Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
19–06–2021 A.A. 2020/2021, Sessione estiva, primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate passo per passo e non basta scrivere la soluzione

I presenti in aula che intendono ritirarsi scrivano ritirata/o sotto il proprio cognome

1) (7.5 punti) Sia dato l'insieme $D \doteq \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \le x \le a, 0 \le y \le x\}$ nello spazio $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ e sia O l'origine degli assi. Sia P un punto del segmento $\{x=a, 0 \le y \le a\}$. Il segmento $\overline{OP}$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele che giace nel piano individuato dal segmento $\overline{OP}$ e dall'asse z. Al variare del punto P sul segmento l'insieme dei triangoli individuano un insieme V. Se ne calcoli il volume $|V|$

[A seconda del metodo di calcolo adottato è possibile che vi serva qualcuno dei seguenti integrali $C{=}\cos x$, $S{=}\sin x$, $\int dx/S{=}\ln\tan(x/2)$, $\int dx/C{=}\ln(1/C{+}S/C)$, $\int S^2/C^3 dx{=}S^3/(2C^2){+}S/2{-}(\ln(1/C{+}S/C))/2$, $\int dx/S^2{=}{-}\cot x$]

2) (7.5 punti) Risolvere la equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Axf(t) & \omega, A, B, C \in \mathbf{R}, \quad x,t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=Bx, \quad u_x(0,t)=C\cos(\omega t), \end{cases}$$

dove $f(t)=t$ per $0 \le t \le 1$, $f(t)=-2$ per $t>1$.

3) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale

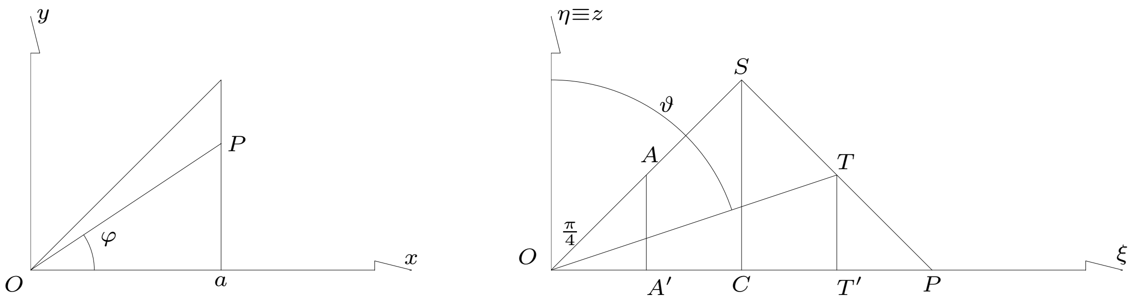
$$\omega = \frac{2x^2+2xy+4x^2y^2+4xy^3+y^4}{(2x+y)^2}dx - \frac{x^2(1+4x^2+4xy+y^2)}{(2x+y)^2}dy \doteq A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

(non chiusa, $A_y - B_x = 2x+2y$). Si calcoli l'integrale curvilineo esteso alla curva $\underline{\gamma}$ percorsa una sola volta in senso antiorario il cui sostegno ha equazione $x^2-4x+y^2=-3$

1) (7.5 punti) Sia dato l'insieme $D \doteq \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \le x \le a, 0 \le y \le x\}$ nello spazio $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ e sia O l'origine degli assi. Sia P un punto del segmento $\{x=a, 0 \le y \le a\}$. Il segmento $\overline{OP}$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele che giace nel piano individuato dal segmento $\overline{OP}$ e dall'asse z. Al variare del punto P sul segmento l'insieme dei triangoli individuano un insieme V. Se ne calcoli il volume $|V|$

[A seconda del metodo di calcolo che adottate è possibile che vi serva qualcuno dei seguenti integrali $C{=}\cos x$, $S{=}\sin x$, $\int dx/S{=}\ln\tan(x/2)$, $\int dx/C{=}\ln(1/C{+}S/C)$, $\int S^2/C^3 dx{=}S^3/(2C^2){+}S/2{-}(\ln(1/C{+}S/C))/2$, $\int dx/S^2{=}{-}\cot x$]

