Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
20–07–2021 A.A. 2020/2021, Sessione estiva, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate passo per passo e non basta scrivere la soluzione

I presenti in aula che intendono ritirarsi scrivano ritirata/o sotto il proprio cognome

1) (10 punti) Sia A la porzione di piano (x,y) definita da $x^2+y^2 \le \sqrt{x^2+y^2}-x$ e sia $P=(1,1,a)$, $a>0$. Se V è il volume generato dai segmenti $\overline{PQ}$ al variare di Q in A, si valcoli $|V|$. [(Suggerimento: V è un volume conico o meglio, un volume racchiuso da una superficie conica. Scrivere l'equazione parametrica del segmento che congiunge $\overline{PQ}$]

2) (10 punti) Risolvere la equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=Ax^2f(t) & \omega, A, B \in \mathbf{R}, \quad x,t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u_x(0,t)=B\cos(\omega t), \end{cases}$$

dove $f(t)=t$ per $0\le t\le 1$, $f(t)=1$ per $1<t<2$, $f(t)=3-t$ per $2\le t\le 3$, $f(t)\equiv 0$ per $t>3$

[Conviene scrivere $f(t)=a_0tH(t-t_0)+a_1(t-t_1)H(t-t_1)+a_2(t-t_2)H(t-t_2)+a_3(t-t_3)H(t-t_3)$ per opportune funzioni a_k e valori t_k, k=1,2,3,4. Inoltre cercare la soluzione della equazione per $v(x,p)$ nella forma $\alpha+\beta x+\gamma x^2$]

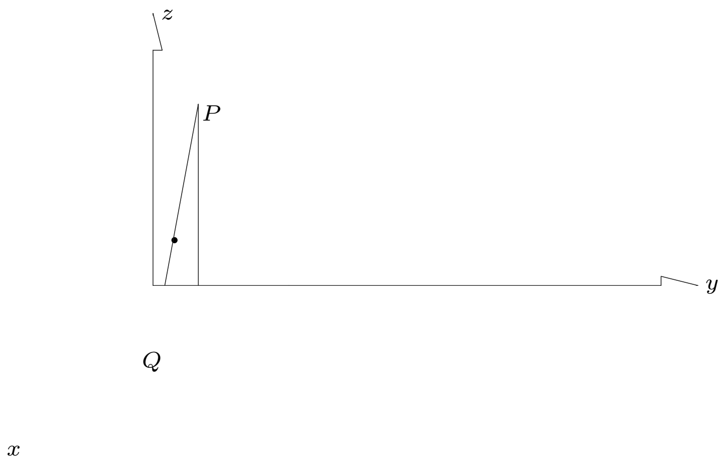
3) (10 punti) Sia data la forma differenziale $\omega=\dfrac{x^2+y^2-3x+2}{x^2+y^2-4x+4}dx+\dfrac{y}{x^2+y^2-4x+4}dy$. Sia inoltre 1) $\underline{\gamma}(t)$ una curva regolare semplice percorsa in senso antiorario il cui sostegno ha equazione $x^2+y^2=3\sqrt{x^2+y^2}-x$ 2) $\underline{\sigma}(t)$ una curva regolare semplice percorsa in senso orario il cui sostegno ha equazione $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$ 3) $\underline{\Gamma}=\underline{\gamma}\cup\underline{\sigma}$. Calcolare $\displaystyle\oint_{\underline{\Gamma}}\omega$

Soluzioni

1) Parametrizziamo il volume Il punto Q ha coordinate $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ con $0\le\varphi\le 2\pi$ e $0\le r\le 1-\cos\varphi$. Il segmento $\overline{PQ}$ ha equazione $\lambda(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)+(1-\lambda)(1,1,a)=(\lambda r\cos\varphi+(1-\lambda), \lambda r\sin\varphi+(1-\lambda), a(1-\lambda)) \doteq (x,y,z)$ $0\le\lambda\le 1$. Lo iacobiano della trasformazione è $a\lambda^2 r$.

$$|V|=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 d\lambda\int_0^{1-\cos\varphi}a\lambda^2 r=\frac{a\pi}{2}$$

