Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18–01–2021 A.A. 2020/2021, Primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate passo per passo e non basta scrivere la soluzione

1) (7.5 punti) Si calcoli il volume $|V|$ dell'insieme $V = \{x^2+y^2+z^2 \le 1,\ y \ge |x|/\sqrt{3},\ y \le 1/2\}$

1.1) (3 punti) Sia S la superficie laterale esterna dell'insieme $\{x^2+y^2+z^2 \le 1, y \ge 1/2\} \cup \{x^2+y^2+z^2 \le 1, y \le |x|/\sqrt{3}\}$. Si calcoli $|S|$

2) (7.5 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = H(t - \dfrac{2x}{a})H(\dfrac{x}{a} - t) & x, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = \sin(\omega t), & \omega \in \mathbf{R} \end{cases}$$

3) (7.5 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin^2(\pi x)}{(x^2-1)(x^2-x+1)} dx$
evidenziando il cammino di integrazione e parametrizzando **ogni singolo tratto.** L'integrale è reale e voglio un risultato reale.

4) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale

$$\frac{-2(yx^2+4y^3+4x^3+xy^2)}{(4x^2+y^2)(x^2+4y^2)}dx + \frac{2(x^3+4xy^2-16yx^2-4y^3)}{(4x^2+y^2)(x^2+4y^2)}dy$$

1) Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma} = (t, 1-t^2)$, $-1/2 \le t \le 1$

2) Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma} = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

regole per la consegna

1) UN SOLO file (pdf o jpeg o jpg) 2) Controllare che le pagine non siano sfocate 3) Controllare che le pagine non siano ruotate le une rispetto alle altre 4) Scrivere in modo leggibile

2) Per unire più file esistono dei programmi online

3) **Il file va postato sul team dal codice fgocnu3 nella sezione “File” tra le 15:30 e le 16:00, né prima né dopo**

4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro

5) Il vostro file deve essere così nominato: **cognome-nome-18-01-2021-Elettronica(o Internet o Informatica)**

Soluzioni

1) Prima soluzione Usiamo coordinate polari sferiche $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $x = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ e calcoliamo il volume per sottrazione dal volume della sfera del volume dell'insieme complementare che è $\{x^2+y^2+z^2\le 1, y\ge 1/2\}\cup\{x^2+y^2+z^2\le 1, y<|x|/\sqrt{3}\}\doteq V_2\cup V_1$

$V_1=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 0\le r\le 1, 0\le\vartheta\le\pi, -7\pi/6\le\varphi\le\varphi/6\}$ da cui

$$|V_1|=\int_0^1 dr\int_{\frac{-7\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^\pi r^2\sin\vartheta d\vartheta=\frac{1}{3}\frac{4\pi}{3}2=\frac{8\pi}{9}$$

$V_2=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon \dfrac{1}{2\sin\vartheta\sin\varphi}\le r\le 1, \arcsin\dfrac{1}{2\sin\varphi}\le\vartheta\le\pi-\arcsin\dfrac{1}{2\sin\varphi}, \dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le\dfrac{5\pi}{6}\}$ e

$$|V_2|=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\int_{\arcsin\frac{1}{2\sin\varphi}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_{\frac{1}{2\sin\vartheta\sin\varphi}}^{1}drr^2\sin\vartheta\quad\text{(poco rassicurante)}$$

ma trattandosi di una calotta sferica (artica) è uguale al volume dell'insieme $\{x^2+y^2+z^2\le 1, z>1/2\}$ ossia

$$|V_2|=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\vartheta\int_{\frac{1}{2\cos\vartheta}}^1 r^2\sin\vartheta dr=\frac{5\pi}{24}$$

Il risultato è $|V|=\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{8\pi}{9}-\dfrac{5\pi}{24}=\dfrac{17\pi}{72}$

