soluzione

i) Dopo avere scritto il tutto come $\dfrac{A}{z-2} + \dfrac{B}{z-i}$ si arrivi a $-\dfrac{A}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{iB}{1-\frac{z}{i}} = -\dfrac{A}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{z^k}{2^k} + iB\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{z^k}{i^k} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\dfrac{A}{2^{k+1}} + \dfrac{B}{i^{k-1}}\right)z^k$, $A = \dfrac{1}{(2-i)^2}$, $B = -A$.

Alcuni hanno trovato difficoltà quasi insormontabili nel calcolare le radici di $z^2 - z(2+i) + 2i = 0$ avendo a fatica riconosciuto che $3 - 4i = (2-i)^2$. Qualcuno con c'è riuscito. Avrebbero potuto procedere come uno studente del primo o secondo anno di scuola superiore chiedendosi: QUALI SONO QUEI DUE NUMERI (COMPLESSI IN QUESTO CASO) LA CUI SOMMA È $2+i$ E IL PRODOTTO È $2i$? NON SARANNO MICA $z=2$ E $z=i$?

La prima serie converge per $|z| < 2$ mentre la seconda per $|z < 1|$ per cui il raggio di convergenza è $|z| < 1$.

ii) Si scriva $\dfrac{A}{z-2} + \dfrac{B}{z-i} = -\dfrac{A}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{B}{z}\dfrac{1}{1-\frac{i}{z}} = -\dfrac{A}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{z^k}{2^k} + B\sum_{k=}^{+\infty}\dfrac{i^k}{z^{k+1}}$. La seconda converge per $|z| > 1$ da cui....

iii) Si scriva $\dfrac{A}{z-2}+\dfrac{B}{z-i}=\dfrac{A}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}+\dfrac{B}{z}\dfrac{1}{1-\frac{i}{z}}=A\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{2^k}{z^{k+1}}+B\sum_{k=}^{+\infty}\dfrac{i^k}{z^{k+1}}$. La seconda converge per $|z|>1$ e la prima per $|z|>2$.

iv) È uguale a iii)

3) Si calcoli $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z^5+1}{z^4(z^2-z(2+i)+2i)}dz$ dove $\gamma=\{|z|=1/2\}$ e percorsa in senso antiorario. Si portino i calcoli il più avanti possibile.

Soluzione

Abbiamo tre poli, $z=0$, $z=i$, $z=2$ ma solo il primo sta dentro la curva. Il punto è che $\dfrac{1}{z^4(z^2-z(2+i)+2i)}$ ha un polo di ordine 4 mentre $\dfrac{z^5}{z^4(z^2-z(2+i)+2i)}$ è olomorfa in $z=0$. Bisognerebbe fare tre derivate ma è meglio usare il punto all'infinito.

$$\oint f(z)dz=-2\pi i(Resf(i)+Resf(2)+Resf(\infty))$$

$$Resf(i)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^5+1)}{z^4(z-2)(z-i)}=\frac{i+1}{i-2},\qquad Resf(2)=\lim_{z\to 2}\frac{(z-2)(z^5+1)}{z^4(z-2)(z-i)}=\frac{33}{16(2-i)}$$

Per $Resf(\infty)$ scriviamo lo sviluppo di Laurent intorno a tale punto

$$(z+\frac{1}{z^4})\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{i^q}{z^{q+1}}$$

la cui unica potenza z^{-1} si ottiene per $k=q=0$ e quindi il coefficiente è $2\cdot i$. Il residuo è tale coefficiente per -1 quindi $Resf(\infty)=-2i$.

4) Si risolva la equazione differenziale $x''(t)+2x'(t)+x(t)=\delta(t-T)$, $x(0)=a$, $x'(0)=0$

Soluzione

Si arriva rapidamente a $\mathcal{L}(x(t))\doteq v(p)=\dfrac{2a+pa+e^{-pT}}{(p+1)^2}$ da cui

$$x(t)=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left(e^{p(t-T)}+a(2+p)e^{pt}\right)=(t-T)e^{-(t-T)}H(t-T)+ae^{-t}+ate^{-t}$$

Lo studente/ssa verifichi che $x(0)=av$ e $x'(0)=0$. La maggioranza ha dimenticato di moltiplicare $v(p)$ per e^{pt}

5) Si dimostri che la funzione $u(x,y)=x^2-y^2-2x$ è la parte reale di infinite funzioni complesse $f(z)$ definite su tutto il piano complesso. Delle infinite funzioni dette prima si trovi quella che in $z=1$ vale 2.

Soluzione

Chiaramente $x_{xx} = u_{yy}$ da cui u è armonica. Cerchiamo $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ e sappiamo che $u_x = v_y$ per cui $v(x,y) = \displaystyle\int v_y dy + g(x) = \int u_x dy + g(x) = \int (2x-2)dy + g(x) = 2xy - 2y + g(x)$. Poi deve essere $v_x = -u_y$ per cui $2y - g' = 2y$ da cui $g'(x) = 0$ e quindi $g(x) = c$ (costante). Indefinitiva si ha $u + iv = x^2 + y^2 - 2x + i(2xy - 2y) + c = z^2 - 2z + c \doteq f(z)$ e se vogliamo che $f(1) = 2$ deve essere $c = 4$.