Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

**Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)**
**01–09–2021 A.A. 2020/2021, Sessione eutunnale, primo appello**

**Nome**(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

# CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

**Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate passo per passo e non basta scrivere la soluzione**

**I presenti in aula che intendono ritirarsi scrivano ritirata/o sotto il proprio cognome**

**1)** (10 punti) Sia $S$ la regione del piano $(y,z)$ definita da $S=\{(y,z)\colon \frac{y^2}{2}\le z\le y-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi y}{2}, 0\le y\le 1\}$. 1) Calcolare il volume della regione nello spazio $(x,y,z)$ detta $V_z$, ottenuta ruotando $S$ intorno all'asse $z$ di 360 gradi 2) Calcolare il volume della regione nello spazio $(x,y,z)$ detta $V_y$, ottenuta ruotando $S$ intorno all'asse $y$ di 360 gradi 3) Calcolare il volume della regione nello spazio $(x,y,z)$ detta $V_1$, ottenuta ruotando $S$ intorno alla bisettrice del piano $(y,z)$ di 360 gradi 4) Calcolare il volume della regione nello spazio $(x,y,z)$ detta $V_2$, ottenuta ruotando $S$ intorno all retta di equazione $z=y/2$ di 180 gradi

**2)** (12 punti) Risolvere la equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=Af(t)\cos x \quad \omega, A, B\in\mathbf{R}, \quad x,t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u_x(0,t)=B\cos(\omega t), \end{cases}$$

dove $f(t)=t$ per $0\le t\le 1$, $f(t)=1$ per $t>1$.

**3)** (10 punti) Sia data la forma differenziale $\omega=\frac{-y}{x^2+y^2-4x+4}dx+\frac{3x^2+3y^2-11x+10}{x^2+y^2-4x+4}dy$. Sia inoltre dato l'insieme $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon x^2/9+y^2=1,\ x\ge 0\}$ e sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva regolare semplice il cui sostegno è $S$ e percorsa nel verso che va dalle $y$ negative alle $y$ positive. Calcolare $\int_{\underline{\gamma}}\omega$

## Soluzioni

**1)**

$$|V_z|=2\pi\iint_S y\,dydz=\frac{5\pi}{12}-\frac{4}{\pi}, \qquad |V_y|=2\pi\iint_S z\,dydz=\frac{49\pi}{120}-\frac{4}{\pi}$$

$$|V_1|=2\pi\iint_S\frac{y-z}{\sqrt{2}}\,dydz=\frac{\sqrt{2}\pi}{240}$$

I grafici delle due funzioni giaccio entrambi sotto la retta $z=y/2$ per cui

$$|V_2|=\frac{2\pi 2}{\sqrt{5}}\iint_S(y/2-z)\,dydz=\frac{10-\pi^2}{\pi}\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

**2)** Detta $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo $v_{xx}(x,t)-\dfrac{p^2}{a^2}v(x,t)=-\dfrac{A}{a^2}\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{e^{-p}}{p^2}\right)\cos x$, $v_x(0,p)=\dfrac{Bp}{p^2+\omega^2}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}|v(x,p)|=0$ uniformemente in $p$. Viene fuori l'espressione

$$v(x,p)=\frac{-Bae^{-px/a}}{p^2+\omega^2}+\frac{A\cos x}{p^2+a^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}\right)$$

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{-Ba}{\omega}H(t-\frac{x}{a})\sin\omega(t-\frac{x}{a})+A\cos x\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p^2+a^2}-\frac{e^{p(t-1)}}{p^2+a^2}H(t-1)\right)\Big|_{p=0}+\\&+\frac{A\cos x}{2ia}\left(\frac{1}{-a^2}-\frac{e^{-ia}}{-a^2}\right)e^{iat}+\frac{A\cos x}{2ia}\left(\frac{1}{-a^2}-\frac{e^{ia}}{-a^2}\right)e^{-iat}=\\&=\frac{-Ba}{\omega}H(t-\frac{x}{a})\sin\omega(t-\frac{x}{a})+\frac{A}{a^3}\cos x\sin(at)-\frac{A}{a^3}\cos x\sin a(t-1)H(t-1)+\\&+\frac{A}{a^2}\cos x\,(t-(t-1)H(t-1))\end{aligned}$$

**3)** Si può risolvere in molti modi. Il più semplice probabilmente è il seguente. La forma è definita dappertutto tranne in $(2,0)$ ed è chiusa. sia $\underline{\sigma}(t)=(0,-t)$, $-1\le t\le 1$. La curva $\gamma\cup\sigma$ è chiusa. Detta $\underline{\rho}(t)=(2+\dfrac{\cos t}{2},\dfrac{\sin t}{2})$, per il Lemma di Gauss–Green $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}\cup\underline{\sigma}}\omega=\oint_{\underline{\rho}}\omega=2\pi$ (sulla curva $\rho$ si esegue il calcolo esplicitamente) da cui $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}}\omega=2\pi-\oint_{\underline{\sigma}}\omega=2\pi+\int_{-1}^{1}\frac{3t^2+10}{t^2+4}dt=\pi+6+2\arctan 2$

**Seconda soluzione** Se disegnamo una “salsiccia” a forma di $\supset$ intorno alla curva $\underline{\gamma}$ che non tocca la curva e non contiene all'interno il punto $(2,0)$, tale insieme è semplicemente connesso e quindi la forma ivi definita è esatta e quindi si può definire il potenziale.

$$\overline{U}(x,y)=\int\frac{-y}{(x-2)^2+y^2}dx+c(y)=-\arctan\frac{x-2}{y}+c(y)$$

e viene fuori che $c(y)=3y$. Il potenziale definito dentro la “salsiccia” è

$$U(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{x-2}{-y}+3y, & y>0\\[2mm] -\pi+\arctan\dfrac{x-2}{-y}+3y, & y<0\\[2mm] -\pi/2 & y=0\end{cases}$$

Bisognerebbe verificare che la funzione $U(x,y)$ e $C^1$ sul semipiano destro. Il risultato è $U(0,1)-U(0,-1)=\arctan 2+3-(-\pi+\arctan(-2)-3)=6+\pi+2\arctan 2$

Si può anche scrivere

$$U(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x-2}+3y, & x>2\\[2mm] \pi+\arctan\dfrac{y}{x-2}+3y, & x<2\\[2mm] \pi/2+3y & x=2, y>0\end{cases}$$

Il risultato è

$$\left[U(0,1)-\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2/3)\\ x<2}}U(x,y)\right]+\left[\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2/3)\\ x>2}}U(x,y)-\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-2/3)\\ x>2}}U(x,y)\right]+$$

$$+\left[\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-2/3)\\ x<2}}U(x,y)-U(0,-1)\right]=$$

$$=\left[\arctan\frac{1}{-2}+3+\pi-\frac{\pi}{2}+2\right]+\left[\frac{\pi}{2}+2-\left(\frac{-\pi}{2}+2\right)\right]+\left[\pi+\frac{\pi}{2}-2-\pi-\arctan\frac{-1}{-2}+3\right]=$$

$$=2\pi+6-2\arctan\frac{1}{2}=\pi+6+2\arctan 2$$

ma $U(x,y)$ non è un potenziale nel semipiano destro