Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
24–09–2016, A.A.2015-2016, (A)

Nome(stampatello) **Cognome**(stampatello) **matricola**

1) (6–punti) Si valuti l'integrale doppio della funzione $f(x,y)=x|y^2-x^3|$ esteso all'insieme $x^2+y^2\le 2$.

R. $-\dfrac{8}{15}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi+\dfrac{8\sqrt{2}}{15}-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{41}{195}+\dfrac{17}{30}+\dfrac{3}{26}$

$y^2\ge x^3$: se $x\le 0$ allora è certamente vera. Se invece $x>0$ allora deve essere $|y|\ge x^{3/2}$. Quindi dobbiamo integrare

$$I\doteq\int\int_D x(y^2-x^3)dx\,dy,$$

$D=\Big[D_1\doteq\{x^2+y^2\le 2,\ x\le 0\}\Big]\cup\Big[\{x^2+y^2\le 2,\ y\ge x^{3/2},\ y\le -x^{3/2}\,x\ge 0\}\doteq D_2\Big]$ ed inoltre

$$J\doteq\int\int_E x(x^3-y^2)dx\,dy,\qquad E=\{x^2+y^2\le 2,\ -x^{3/2}\le y\le x^{3/2}\}$$

Per calcolare gli integrali introduciamo coordinate polari $(x,y)=r\sqrt{2}(\cos t,\sin t)$, $0\le r\le 1$.

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1}x(y^2-x^3)dx\,dy&=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}dt\int_0^1(r\sqrt{2})\cdot r\sqrt{2}\cos t(2r^2\sin^2 t-2\sqrt{2}r^3\cos^3 t)dr=\\&=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}dt\cos t(\frac{4}{5}\sin^2 t-\frac{4\sqrt{2}}{6}\cos^3 t)=-\frac{8}{15}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\end{aligned}\tag{1}$$

Per calcolare gli altri integrali dobbiamo risolvere il sistema

$$\Big\{x\ge 0,\ x^2+y^2=2,\ y=x^{3/2}\Big\}\iff x^3+x^2=2\iff x=1\ \big[(x^2+x^3)\text{ cresce}\big]$$

Quindi abbiamo (gli studenti si convincano del 2 di fronte all'integrale)

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2}f(x,y)dx\,dy&=2\int_0^1dx\int_{x^{3/2}}^{\sqrt{2-x^2}}dy x(y^2-x^3)=\\&=2\int_0^1\left[\frac{1}{3}x(2-x^2)^{3/2}-\frac{1}{3}x^{\frac{11}{2}}-x^4\sqrt{2-x^2}-x^{\frac{11}{2}}\right]dx\end{aligned}$$

$$\int_0^1 dx\,x(2-x^2)^{\frac{3}{2}}=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\sin t\,dt=\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1dx\,x^4\sqrt{2-x^2}&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt\sin^4 t\cos^2 t=\frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^5 t)'\cos tdt=\\&=\frac{8}{5}\sin^5 t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^6 tdt=\frac{1}{5}+\frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 t(1-\cos^2 t)dt\end{aligned}$$

da cui

$$(8+\frac{8}{5})\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \sin^4 t\cos^2 t = \frac{1}{5}+\frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \sin^4 t = \frac{1}{5}+\frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \sin^2 t - \frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \sin^2 t\cos^2 t =$$
$$= \frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}-\frac{2}{5}-\frac{\pi}{20} = -\frac{1}{5}+\pi\frac{3}{20}$$

e quindi

$$\int_0^1 dx\, x^4\sqrt{2-x^2} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}.$$

Finalmente

$$\int\int_{D_2} f(x,y)dx\,dy = \frac{8\sqrt{2}}{15}-\frac{\pi}{4}-\frac{41}{195} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} J = \int\int_E f(x,y)dx\,dy = 2\int_0^1 dy\int_{y^{2/3}}^{\sqrt{2-y^2}} x(x^3-y^2)dx = \\ = \int_0^1\left[\frac{1}{2}(2-y^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}y^{\frac{10}{3}}-y^2\left(2-y^2-y^{\frac{4}{3}}\right)\right]dy \;= \frac{17}{30}+\frac{3}{26}\end{aligned} \tag{3}$$

La somma dei contributi (1)–(3) dà il risultato.

2) (6–punti) Detto $|V|$ il volume dell'insieme definito da $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^{1/4},\ 0\le z\le \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{\sqrt{x}}{y}}\}$. Si calcoli $|V|$

R. $+\infty$

$$|V| = \int_0^1 dy\int_{y^4}^1 dx\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{\sqrt{x}}{y}} = \int_0^1 dy 2ye^{\frac{\sqrt{x}}{y}}\Big|_{y^4}^1 = 2\int_0^1 dyy(e^{\frac{1}{y}}-e^y) = +\infty$$

3) (6–punti) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{\mathrm{Re}(z^2)+5}dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario).

R. 0

$z=2e^{it}$ da cui

$$\int_0^{2\pi}\frac{8\sin t\cos t}{5+4\cos(2t)}2ie^{it}dt$$

$w=e^{it}$ da cui

$$16i\int_{|w|=1}\frac{w\frac{1}{2i}(w-\frac{1}{w})(w+\frac{1}{w})\frac{1}{2}}{5+2(w^2+\frac{1}{w^2})}\frac{dw}{iw} = -4i\int_{|w|=1}\frac{w^4-1}{2w^4+5w^2+2}dw =$$
$$= -2i\int_{|w|=1}\frac{(w^4-1)dw}{(w^2+2)(w-\frac{i}{\sqrt{2}})(w+\frac{i}{\sqrt{2}})} = -2i2\pi i\left(\frac{\frac{1}{4}-1}{(2-\frac{1}{2})\frac{2i}{\sqrt{2}}}+\frac{\frac{1}{4}-1}{(2-\frac{1}{2})\frac{-2i}{\sqrt{2}}}\right) = 0$$

4) (8–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x'''(t)-7x'(t)+6x(t)=F(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$, $F(t)$ è il prodotto di convoluzione $\int_0^t f(x-t)g(x)dx$ e $f(t)=1$, $g(t)=H(t-3)$.

