Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
28–11–2020 A.A. 2019/2020, Ottavo appello (straordinario)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1, 1.1, 2, 3, 5. Gli studenti di **Informatica**, risolvano gli esercizi 1 (non 1.1) 3, 4, 5.

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate e non basta scrivere la soluzione

1) (7.5 punti per Informatica; 4,5 punti per Elettronica&Internet) Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_V |(x^2+y^2-3z^2)(y-\sqrt{3}x)|dx\,dy\,dz$ esteso all'insieme $V \doteq \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

1.1) (3 punti solo per Elettronica&Internet) Si calcoli $\int_\varphi \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3 - yz^2)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e φ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno è dato dall'insieme $z = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2$, $z = 2x + y$

2) (6.5 punti) Sull'insieme (curva) di equazione

$$\left\{ \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{3}{4}y^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}xy}{2} \quad z = \frac{3}{4}y^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}xy}{2} \right\}$$

si trovi il punto che ha distanza minima dal punto $(0,0,1)$. (si tratta di un problema di estremi vincolati con due moltiplicatori di Lagrange)

2.1) (1 punto) Se esiste si trovi anche il punto di distanza massima. Se non esiste lo si dimostri

3) (7.5 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = H(t - \frac{x}{a})H(\frac{2x}{a} - t) & x, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

4) (7.5 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+1}dx$
evidenziando il cammino di integrazione e parametrizzando **ogni singolo tratto.** L'integrale è reale e voglio un risultato reale.

5) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale
$\omega = \dfrac{-y^2x(3x^4+2y^4+2x^2y^2)}{(x^4+y^4)(2x^4+y^4+2x^2y^2)}dx + \dfrac{x^2y(3x^4+2y^4+2x^2y^2)}{(x^4+y^4)(2x^4+y^4+2x^2y^2)}dy$. Si calcoli l'integrale lungo la curva il cui sostegno è $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$ nel tratto che va dal punto $(1,0)$ al punto $(0,1)$.

Soluzioni

1) $a \doteq \pi/3$. In coordinate sferiche $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$. $A = x^2+y^2-3z^2 = r^2\sin^2\vartheta - 3r^2\cos^2\vartheta$, $B = y-\sqrt{3}x = r\sin\vartheta\sin\varphi - \sqrt{3}r\sin\vartheta\cos\varphi$

$$\int_a^{4a} d\varphi \int_a^{2a} d\vartheta \int_0^1 ABr^2\sin\vartheta +$$
$$+\left[\int_a^{4a} d\varphi \int_0^a d\vartheta \int_0^1 (-A)Br^2\sin\vartheta + \int_a^{4a} d\varphi \int_{2a}^{3a} d\vartheta \int_0^1 (-A)Br^2\sin\vartheta\right] +$$
$$+\int_{4a}^{a+2\pi} d\varphi \int_a^{2a} d\vartheta \int_0^1 A(-B)r^2\sin\vartheta +$$
$$+\left[\int_{4a}^{a+2\pi} d\varphi \int_0^a d\vartheta \int_0^1 (-A)(-B)r^2\sin\vartheta + \int_{4a}^{a+2\pi} d\varphi \int_{2a}^{3a} d\vartheta \int_0^1 (-A)(-B)r^2\sin\vartheta\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right] = \sqrt{3}$$

In coordinate cilindriche $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = u$ otteniamo

$$\left[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin t - \sqrt{3}\cos t)dt + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3}\cos t - \sin t)dt\right]\left[\int_0^{\frac{1}{2}} 2du \int_{\sqrt{3}u}^{\sqrt{1-u^2}} drr^2(r^2-3u^2) +\right.$$
$$\left. + \int_0^{\frac{1}{2}} 2du \int_0^{\sqrt{3}u} drr^2(3u^2-r^2) + \int_{\frac{1}{2}}^1 2du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} drr^2(3u^2-r^2)\right] =$$
$$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{32} + \frac{\sqrt{3}}{320} + \frac{9}{320}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$$

Indicazioni sulla correzione. Bisognava trattare due disequazioni trigonometriche per togliere i moduli. Chi ha tolto i moduli e basta o chi ha sbagliato tutte e due le disequazioni ha avuto 0. Chi ha ottenuto un risultato negativo oppure zero, ha avuto zero.

