Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
25–09–2020 A.A. 2019/2020, Settimo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1, 1.1, 2, 3, 5. Gli studenti di **Informatica**, risolvano gli esercizi 1 (non 1.1) 3, 4, 5.

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate e non basta scrivere la soluzione

1) (7.5 punti per Informatica; 4,5 punti per Elettronica&Internet) Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_V \frac{(y-x)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy\,dz$ esteso all'insieme $V \doteq \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon 0 \le z \le \sqrt{2(x^2+y^2)} \le 3+(x+y)/2\}$

1.1) (solo Elettronica&Internet; 3 punti) Si consideri l'insieme $\underline{\gamma} \doteq \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z = 4 - \sqrt{2(x^2+y^2)}, z = -1\}$ percorsa in senso antiorario (nel senso che la proiezione della curva sul piano (x, y) è percorsa in senso antiorario) e si consideri $\underline{\sigma} \doteq \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z = 4 - \sqrt{2(x^2+y^2)}, z = 1\}$ percorsa in senso orario (nel senso che la proiezione della curva sul piano (x, y) è percorsa in senso orario) e si calcoli $\int_{\underline{\gamma}\cup\underline{\sigma}} \omega$ con $\omega = (-zy + \sin y + z\cos x)dx + (zx + \sin z + x\cos y)dy + (\sin x + y\cos z)dz$

2) (7.5 punti) Si trovino le coordinate del massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0$ e tale che (x, y) stia nel rettangolo di vertici $(-1, 1)$ $(2, 1)$, $(-1, -2)$, $(2, -2)$

3) (7.5 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = (t - \frac{x}{a})\sin(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) & x, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

Tutte le volte che capita un termine noto analogo a quello in oggetto, c'è sempre un gruppo di studenti che commette un errore tipico con il conseguente azzeramento del voto. A buon intenditor...

4) (7.5 punti) Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/4}}{x^3+2x^2+x+2}dx$ evidenziando il cammino di integrazione e parametrizzando **ogni singolo tratto.** L'integrale è reale e voglio un risultato reale.

5) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale

$$\frac{-2y(x^2+y^2-4)}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}dx + \frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}dy.$$

Si calcoli

5.1) $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è la curva che fa da sostegno alla circonferenza $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ e percorsa in senso antiorario.

5.2) $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è la curva che fa da sostegno alla circonferenza $x^2+y^2=9$ e percorsa in senso antiorario.

5.3) $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è la curva che fa da sostegno alla circonferenza $(x-1)^2+(y-3/2)^2=1$ e percorsa in senso antiorario.

Soluzioni

1) Prima soluzione “Integrazione per fili” Dobbiamo intersecare cono e piano $z=3+(x+y)/2=\sqrt{2x^2+2y^2}$ se e solo se $3+(x+y)/2\geq 0$ e $2x^2+2y^2=9+(x^2+y^2)/4+xy/2+3x+3y$

Mettiamo in forma canonica la forma quadratica $(7x^2+7y^2)/4-xy/2$ attraverso la trasformazione $x=(u-v)/\sqrt{2}$, $y=(u+v)/\sqrt{2}$ e

$$2x^2+2y^2=9+(x^2+y^2)/4+xy/2+3(x+y)/2 \ \to\ \frac{3}{2}u^2+2v^2-3\sqrt{2}u=9 \iff$$
$$\iff \quad 2v^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u-\sqrt{3}\right)^2=12 \to u=\sqrt{2}+2\sqrt{2}r\cos t,\ v=\sqrt{6}r\sin t$$

Quindi

$$\iiint_V \frac{(y-x)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy\,dz=\iint_{2v^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u-\sqrt{3}\right)^2\leq 12}\frac{2v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}du\,dv\int_0^{\sqrt{2u^2+2v^2}}dz=$$
$$=2\sqrt{2}\iint_{2v^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u-\sqrt{3}\right)^2\leq 12}v^2du\,dv=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 drr4\sqrt{36}r^2\sin^2 t=\frac{48\sqrt{6}\pi}{4}=12\sqrt{6}\pi$$

Seconda soluzione Parametrizziamo direttamente lo spazio in coordinare cilindriche

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ z=u,\qquad 0\leq u\leq\sqrt{2}r,\qquad \sqrt{2}r\leq 3+\frac{r\cos t+r\sin t}{2}$$