Q varia nel cardioide. Il pallino varia con λ sul segmento $\overline{PQ}$



2) $f(t)=tH(t)-(t-1)H(t-1)-(t-2)H(t-2)+(t-3)H(t-3)$. Della $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ si ha

$$p^2v-a^2v_{xx}=Ax^2\left[\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p^2}+\frac{e^{-3p}}{p^2}\right]\doteq Ax^2Q(p),\qquad v_x(0,p)=\frac{Bp}{p^2+\omega^2}$$

La soluzione della equazione omogenea con $A=0$ al solito è $v(x,p)=ce^{-px/a}$. La soluzione della non omogenea la cerchiamo nella forma $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ per cui dobbiamo risolvere

$$p^2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-2a^2\gamma=Ax^2Q(p)\implies \gamma=\frac{AQ(p)}{p^2},\ \alpha=\frac{2a^2\gamma}{p^2}=\frac{2AQ(p)}{a^2p^4},\ \beta=0,$$

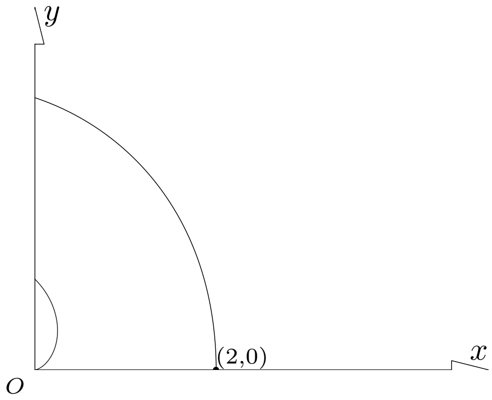
A parte la costante c da trovare abbiamo $v(x,p)=ce^{-px/a}+\dfrac{2a^2AQ(p)}{p^4}+\dfrac{x^2AQ(p)}{p^2}$. $v_x(0,p)=\dfrac{-pc}{a}=\dfrac{Bp}{p^2+\omega^2}$, $c=\dfrac{-aB}{p^2+\omega^2}$. Quindi la soluzione è

$$v(x,p)=\frac{-aBe^{-px/a}}{p^2+\omega^2}+\frac{2a^2A}{p^4}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p^2}+\frac{e^{-3p}}{p^2}\right]+\frac{Ax^2}{p^2}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p^2}+\frac{e^{-3p}}{p^2}\right]=$$
$$=\frac{-aBe^{-px/a}}{p^2+\omega^2}+\left[\frac{2Aa^2}{p^6}+\frac{Ax^2}{p^4}\right]-e^{-p}\left[\frac{2Aa^2}{p^6}+\frac{Ax^2}{p^4}\right]-e^{-2p}\left[\frac{2Aa^2}{p^6}+\frac{Ax^2}{p^4}\right]-e^{-3p}\left[\frac{2Aa^2}{p^6}+\frac{Ax^2}{p^4}\right]$$

Antitrasformando la soluzione è

$$u(x,t)=-\frac{aB}{\omega}\sin\omega(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a})+(\frac{2Aa^2t^5}{5!}+\frac{Ax^2t^3}{6})H(t)-(\frac{2Aa^2(t-1)^5}{5!}+\frac{Ax^2(t-1)^3}{6})H(t-1)+$$
$$-(\frac{2Aa^2(t-2)^5}{5!}+\frac{Ax^2(t-2)^3}{6})H(t-2)-(\frac{2Aa^2(t-3)^5}{5!}+\frac{Ax^2(t-3)^3}{6})H(t-3)$$

3)



Ho erroneamente posizionato il punto $(2, 0)$ sul cammino di integrazione. La domanda dell’esercizio era mal posta e ne ho tenuto conto in sede di correzione “indennizzando” gli studenti anche se **nessuno** ha sollevato obiezioni. Ad ogni modo la forma era chiusa ed esatta dal momento che ammetteva il potenziale $U(x, y) = x + \frac{1}{2}\ln(((x-2)^2 + y^2)$