In ogni caso

$$2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\int_{\arcsin\frac{1}{2\sin\varphi}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_{\frac{1}{2\sin\vartheta\sin\varphi}}^{1}drr^2\sin\vartheta=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\int_{\arcsin\frac{1}{2\sin\varphi}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\sin\vartheta\left[1-\frac{1}{8\sin^3\vartheta\sin^3\varphi}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{8\sin^3\varphi}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right]\Big|_{\arcsin\frac{1}{2\sin\varphi}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left[\frac{\sqrt{4\sin^2\varphi-1}}{\sin\varphi}-\frac{\sqrt{4\sin^2\varphi-1}}{4\sin^3\varphi}\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left[\frac{\sqrt{3-4\cos^2\varphi}}{\sin\varphi}-\frac{\sqrt{3-4\cos^2\varphi}}{4\sin^3\varphi}\right]d\varphi\underbrace{=}_{\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}$$

$$=2\int_0^\pi\frac{\sin^2 x}{1+3\sin^2 x}dx-2\int_0^\pi\frac{\sin^2 x}{(1+3\sin^2 x)^2}dx=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{24}$$

$\dfrac{1}{2\sin\vartheta\sin\varphi}\le r\le 1$ viene da $y\ge 1/2$ ma non basta in quanto bisogna assicurarsi che $\dfrac{1}{2\sin\vartheta\sin\varphi}\le 1$

Si può anche scrivere

$$|V_2|=\iint_{x^2+y^2\le 3/4}dxdy\int_{1/2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz=\iint_{x^2+y^2\le 3/4}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 3/4}dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 3/4}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 r\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{3}{4}r^2}6=\frac{7\pi}{12}\implies|V_2|=\frac{7\pi}{12}-\frac{1}{2}\pi\frac{3}{4}=\frac{5\pi}{24}$$

Seconda soluzione Parametrizziamo direttamente il volume da calcolare in coordinate cartesiane $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon y\geq |x|/\sqrt{3},\ y\leq 1/2, -\sqrt{1-x^2-y^2}\leq z\leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$ e quindi

$$|V|=4\iint_{\substack{x\geq 0\ y\geq x/\sqrt{3}\\ y\leq 1/2}}\sqrt{1-x^2-y^2}dx\,dy=4\int_0^{\frac12}dy\int_0^{y\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2-y^2}dx\underbrace{=}_{x=\sqrt{1-y^2}\sin t}$$

$$=4\int_0^{\frac12}dy\int_0^{\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}}(1-y^2)\cos^2 t dt=4\int_0^{\frac12}dy\int_0^{\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}}(1-y^2)\frac{1+\cos(2t)}{2}dt$$

$$=2\int_0^{\frac12}dy\left((1-y^2)\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1-y^2}{2}\sin(2\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}})\right)=$$

$$=2\int_0^{\frac12}dy\left((1-y^2)\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{y\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4y^2}\right)\doteq I_1-I_2+I_3\qquad (I_3=\frac{\sqrt{3}}{6})$$

$$I_1=\int_0^{\frac12}\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}dy=y\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}\Big|_0^{\frac12}-\int_0^{\frac12}\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{3y^2}{1-y^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{y^2}{(1-y^2)^{\frac32}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac12}\frac{y\sqrt{3}}{1-y^2}\frac{dy}{\sqrt{1-4y^2}}\underbrace{=}_{y=\frac{\sin t}{2}}\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t dt}{4-\sin^2 t}\underbrace{=}_{t=2\arctan u}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}\int_0^1\frac{udu}{u^4+u^2+1}\underbrace{=}_{fratti\ semplici}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

$$I_2=\int_0^{\frac12}y^2\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{y^3}{3}\arcsin\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{1-y^2}}\Big|_0^{\frac12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac12}\frac{y^3dy}{(1-y^2)\sqrt{1-4y^2}}\underbrace{=}_{y=\frac{\sin t}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 tdt}{4-\sin^2 t}\underbrace{=}_{t=2\arctan u}=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{u^3du}{(1+u^2)^2(u^4+u^2+1)}$$

$$=\frac{\pi}{48}+\frac{\sqrt{3}}{12}-\frac{\pi}{18}$$

Mettendo tutto assieme ho $2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi}{18}+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{17\pi}{72}$

Oppure scrivere $\frac{\sin^3 tdt}{4-\sin^2 t}=-\sin t-\frac{2}{2+\sin t}+\frac{2}{2-\sin t}$ ed effettuare la stessa sostituzione

Qualcuno ha scritto $|V|=4\iint_{\substack{x\geq 0\ y\geq x/\sqrt{3}\\ y\leq 1/2}}\sqrt{1-x^2-y^2}dx\,dy$ per poi scrivere