1.1) Applichiamo il Teorema di Stokes. $\mathrm{rot}(yz - \frac{1}{3}y^3 - yz^2, xz + \frac{1}{3}x^3, xy) = (0, -2yz, x^2 + y^2 + z^2)$. La superficie (piano) su cui integrare è $(x = \frac{1}{2} + \frac{r\cos t}{\sqrt{2}}$ $y = 1 + \sqrt{2}r\sin t$, $z = 2 + \sqrt{2}r(\cos t + \sin t)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le t \le 2\pi$. La normale al piano è $(-2,-1,1)/\sqrt{6}$ e l'integrale cercato è

$$\iint_S (2yz + x^2 + y^2 + z^2)d\sigma =$$
$$= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 rdr\left[\frac{37}{4} + \frac{13}{2}r\sqrt{2}\cos t - \frac{11}{2}r^2\cos^2 t + 12r\sqrt{2}\sin t + 8r^2 + 4r^2\sin(2t)\right] = \frac{95}{8}\pi$$

Si tenga presente che i termini $\cos t, \sin t, \cos t\sin t$ danno contributo nullo.

2) Scrivendo $(y-\sqrt{3}x)/2 = v$, $(\sqrt{3}y + x)/2 = u$ si ottiene $v = u^2$, $z = u^2$ e si veda l'esercizio analogo nel giornale delle lezioni a pag.43. Una soluzione alternativa è studiare $u^2 + v^2 + (z-1)^2 = u^2 + u^4 + (u^2-1)^2 = f(u)$. Si ottiene $(u,v,z) = (0,0,0) \doteq P_0$ e $P_{1,2,} \doteq (\pm 1/2, 1/4, 1/4)$ da cui $(x,y,z) = (0,0,0)$, (massimo) $(x,y,z) = (\frac{2-\sqrt{3}}{8}, \frac{1+2\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{4})$, $(x,y,z) = (\frac{-2-\sqrt{3}}{8}, \frac{-1+2\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{4})$. (minimi).

2.1) Il massimo non esiste in quanto la curva $v = u^2, z = u^2$ è illimitata e quindi la distanza dal punto $(0, 0, 1)$ è illimitata.

3) $E(x,p) \doteq e^{\frac{-px}{a}} \mathcal{L}(H(t - x/a)H(2x/a - t)) = \dfrac{E - E^2}{p}$. $p^2 v(x,p) - a^2 v_{xx}(x,p) = \dfrac{E - E^2}{p}$. La soluzione della non omogenea è la somma di due termini. Il primo è $\dfrac{x}{2ap^2}E$ e il secondo è $\dfrac{E^2}{3p^3}$. Mettendo tutto assieme si ha $v(x,p) = \alpha E + \dfrac{xE}{2ap^2} + \dfrac{E^2}{3p^3}$ e $v_x(0,p) = \dfrac{-p\alpha}{a} + \dfrac{1}{2ap^2} - \dfrac{2}{3ap^2} = 0$ da cui $\alpha = \dfrac{-1}{6p^3}$ e $v(x,p) = \dfrac{-E}{6p^3} + \dfrac{xE}{2ap^2} + \dfrac{E^2}{3p^3}$. Finalmente $u(x,t) = \left[\dfrac{-1}{12}(t - \dfrac{x}{a})^2 + \dfrac{x}{2a}(t - \dfrac{x}{a})\right] H(t - \dfrac{x}{a}) + \dfrac{1}{6}(t - \dfrac{2x}{a})^2 H(t - \dfrac{2x}{a})$