$r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}-\frac{\cos t+\sin t}{2}}$ e osserviamo che $2-\dfrac{\cos t+\sin t}{2}\geq\sqrt{2}-1>0$ come deve essere. L'integrale che cerchiamo è

$$\int_0^{2\pi}dt\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}-\frac{\cos t+\sin t}{2}}}rdr\frac{r^2(\cos t-\sin t)^2}{r}\int_0^{\sqrt{2}r}du=$$
$$=\int_0^{2\pi}dt(\cos t-\sin t)^2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}-\frac{\cos t+\sin t}{2}}}\sqrt{2}r^3dr=\frac{81}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos t-\sin t)^2}{\left(\sqrt{2}-\frac{\cos t+\sin t}{2}\right)^4}dt=$$
$$=\frac{81}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin(t-\pi/4))^2}{\left(\sqrt{2}-\frac{\sin(t+\pi/4)}{\sqrt{2}}\right)^4}dt=\frac{81}{\sqrt{2}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\left(\sqrt{2}-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^4}dt=\frac{324}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{(2-\cos t)^4}dt=$$
$$=\frac{324}{\sqrt{2}}\frac{-\sin t}{3(2-\cos t)^3}\Big|_0^{2\pi}+\frac{108}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{(2-\cos t)^3}dt=$$
$$=\frac{108}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{(2-\cos t)^3}-\frac{1}{(2-\cos t)^2}\right]dt$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2-\cos t)^2}=2\int_0^{\pi}\frac{dt}{(2-\cos(2t))^2}=2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(2-\cos(2t))^2}=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+t^2)dt}{(1+3t^2)^2}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2-\cos t)^3}=2\int_0^{\pi}\frac{dt}{(2-\cos(2t))^3}=2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(2-\cos(2t))^3}=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+t^2)^2dt}{(1+3t^2)^3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Riunendo si ha $\dfrac{108}{\sqrt{2}}\pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}\right)=12\sqrt{6}\pi$

1.1) Applichiamo il Teorema di Stokes alla porzione di cono compresa fra i due piani, detta S. Sia $\underline{V}=(-zy+\sin y+z\cos x, zx+\sin z+x\cos y, \sin x+y\cos z)$. Il vettore esterno è $\underline{v}^e=\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$, $\underline{n}^e=\underline{v}^e/\|\underline{v}^e\|$, Il rotore ci dà $(-x,-y,2z)$ e quindi l'integrale è

$$\begin{aligned}
&\iint_S (\mathrm{rot}\underline{V}, \underline{n}^e)d\sigma = \iint_S (\mathrm{rot}\underline{V}, \underline{v}^e)\frac{d\sigma}{\|\underline{v}^e\|} = \\
&= \iint_{9/2\le x^2+y^2\le 25/2} \left(\frac{-\sqrt{2}x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sqrt{2}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2z\right)\frac{\|\underline{v}^e\| dx\,dy}{\|\underline{v}^e\|} = \\
&= \iint_{9/2\le x^2+y^2\le 25/2} \left(\frac{-\sqrt{2}x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sqrt{2}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2(4-\sqrt{2x^2+2y^2})\right) dx\,dy = \\
&= \iint_{9/2\le x^2+y^2\le 25/2} (8-3\sqrt{2x^2+2y^2})dx\,dy = -34\pi
\end{aligned}$$

Sempre usando il teorema di Stokes, ssiste un altro modo di risolvere l'esercizio

2) La funzione $h(x,y)=x^2-y^2-x+y+1$ è continua e quindi l'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 : h(x,y)=0\}$ è chiuso **ma non limitato** ma è limitata la parte che sta nel rettangolo e quindi è compatto. La funzione $x+y$ è continua, definita su un insieme compatto e quindi ammette massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass.

Chi avesse letto attentamente le soluzioni del 9/9/2020 se ne sarebbe potuto rendere conto. Chi non lo ha fatto ha dato prova di superficialità e ne subirà le conseguenze

Si vede facilmente che il sistema dettato dall'uso dei moltiplicatori di Lagrange non ammette soluzioni. Non ci resta che analizzare cosa succede al bordo del quadrato.