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^{\frac{1}{2\sin t}}r\sqrt{1-r^2}dr=\frac13\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dt-\frac13\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{1}{4\sin^2 t}\right]^{\frac32}dt=\frac{\pi}{9}-\frac13\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(3-4\cos^2 t)^{3/2}}{8\sin^3 t}dt=$$

$$\underbrace{=}_{t=\arctan x}\frac{\pi}{9}-\frac{1}{24}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty}\frac{(3x^2-1)^{3/2}}{x^3(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{9}-\frac38\int_1^{+\infty}\frac{(u^2-1)^{3/2}}{u^3(3+u^2)}du=$$

$$\underbrace{=}_{y=1/x}\frac{\pi}{9}-\frac38\int_0^1\frac{(1-y^2)^{3/2}}{1+3y^2}dy\underbrace{=}_{y=\sin t}\frac{\pi}{9}-\frac38\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 t}{1+3\sin^2 t}dt=\frac{\pi}{9}-\frac{\pi}{6}+\frac{11\pi}{96}=\frac{17\pi}{288}$$

che moltiplicata per quattro dà il risultato.

1.1) Dobbiamo calcolare

$$\int_{\frac{-7\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3} + \pi = \frac{11\pi}{3}$$

Il primo integrale è il calcolo della superficie $\{x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \leq |x|/\sqrt{3}\}$. Il secondo è della superficie $\{x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \geq 1/2\}$. che però dà lo stesso risultato del calcolo della superficie $\{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 1/2\}$.

Il calcolo del secondo integrale si può eseguire anche senza scambiare y con z e viceversa seguendo il calcolo del volume

$$2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int_{\arcsin\frac{1}{2\sin\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin\vartheta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sqrt{4\sin^2\varphi - 1}}{\sin\varphi} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sqrt{3-4\cos^2\varphi}}{\sin\varphi} d\varphi \underbrace{=}_{\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+3\sin^2 x} dx = \pi$$

2) In trasformata di Laplace diventa $U(x,p) \doteq \mathcal{L}(u(x,t))$

$$p^2 U(x,p) - a^2 U_{xx}(x,p) = 0 \qquad U(0,p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$U(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{\frac{-px}{a}} \qquad (\alpha = 0) \qquad U(x,0) = \beta = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

da cui $U(x,p) = \dfrac{\omega e^{\frac{-px}{a}}}{p^2+\omega^2}$ e quindi $U(x,t) = \sin(\omega(t-\dfrac{x}{a}))H(t-\dfrac{x}{a})$

Errore più frequente Non riconoscere che $H(t-\dfrac{2x}{a})H(\dfrac{x}{a}-t)$ è nullo. Dal prossimo appello un errore del genere comporterà l'annullamento dell'esercizio.

3) L'integrale converge in quanto $\lim\limits_{x\to\mp 1}(x\pm 1)f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|^{\frac{3}{2}}f(x) = 0$. Per calcolarlo scriviamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2(1-\cos(2\pi x))}{(x^2-1)(x^2-x+1)} dx = V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2(x^2-1)(x^2-x+1)} dx +$$
$$- V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos(2\pi x)}{2(x^2-1)(x^2-x+1)} dx = V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2(x^2-1)(x^2-x+1)} dx +$$
$$- V.P.\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{i2\pi x}}{2(x^2-1)(x^2-x+1)} dx \doteq I_1 - I_2$$

I_1. Passiamo alla funzione complessa $f(z) = \dfrac{z^2}{2(z^2-1)(z^2-z+1)}$

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = i\pi \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)z^2}{2(z+1)(z-1)(z^2-z+1)} + i\pi \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)z^2}{2(z+1)(z-1)(z^2-z+1)} +$$
$$+ 2\pi i \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{z^2(z-e^{\frac{i\pi}{3}})}{2(z^2-1)(z^2-z+1)} = \frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{12} + 2\pi i \frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2(e^{\frac{2i\pi}{3}}-1)(2e^{\frac{i\pi}{3}}-1)} = \frac{i\pi}{6} - \frac{i\pi}{3}(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})$$

e...magia delle magie! La parte in i si cancella (qui non c'è nessuna parte reale da prendere per cui le parti immaginarie devono andarsene) regalandoci il valore dell'integrale $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

I_2. I calcoli sono sostanzialmente gli stessi.