Si calcoli: $x(3^+), x'(3^+), x''(3^+), x(3^-), x'(3^-), x''(3^-)$. Si tenga presente che $\boxed{f(x)\cdot\delta'(x-a) = -f'(a)}$
R.

L'equazione per la trasformata di Laplace è

$$(p^3-7p+6)X(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2} \implies X(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)(p-2)(p+3)}$$

$$x(t) = \sum_{res.} \frac{e^{(t-3)p}}{p^2(p-1)(p-2)(p+3)}$$

$$x(t) = \left[\frac{t-3}{6} + \frac{7}{36} + \frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{20} + \frac{e^{-3(t-3)}}{180}\right] H(t-3)$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \delta(t-3)\left[\frac{t-3}{6} + \frac{7}{36} + \frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{20} + \frac{e^{-3(t-3)}}{180}\right] + \\ &+ H(t-3)\left[\frac{1}{6} + \frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{10} - \frac{e^{-3(t-3)}}{60}\right] = \\ &= H(t-3)\left[\frac{1}{6} + \frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{10} - \frac{e^{-3(t-3)}}{60}\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= \delta(t-3)\left[\frac{1}{6} + \frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{10} - \frac{e^{-3(t-3)}}{60}\right] + H(t-3)\left[\frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{5} + \frac{e^{-3(t-3)}}{20}\right] = \\ &= H(t-3)\left[\frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{5} + \frac{e^{-3(t-3)}}{20}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'''(t) &= \delta(t-3)\left[\frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{e^{2(t-3)}}{5} + \frac{e^{-3(t-3)}}{20}\right] + H(t-3)\left[\frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{2e^{2(t-3)}}{5} - \frac{3e^{-3(t-3)}}{20}\right] = \\ &= H(t-3)\left[\frac{e^{t-3}}{-4} + \frac{2e^{2(t-3)}}{5} - \frac{3e^{-3(t-3)}}{20}\right] \end{aligned}$$

Ne segue

$$x(3^+) = 0,\ x'(3^+) = 0,\ x''(3^+) = 0 \qquad x(3^-) = x'(3^-) = x''(3^-) = 0$$

Vefifichiamo ora che $(A(x))(t) \doteq x''' - 7x' + 6x = (t-3)H(t-3)$

$$\begin{aligned} (A(x))(t) = H(t-3)\Big\{ & e^{-3(t-3)}\left[\frac{-3}{20} + \frac{7}{60} + \frac{6}{180}\right] + e^{2(t-3)}\left[\frac{2}{5} - \frac{7}{10} + \frac{6}{20}\right] + \\ & + e^{t-3}\left[-\frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{6}{4}\right] + \left[-\frac{7}{6} + 6\frac{7}{36} + 6\frac{t-3}{6}\right] = (t-3)H(t-3)\Big\} \end{aligned}$$

5) (4–punti) Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{2y+1+y^2}{y+2}dx - \dfrac{x+1}{(y+2)^2}dy$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma} = (t, e^t - 1)$, $0 \le t \le 1$

R. $\dfrac{2e^2 - 3e - 1}{2e+2}$

$\omega = \dfrac{1}{y+2}dx - \dfrac{x+1}{(y+2)^2}dy + ydx = d\left(\dfrac{x+1}{y+2}\right) + ydx$ quindi

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = \left(\frac{x+1}{y+2}\right)_{(0,0)}^{(1,e-1)} + \int_0^1 (e^t - 1)dt = \frac{2}{e+1} - \frac{1}{2} + e - 2 = \frac{2e^2 - 3e - 1}{2e+2}$$

La scomposizione $\omega = \dfrac{1}{y+2}dx - \dfrac{x+1}{(y+2)^2}dy + ydx$ va individuata ma c'è un altro modo di procedere meno improvvisato e meno soggetto alla dimestichezza con l'algebra.

Sebbene la forma non sia chiusa, eseguiamo lo stesso le derivate incrociate e osserviamo che

$$\left(\frac{(y+1)^2}{y+2}\right)_y - \left(-\frac{x+1}{(y+2)^2}\right)_x = 1 \implies \left(\frac{(y+1)^2}{y+2} - y\right)_y = -\left(\frac{x+1}{(y+2)^2}\right)_x$$

ossia la forma differenziale $\left(\dfrac{(y+1)^2}{y+2} - y\right)dx - \dfrac{x+1}{(y+2)^2}dy$ è chiusa e esatta nell'insieme in cui giace la curva e possiamo procedere al calcolo del potenziale. $\displaystyle\int -\frac{x+1}{(y+2)^2}dy = \frac{x+1}{y+2} + c(x)$

$$\frac{1}{y+2} + c'(x) = \frac{(y+1)^2}{y+2} - y = \frac{1}{y+2} \implies c'(x) = 0 \implies$$
$$\left(\frac{(y+1)^2}{y+2}, \frac{-x-1}{(y+2)^2}\right) = \left(\left(\frac{x+1}{y+2}\right)_x, \left(\frac{x+1}{y+2}\right)_y\right) - (y, 0)$$

Si sarebbe pure potuto eseguire l'integrale curvilineo della forma differenziale.