Soluzione



Integrazione per fili

$\overline{OP} = a/\cos\varphi$. Introduciamo coordinate polari (r,φ) nel piano (x,y). Dobbiamo calcolare

$$\iint_D \overline{AA'}(\text{oppure } \overline{TT'})dxdy$$

Fissato φ abbiamo $0 \le r \le a/\cos\varphi$

$$|V| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}} r^2 dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{a}{2\cos\varphi}}^{\frac{a}{\cos\varphi}} r(\frac{a}{\cos\varphi} - r) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}} \frac{a}{2\cos\varphi} sds =$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3}{\cos^3\varphi} d\varphi = \frac{a^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \ln\tan\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\tan\frac{\pi}{8} = -\ln\frac{\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}}{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} =$$

$$\frac{-1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}\ln\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} = -\ln(\sqrt{2}-1) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

$S = \sin x$, $C = \cos x$, $T = \tan x$,

$$\int \frac{S^2}{C^2}\frac{dx}{C} = \int \frac{S^2}{C^2}\frac{1}{C^2} C dx = \frac{T^3 C}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{S^2(1-C^2)}{C^3} dx = \frac{T^3 C}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{S^2}{C^3} dx - \frac{1}{3}\int \frac{S^2}{C} dx =$$
$$= \frac{T^3 C}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{S^2}{C^3} dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{C} dx + \frac{1}{3}\int C dx$$

quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

e quindi

$$\frac{a^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi = \frac{a^3}{8}\left(\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}\right) = \frac{a^3}{16}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$$

Seconda dimostrazione Il volume è descritto da

$$x(\rho,\vartheta,\varphi) = \rho\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y(\rho,\vartheta,\varphi) = \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z(\rho,\vartheta,\varphi) = \rho\cos\vartheta, \qquad 0 \le \rho \le \frac{(a/\cos\varphi)}{\sin\vartheta + \cos\vartheta}$$

$$|V| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{\frac{a/\cos\varphi}{\sin\vartheta+\cos\vartheta}} r^2 dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{(\sin\vartheta + \cos\vartheta)^3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{(\sin\vartheta+\cos\vartheta)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{(\sin(\vartheta+\pi/4))^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(t-\pi/4)dt}{\sin^3 t} =$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t-\cos t}{\sin^3 t}dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\right] dt = -\cot t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 t}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{8}$$

Il prodotto è $\frac{a^3}{3}\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))\frac{3}{8} = \frac{a^3}{16}\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$

La distanza $\overline{OT}$ è esattamente ρ. Fissato φ la retta SP è la generatrice del cono di equazione $z = \frac{a}{\cos\varphi} - \sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{\cos\varphi} - \rho\sin\vartheta = \overline{TT'}$. $\overline{OT'} = \overline{OT}\sin\vartheta$ e

$$\rho^2 = \overline{OT}^2 = \overline{OT'}^2 + \overline{TT'}^2 = \rho^2\sin^2\vartheta + (\frac{a}{\cos\varphi} + \rho\sin\vartheta)^2$$

per cui

$$\rho\cos\vartheta = \frac{a}{\cos\varphi} - \rho\sin\vartheta \iff \rho = \frac{a/\cos\varphi}{\cos\vartheta+\sin\vartheta}$$

e alla fine $0\le\rho\le \frac{a/\cos\varphi}{\cos\vartheta+\sin\vartheta}$

Faccio notare che il primo esercizio è praticamente lo stesso del 27/02/2021 e 15/05/2021

2) (7.5 punti) Risolvere la equazione differenziale
$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = Axf(t) & \omega, A, B, C\in\mathbf{R}, \quad x,t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0) = Bx, \quad u_x(0,t) = C\cos(\omega t), \end{cases}$
dove $f(t) = t$ per $0\le t\le 1$, $f(t) = -2$ per $t>1$.

Soluzione Scriviamo $f(t) = tH(t) - 3H(t-1) - (t-1)H(t-1)$. L'equazione è

$$v_{xx}(x,p) - \frac{p^2}{a^2}v(x,p) = \frac{xA}{a^2}\left[\frac{-1}{p^2} + \frac{3e^{-p}}{p} + \frac{e^{-p}}{p^2}\right] - \frac{Bx}{a^2},\ v_x(0,p) = \frac{Cp}{p^2+\omega^2}$$

La soluzione della non omogeneea è la funzione $xA\left[\frac{1}{p^4} - \frac{3e^{-p}}{p^3} - \frac{e^{-p}}{p^4}\right] + \frac{Bx}{p^2}$ e la soluzione generale è

$$v(x,p) = \alpha e^{\frac{-xp}{a}} + xA\left[\frac{1}{p^4} - \frac{3e^{-p}}{p^3} - \frac{e^{-p}}{p^4}\right]\frac{Bx}{p^2}, \qquad v_x(0,p) = \frac{Cp}{p^2+\omega^2}$$