Lato verticale sinistro. $x=-1$, e $-2\le y\le 1$. Si ha $(x^2-y^2-x+y+1)=0 \iff 3-y^2+y=0 \iff y=(1-\sqrt{13})/2$ e la funzione $f(x,y)$ vale $(-1-\sqrt{13})/2$

Lato orizzontale alto. $y=1$ Abbiamo $(x^2-y^2-x+y+1)=0 \iff x^2-x+1=0$ impossibile.

Lato verticale destro. $x=2$. Si ha $3-y^2+y=0 \iff y=(1-\sqrt{13})/2$ e la funzione $f(x,y)$ vale $(5-\sqrt{13})/2$

Lato orizzontale basso. $y=-2$, $-1\le x\le 2$. Si ha $x^2-x-5=0$ ed è impossibile poiché $(1-\sqrt{21})/2<-1$ mentre $(1+\sqrt{21})/2>2$.

Mettendo tutto assieme abbiamo che il massimo assoluto vale $(5-\sqrt{13})/2$ ed è assunto nel punto $(2,(1-\sqrt{13})/2)$ mentre il minimo assoluto vale $(-1-\sqrt{13})/2$ ed è assunto nel punto $(-1,(1-\sqrt{13})/2)$

3) $\mathcal{L}((t-x/a)\sin(t-x/a)H(t-x/a)) = e^{-px/a}\frac{+2p}{(1+p^2)^2}$ per cui otteniamo $a^2v_{xx}-p^2v = e^{-px/a}\frac{-2p}{(1+p^2)^2}$. La omogenea ha soluzione $v(x,p)=\alpha e^{\frac{-px}{a}}$ con α da trovare mentre la soluzione particolare della non omogenea è $g(x,p)=\beta x e^{\frac{-px}{a}}$.

Calcolo di β.

$$a^2\left(\frac{-p\beta}{a}E - \frac{p\beta}{a}E + \frac{p^2}{a^2}\beta x E\right) - p^2\beta x E = \frac{-2pE}{(1+p^2)^2} \implies \beta = \frac{1}{a(1+p^2)^2}$$

Quindi

$$v(x,p) = \alpha e^{\frac{-px}{a}} + \frac{xe^{\frac{-px}{a}}}{a(1+p^2)^2}, \qquad v_x(0,p)=0 \implies \alpha = \frac{1}{p(1+p^2)^2}$$

$$v(x,p)=e^{\frac{-px}{a}}\frac{1}{p(1+p^2)^2}+\frac{x}{a(1+p^2)^2}e^{\frac{-px}{a}}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow u(x,t)=H(t-\frac{x}{a})\left[1-\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})\sin(t-\frac{x}{a})-\cos(t-\frac{x}{a})+\frac{x}{2a}(t-\frac{x}{a})\cos(t-\frac{x}{a})-\frac{x}{4a}\sin(t-\frac{x}{a})\right]$$

Se all'inizio dico che i calcoli vanno esposti esaustivamente e lo dico in particolare per le equazioni differenziali, non basta passare da $v(x,p)$ direttamente a $u(x,t)$ perché è irritante

4) Cammino a “pacman”. Residui in $z=-2,\pm i$

$$\begin{aligned}I(1-i)&=2\pi i\left[\frac{2^{1/4}e^{i\pi/4}}{5}+\frac{e^{i\pi/8}}{2(2i-1)}-\frac{e^{i3\pi/8}}{2(1+2i)}\right]=\\&=2\pi i\left[\frac{2^{1/4}(1+i)}{5\sqrt{2}}+\frac{e^{i\pi/8}}{10}(-1-2i)-\frac{i}{10}e^{-i\pi/8}(1-2i)\right]=\\&=2\pi i\left[\frac{2^{1/4}(1+i)}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{10}(e^{i\pi/8}+ie^{-i\pi/8})-\frac{1}{5}(ie^{i\pi/8}+e^{-i\pi/8})\right]=\\&=2\pi i\left[\frac{2^{1/4}(1+i)}{5\sqrt{2}}-\frac{2}{5}(1+i)\cos\frac{\pi}{8}+\frac{2}{5}(1+i)\sin\frac{\pi}{8}\right]\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}I&=2\pi(\frac{3}{10}\cos\frac{\pi}{8}-\frac{1}{10}\sin\frac{\pi}{8}-\frac{2^{1/4}}{5\sqrt{2}})=\\&=2\pi\left(\frac{3}{10}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}-\frac{2^{1/4}}{5\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