4) Scrivendo $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 1}dx$. Si chiude nel semipiano superiormente e si ottiene $\dfrac{1}{2}2\pi i \left(\dfrac{1}{4}e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} + \dfrac{1}{4}e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\right) = \dfrac{\pi}{2}ie^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ da cui $\dfrac{\pi}{2}e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Chi ha usato il cammino "a pacman" e ha calcolato quattro residui ha avuto 0

5) Prima soluzione

Conviene osservare che la forma può scriversi come

$$\frac{-y^2x(x^4 + x^4 + x^4 + y^4 + y^4 + 2x^2y^2)dx + x^2y(x^4 + x^4 + x^4 + y^4 + y^4 + 2x^2y^2)dy}{(x^4 + y^4)(x^4 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2)} =$$
$$= \frac{-y^2x(x^4 + y^4 + (x^4 + (x^2 + y^2)^2))dx + x^2y(x^4 + y^4 + (x^4 + (x^2 + y^2)^2))dy}{(x^4 + y^4)(x^4 + (x^2 + y^2)^2)} =$$
$$= \frac{-y^2xdx + x^2ydy}{x^4 + (x^2 + y^2)^2} + \frac{-y^2xdx + x^2ydy}{x^4 + y^4} \doteq \omega_1 + \omega_2$$

Ora osserviamo che ciascuna delle due forme è chiusa e proviamo a trovare una primitiva. Cominciamo da ω_2. Dobbiamo risolvere l'equazione $U_x = -y^2x/(x^4 + y^4)$ ossia

$$U(x,y) = \int \frac{-y^2xdx}{x^4 + y^4} = \int \frac{-y^2}{x^3}\frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^4}}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{y^2}{x^2} + C(y)$$

Poi bisogna risolvere

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{2yx^2}{x^4 + y^4} + C'(y) = \frac{2yx^2}{x^4 + y^4} \implies C(y) = C_0$$

e quindi $U(x,y) = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{y^2}{x^2}$ se $x \neq 0$. $\lim\limits_{x\to 0} U(x,y) = \pi/4$ e quindi definiamo $U(0,y) = \pi/4$, e $U(x,y) = \arctan(\dfrac{y^2}{x^2})$ se $x \neq 0$

Verifichiamo che $U(x,y)\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è una funzione C^1.

Calcolo derivate

$U_x(x,y) = -y^2x/(x^4 + y^4)$ se $x \neq 0$. Se $x = 0$ abbiamo

$$U_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U(h,y) - U(0,y)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}(\arctan\frac{y^2}{h^2} - \frac{\pi}{2}) = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2h}\arctan\frac{h^2}{y^2} = 0 \quad (y \neq 0)$$

e chiaramente $U_y(0,y)=0$. Una volta trovate le derivate verifichiamo che siano continue. In $(x,y)\neq(0,y)$ sono chiaramente continue.

Sia $(x,y)=(0,y_0)$, $y_0\neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} U_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\frac{-y^2x}{x^4+y^4}=0$$

$y\to y_0$ per cui definitivamente $|y-y_0|<|y_0|/2$. Ne segue $|y_0|/2<|y|<3|y_0|/2$ e quindi

$$\Big|\frac{-y^2x}{x^4+y^4}\Big|\leq\frac{(9/4)y_0^2|x|}{(|y_0|/2)^4}=\frac{36|x|}{y_0^2}$$

Allo stesso modo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y)} U_y(x,y)=0$ e quindi la funzione $U(x,y)$ scritta prima è una primitiva e la forma è esatta.

Notare che un ragionamento del genere è impossibile con la forma $\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