$\alpha = aA\left[\frac{1}{p^5} - \frac{3e^{-p}}{p^4} - \frac{e^{-p}}{p^5}\right] + \frac{aB}{p^3} - \frac{aC}{p^2+\omega^2}$

$$v(x,p) = \left[aA\left(\frac{1}{p^5} - \frac{3e^{-p}}{p^4} - \frac{e^{-p}}{p^5}\right) + \frac{aB}{p^3} - \frac{aC}{p^2+\omega^2}\right]e^{-px/a} + xA\left[\frac{1}{p^4} - \frac{3e^{-p}}{p^3} - \frac{e^{-p}}{p^4}\right] + \frac{Bx}{p^2} =$$
$$= e^{-px/a}\left[\frac{aA}{p^5} + \frac{aB}{p^3} - \frac{aC}{p^2+\omega^2}\right] + e^{-p-px/a}\left[\frac{-3aA}{p^4} - \frac{aA}{p^5}\right] + e^{-p}\left[-\frac{3xA}{p^3} - \frac{xA}{p^4}\right] + \frac{xA}{p^4} + \frac{xB}{p^2}$$

Sia $t' = t - x/a$, $\hat{t} = t-1-x/a$,

$$u(x,t) = H(t')\left[\frac{aA(t')^4}{24} + \frac{aB(t')^2}{2} - \frac{aC}{\omega}\sin(\omega t')\right] + AH(\hat{t})\left[\frac{-a\hat{t}^3}{2} - \frac{a\hat{t}^4}{24}\right] +$$
$$+ AH(t-1)\left[-\frac{3x(t-1)^2}{2} - \frac{x(t-1)^3}{6}\right] + \frac{xt^3A}{6} + xtB$$

3) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale
$\omega = \dfrac{2x^2+2xy+4x^2y^2+4xy^3+y^4}{(2x+y)^2}dx - \dfrac{x^2(1+4x^2+4xy+y^2)}{(2x+y)^2}dy \doteq A(x,y)dx + B(x,y)dy$
(non chiusa, $A_y - B_x = 2x+2y$). Si calcoli l'integrale curvilineo esteso alla curva $\underline{\gamma}$ percorsa una sola volta in senso antiorario il cui sostegno ha equazione $x^2-4x+y^2=-3$

soluzione

Detta $A(x,y)dx + B(x,y)dy = \omega$ la forma si verifica che $A_y - B_x = 2x+2y$ per cui $(A-y^2)_y = (B+x^2)_x$ per cui la forma $\omega' = (A-y^2)dx - (B+x^2)dy$ è chiusa. La curva giace nella parte di piano $x \geq 1$ e non si verifica mai $y+2x=0$. Basta mostrare che la distanza fra il centro della circonferenza e la retta $y+2x=0$ è maggiore del raggio 1 ed essendo $\sqrt{8-8/\sqrt{5}} > 1$ l'integrale curvilineo è ben definito e la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso del piano; la forma ω' è esatta.

Prima soluzione Calcoliamo il potenziale $U(x,y)$ di ω'

$$B + x^2 = \frac{-x^2}{(2x+y)^2} \to U(x,y) = \int \frac{-x^2dy}{(2x+y)^2} = \frac{x^2}{(2x+y)} + Q(x)$$

$$U_x = \frac{2x(2x+y)-2x^2}{(2x+y)^2} + Q'(x) = A - y^2 = \frac{2x^2+2xy}{(2x+y)^2} \implies Q'(x) = 0$$

e quindi $U(x,y) = x^2/(2x+y)$. Sappiamo che

$$U_x = A - y^2, \qquad U_y = B + x^2$$

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega = \oint_{\underline{\gamma}} (Adx+Bdy) = \oint_{\underline{\gamma}} (U_x+y^2)dx + (U_y - x^2)dy = \oint_{\underline{\gamma}} (y^2dx - x^2dy) =$$

$x = 2+\cos t$, $y = \sin t$ da cui

$$\int_0^{2\pi} (-S^3 - (4+4C+C^2)C)dt = \int_0^{2\pi} \left[-S(1-C^2) - 4C - 4C^2 + C(1-S^2)\right] dt = -4\pi$$

Seconda soluzione Applichiamo Gauss-Green

$$\oint (Adx+Bdy) = \iint (B_x - A_y)dx\,dy = \iint (-2x-2y)dx\,dy = \int_0^1 drr \int_0^{2\pi} (-2(2+rC)-2rS)dt = -4\pi$$

e infatti

$$\iint (-2x-2y)dx\,dy = \oint (y^2dx - x^2dy)$$