5) $A\doteq x^2+y^2+4y+4$, $B=x^2+y^2-4y+4$. Conviene osservare che

$$\omega=\left(\frac{-(y+2)}{A}-\frac{y-2}{B}\right)dx+\left(\frac{x}{A}+\frac{x}{B}\right)dy=\frac{-(y+2)dx+xdy}{A}+\frac{-(y-2)dx+xdy}{B}$$

Nel caso 5.1), per una svista ho scritto $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ invece di $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Gli studenti avrebbero potuto sollevare eccezione. Gli altri risultati sono $4\pi,0$.

Il primo può ottenersi con il minimo sforzo applicando Gauss–Green e il secondo usando l'esattezza della forma in un opportuno insieme che racchiude la circonferenza ma lascia fuori i due punti “incriminati”

Chi ha osservato che la forma è chiusa e poi letteralmente dice: “La forma è quindi esatta” al massimo prende 2

Per ottenere la scomposizione della forma si può operare così

$$\frac{-2y(x^2+y^2-4)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dx+\frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=$$
$$=\frac{-2y(x^2+(y-2)^2+4y-8)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dx+\frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=$$
$$=\frac{-2y}{x^2+(y+2)^2}dx+\frac{-2y(4y-8)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dx+\frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=$$
$$\frac{-y}{x^2+(y+2)^2}dx+\frac{-y}{x^2+(y+2)^2}dx\frac{-2y(4y-8)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dx+$$
$$+\frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=$$
$$=\frac{-(y+2)dx+xdy}{x^2+(y+2)^2}+\frac{2}{x^2+(y+2)^2}dx-\frac{xdy}{x^2+(y+2)^2}+$$
$$+\frac{-y}{x^2+(y+2)^2}dx+\frac{-2y(4y-8)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dx+\frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy\,;$$

$$\frac{2}{x^2+(y+2)^2}+\frac{-y}{x^2+(y+2)^2}\frac{-2y(4y-8)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}=\frac{(2-y)(x^2+(y-2)^2)-8y(y-2)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}=$$
$$=\frac{(y-2)(-x^2-y^2+4y-4-8y)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}=\frac{-(y-2)(x^2+(y+2)^2)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}=$$
$$=\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$$

e poi

$$-\frac{xdy}{x^2+(y+2)^2}+\frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=\frac{-x(x^2+y^2-4y+4)+2x^3+2xy^2+8x}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=$$
$$=\frac{x^3+xy^2+4xy+4x}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=\frac{x(x^2+(y+2)^2)}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=$$
$$=\frac{x^3+xy^2+4xy+4x}{(x^2+(y+2)^2)(x^2+(y-2)^2)}dy=\frac{x}{x^2+(y-2)^2}dy$$

e finalmente abbiamo la scomposizione

$$\frac{-(y+2)dx+xdy}{x^2+(y+2)^2}+\frac{-(y-2)dx+xdy}{x^2+(y-2)^2}$$

Si poteva anche operare nel seguente modo

$$\frac{-2y(x^2+y^2-4)}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}=\frac{A}{x^2+(y+2)^2}+\frac{B}{(x^2+(y-2)^2)}=$$
$$=\frac{(A+B)x^2+A(y-2)^2+B(y+2)^2}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}\iff A+B=-2y,\quad A(y-2)^2+B(y+2)^2=-2y(y^2-4)$$

$A=-y-2$, $B=-y+2$

$$\frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}=2x\frac{x^2+y^2+4}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}=$$
$$=2x\frac{A}{x^2+(y+2)^2}+2x\frac{B}{x^2+(y-2)^2}$$

e operando come sopra si perviene a $A = B = 1/2$ per cui la forma si scompone in

$$\frac{-y-2}{x^2+(y+2)^2}dx + \frac{-y+2}{x^2+(y-2)^2}dx + \frac{x}{x^2+(y+2)^2}dy + \frac{x}{x^2+(y-2)^2}dy$$

$$\frac{-2y(x^2+y^2-4)}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}dx + \frac{2x(x^2+y^2+4)}{(x^2+y^2+4y+4)(x^2+y^2-4y+4)}dy.$$