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = i\pi \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)z^2e^{i2\pi z}}{2(z+1)(z-1)(z^2-z+1)} + i\pi \lim_{z\to -1}\frac{(z+1)z^2e^{i2\pi z}}{2(z+1)(z-1)(z^2-z+1)}+$$

$$+2\pi i \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}}\frac{z^2e^{i2\pi z}(z-e^{\frac{i\pi}{3}})}{2(z^2-1)(z^2-z+1)} =$$

$$=\frac{i\pi}{4}-\frac{i\pi}{12}+2\pi i\frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{i2\pi(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2})}}{2(e^{\frac{2i\pi}{3}}-1)(2e^{\frac{i\pi}{3}}-1)} = \frac{i\pi}{6}+\frac{\pi i}{3}(\frac12+\frac{i\sqrt3}{2})e^{-\pi\sqrt3}$$

Va presa la parte reale ossia $\dfrac{-\pi}{2\sqrt3}e^{-\pi\sqrt3}$ e quindi il risultato è $\dfrac{\pi}{2\sqrt3}(1+e^{-\pi\sqrt3})$

Errore più frequente scrivere $\sin^2(\pi x)=\mathrm{Im}(e^{i2\pi x})$. Dal prossimo appello un errore del genere comporterà l'annullamento dell'esercizio

4) La forma è chiusa.

Prima soluzione La prima curva giace nel primo e secondo quadrante che è un sottoinsieme semplicemente connesso del piano. Cerchiamo il potenziale. Conviene scrivere

$$\omega=\omega_1+\omega_2=\frac{-2ydx+2xdy}{4x^2+y^2}-\frac{2xdx+8ydy}{x^2+4y^2}\to U(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{2x}-\ln(x^2+4y^2) & x>0\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{2x}-\ln(x^2+4y^2) & x<0\\ \pi/2-\ln(x^2+4y^2), & x=0, y>0\end{cases}$$

e quindi $U(1,0)-U(\dfrac{-1}{2},\dfrac34)=-\pi+\arctan\dfrac34+\ln(\dfrac52)$

Scrivere che il potenziale nel primo e secondo quadrante sarebbe $\arctan\dfrac{y}{2x}-\ln(x^2+4y^2)$ **è un grave errore. Basta vedere che la funzione non è definita per** $x=0$

Per il secondo integrale abbiamo

$$\oint_{\underline{\gamma}}\omega = (\lim_{\substack{x\to0^-\\y=-1}}U(x,y)-\lim_{\substack{x\to0^-\\y=1}}U(x,y))+(\lim_{\substack{x\to0^+\\y=1}}U(x,y)-\lim_{\substack{x\to0^+\\y=-1}}U(x,y))=$$

$$=(\pi+\frac{\pi}{2}-\ln4)-(\pi-\frac{\pi}{2}-\ln4)+(\frac{\pi}{2}-\ln4)-(\frac{-\pi}{2}-\ln4)=2\pi$$

• Alcuni sono arrivati alla formula $U(x,y)=-\arctan\dfrac{2x}{y}-\ln(x^2+4y^2)$ e per calcolare l'integrale sulla prima curva va bene purché si scriva

$$\int_{\underline{\gamma}_1}\omega=\lim_{\substack{y\to0\\x>0}}U(x,y)-U(\frac12,\frac34)=\frac{-\pi}{2}+\arctan\frac{-4}{3}+\ln\frac52=\frac{-\pi}{2}-\arctan\frac43+\ln\frac52=$$

$$=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac34+\ln\frac52$$

Per calcolare il secondo integrale abbiamo però gli stessi problemi di prima. Dobbiamo definire qualcosa del tipo

$$U(x,y) = \begin{cases} -\arctan\dfrac{2x}{y} - \ln(x^2+4y^2) & y>0 \\ \pi - \arctan\dfrac{2x}{y} - \ln(x^2+4y^2) & y<0 \\ \pi/2 - \ln(x^2+4y^2), & y=0, x<0 \end{cases}$$

e l'integrale è $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0^-}} U(x,y) - \lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0^+}} U(x,y) = \dfrac{3\pi}{2} - (-\dfrac{\pi}{2}) = 2\pi$

Seconda soluzione Vogliamo evitare il potenziale.