La relazione

$$U(x,y)=\int\frac{-y^2xdx}{x^4+y^4}=\int\frac{-y^2}{x^3}\frac{1}{1+\frac{y^4}{x^4}}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{y^2}{x^2}+C(y)$$

o viene trovata tramite intuizione oppure si può procedere nel seguente modo $(x,y>0)$ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2-\sqrt{2}xy+y^2)(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)$

$$\frac{x}{x^4+y^4}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}xy+y^2}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}xy+y^2}$$

e svolgendo i calcoli si ha $A=C=0$, $B=-D=\dfrac{1}{2\sqrt{2}y}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}y}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}xy+y^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}y}\int\frac{dx}{(x-\frac{y}{\sqrt{2}})^2+\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}y^3}\int\frac{dx}{1+(\frac{\sqrt{2}x}{y}-1)^2}=$$
$$=\frac{1}{2y^2}\arctan(\frac{\sqrt{2}x}{y}-1)+C_1(y)$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{2}y}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}xy+y^2}=\frac{-1}{2y^2}\arctan(\frac{\sqrt{2}x}{y}+1)+C_2(y)$$

La somma dà (col $-y^2$ davanti)

$$\frac{1}{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}x}{y}+1)-\frac{1}{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}x}{y}-1)=\frac{1}{2}\arctan\frac{\frac{\sqrt{2}x}{y}+1-\frac{\sqrt{2}x}{y}-1}{1+(\frac{\sqrt{2}x}{y}+1)(\frac{\sqrt{2}x}{y}-1)}+C_1(y)+C_2(y)+C_3=$$
$$\frac{1}{2}\arctan\frac{y^2}{x^2}+C_1(y)+C_2(y)+C_3=U(x,y)$$

Derivando poi rispetto a y si vede che $C_1(y)=C_2(y)=0$ e la discussione dulla forma ω_2 è conclusa.

Per ω_1 si procede allo stesso modo e quando serve, si usa $2x^4+y^2+2x^2y^2=(\sqrt{2}x^2+y^2)^2+2x^2y^2(1-\sqrt{2})$

Alla fine la forma

$$\omega = -y^2 x \left(\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{2x^4+y^4+2x^2y^2} \right) dx + x^2 y \left(\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{2x^4+y^4+2x^2y^2} \right) dx$$

ammette la primitiva $F(x,y)\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $F(x,y) = \frac{1}{2}\arctan(y^2/x^2) + \frac{1}{2}\arctan(1+y^2/x^2)$ se $x\neq 0$, mentre $F(0,y)=\pi/2$. Il risultato è $F(0,1)-F(1,0) = \pi/2 - \pi/8 = 3\pi/8$

La ricerca della primitiva può procedere a prescindere dall'aver verificato o meno che la forma sia chiusa. Se ammette le primitiva è esatta e quindi chiusa.

Seconda soluzione Un altro modo di procedere consiste nell'osservare che la forma è chiusa e la curva giace in un insieme semplicemente connesso (il primo quadrante tolta l'origine). La forma è esatta nell'insieme costruito e a quel punto si può cambiare curva prendendo una curva costituita da due tratti paralleli rispettivamente ad uno degli assi

Il cammino che usiamo è $\underline{\gamma}_1(t) = (1,t)$, $0\le t\le 1$, $\underline{\gamma}_2(t) = (-t,1)$, $-1\le t\le 0$.

$$\int_{\underline{\gamma}_1} \omega = \int_0^1 \frac{t(3+2t^4+2t^2)}{(1+t^4)(t^4+2t^2+2)} dt = \int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^4} + \int_0^1 \frac{t\,dt}{t^4+2t^2+2}$$

$$\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^4} \underbrace{=}_{t=\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+(t^2+1)^2} \underbrace{=}_{t^2+1=x} \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}(1+x^2)} = \frac{1}{2}(\arctan 2 - \frac{\pi}{4})$$

$$\int_{\underline{\gamma}_2} \omega = \int_{-1}^0 \frac{t(3t^4+2t^2+2)}{(1+t^4)(2t^4+2t^2+1)}(-dt) = \int_{-1}^0 \frac{-t\,dt}{1+t^4} - \int_{-1}^0 \frac{t\,dt}{2t^4+2t^2+1} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_2^1 \frac{dx}{2x^2-2x+1} =$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arctan 3$$

Sommando abbiamo

$$\frac{\arctan 2 + \arctan 3}{2} = \frac{1}{2}(\arctan\frac{2+3}{1-2\cdot 3} + \pi) = 3\pi/8$$