Usando l'esattezza nel primo e secondo quadrante, l'integrale sulla prima curva può calcolarsi usando le due curve $\underline{\gamma}_1(t) = (t, 3/4)$ $-1/2 \le t \le 1$ e $\underline{\gamma}_2(t) = (1, -t)$ $-3/4 \le t \le 0$ e

$$\int_{\underline{\gamma}_1} \omega = -2\frac{3}{4}\int_{\frac{-1}{2}}^{1} \frac{dt}{4t^2+\frac{9}{16}} - 2\int_{\frac{-1}{2}}^{1}\frac{tdt}{t^2+\frac{9}{4}} = -\arctan\frac{8}{3} - \arctan\frac{4}{3} + \ln 2 + \ln 5 - \ln(13)$$

$$\int_{\underline{\gamma}_2} \omega = \int_{\frac{-3}{4}}^{0} (\frac{-2dt}{4+t^2} - \frac{8tdt}{1+4t^2}) = -\arctan\frac{3}{8} + \ln(13) - \ln 4$$

Sommando abbiamo

$$-\arctan\frac{3}{8} - \arctan\frac{4}{3} - \ln(13) + \ln 2 + \ln 5 - \arctan\frac{3}{8} + \ln(13) - 2\ln 2 =$$
$$= -\arctan\frac{3}{8} - \arctan\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{3}{4} + \ln 5 - \ln 2 = -\pi + \arctan\frac{3}{4} + \ln 5 - \ln 2$$

La seconda curva è chiusa e gira intorno all'origine. Usiamo Gauss–Green per ω_1 e ω_2. Per ω_2 scegliamo la curva $x = \cos t$ $y = \dfrac{\sin t}{2}$ e $\oint_{\underline{\gamma}} \omega_2 = 0$. Per calcolare $\oint_{\underline{\gamma}} \omega_1$ integriamo lungo la curva $x = \dfrac{\cos t}{2}$ e $y = \sin t$ $0 \le t \le 2\pi$ e vale 2π. Gli integrali sono immediati e non li scrivo.

• Si potevano pure calcolare direttamente gli integrali curvilinei senza altra considerazione

$$\int_{\substack{(t,1-t^2)\\-1/2\le t\le 1}} \omega = -2\int_{\frac{-1}{2}}^{1}\frac{dt}{1+t^2} - \int_{\frac{-1}{2}}^{1}\frac{16t^3-14t}{4t^4-7t^2+4}dt = \frac{-\pi}{2} - 2\arctan\frac{1}{2} + \ln\frac{5}{2}$$

e

$$\frac{-\pi}{2} - 2\arctan\frac{1}{2} = -\pi + \arctan\frac{3}{4} \iff \arctan\frac{4}{3} = 2\arctan\frac{1}{2} \iff \arctan\frac{4}{3} - \arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{1}{2}$$

ma

$$\arctan\frac{4}{3} - \arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{3}\frac{1}{2}} = \arctan\frac{1}{2}$$

Il calcolo $\oint_{\substack{(\cos t,\sin t)\\0\le t\le 2\pi}} \omega$ è più delicato. Lascio agli studenti l'onere relativo ma sottolineo il prossimo paragrafo

Alcuni hanno commesso il seguente errore per il quale sono stato indulgente, non così la prossima volta.

$$\oint_{\substack{(\cos t, \sin t)\\ 0\le t\le 2\pi}} \frac{-2ydx+xdy}{4x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2 t+\cos^2 t}{4\cos^2 t+\sin^2 t}dt$$

Poi hanno scritto

$$\int \frac{2\sin^2 t+\cos^2 t}{4\cos^2 t+\sin^2 t}dt \underbrace{=}_{t=\arctan u} \int \left[\frac{14}{3}\frac{1}{2u^2+8} - \frac{1}{3(1+u^2)}\right]du = \frac{7}{6}\arctan\frac{u}{2} - \frac{1}{3}\arctan u$$

e quindi la primitiva è

$$\frac{7}{6}\arctan\frac{t}{2} - \frac{t}{3} \implies \frac{7}{6}\arctan\frac{\tan t}{2} - \frac{t}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{-2\pi}{3} < 0$$

ma l'integrale è positivo. **Dove sta l'errore?**