Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
21–03–2020 A.A. 2019/2020, Sessione Invernale, terzo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4. Gli studenti di **Informatica**, A.A.2019/2020 risolvano gli esercizi 1,3,5,6.

Gli iscritti "in cautelativa" per informatica solamente risolvano gli esercizi 1,5,6,7.

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. **Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome**

1) (7.5 punti) Si calcoli il volume della porzione di spazio (detta V) che verifica le due relazioni

$$7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy \le z \le 1 + \sqrt{3}x + y$$

2) (7.5 punti) Si consideri la funzione $f(x,y) = -6y^2 + x^3 - 16y - 18xy$

2.1) Si individuino i punti critici. Successivamente se ne stabilisca la natura.

2.2) Dire a priori se la funzione ammette massimo e minimo assoluto nel quadrato di centro l'origine e lato 2 (bordi compresi). Nella bella deve essere chiaro che voi rispondete o meno al punto 2.2). Dovete quindi evidenziare tale aspetto del vostro elaborato con qualcosa del tipo *Risopsta al punto 2.2)* ......

2.3) Se la risposta alla domanda 2.2) è affermativa, trovarne le coordinate

3) (7.5 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale ($\overline{x} > 0$)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin y \cdot \delta(y - \frac{x}{\overline{x}})dy & x, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 1 \end{cases}$$

4) (7.5 punti) Sia data la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ con $f_n(x) = n^{\frac{3}{2}}x$ per $0 \le x \le 1/n$, $f_n(x) = -n^{\frac{3}{2}}(x - 2/n)$ per $1/n \le x \le 2/n$ e $f_n(x) = 0$ per $2/n \le x \le 1$

4.1) si trovi l'insieme di convergenza puntuale

4.2) argomentando si dica se nell'intervallo $[a,1]$, $a > 0$ è uniformemente convergente

4.3) argomentando si dica se nell'intervallo $[0,1]$, è uniformemente convergente

4.4) argomentando si dica quanto vale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^1 f_n(x)dx$ $(a > 0)$

4.5) argomentando si dica quanto vale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

5) (7.5 punti) Calcolare $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)(x-\pi/2)} dx$
evidenziando il cammino di integrazione e parametrizzando **ogni singolo tratto.** L'integrale è reale e voglio un risultato reale.

6) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale $= \omega = \dfrac{dV}{T^2} + \dfrac{VdT}{T^2}$ $T > 0$. 1) Esponendo i calcoli, dire se è esatta o meno 2) Dimostrare che esiste una funzione $h(T)$ tale che la forma $\omega_1 = h(T) \cdot \omega$ è esatta 3) Calcolare $\displaystyle\int \omega_1$ lungo la curva nel piano (T, V) data da $TV = \ln(10)$ fra $(T_0, V_0) = (\ln(10), 1)$ e $(T_1, V_1) = (\ln(100), 1/2)$

Per rispondere alla domanda 2) bisogna risolvere una equazione differenziale la cui soluzione va scritta per esteso. Non basta scrivere la funzione che risolve l'equazione

7) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

con $f(t) = 0$ se $0 \le t < 1$, $f(t) = t$ se $1 \le t < 2$, $f(t) = 1$ se $t \ge 2$

soluzioni

1) Dal Giornale delle lezioni che a sua volta rimanda ad uno dei minicompiti degli anni passati, apprendiamo che la trasformazione, detta T, $x = (\sqrt{3}\xi + \eta)/2$, $y = (\xi - \sqrt{3}\eta)/2$ fa si che $7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy$ diventi $8\xi^2 + 4\eta^2$ e quindi l'integrale cercato (integriamo per fili)

$$\iint_{7x^2+5y^2+2\sqrt{3}xy\le z\le 1+\sqrt{3}x+y} (1 + \sqrt{3}x + y - (7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy))dxdy$$

diventa

$$\iint_{8\xi^2+4\eta^2\le z\le 1+2\xi} (1 + 2\xi - 8\xi^2 - 4\eta^2)d\xi d\eta \qquad \text{iacobiano pari a 1}$$

$$8\xi^2 + 4\eta^2 = 1 + 2\xi \iff (2\sqrt{2}\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 + (2\eta)^2 = \frac{9}{8} \implies \xi = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\rho\cos t, \quad \eta = \frac{3}{4\sqrt{2}}\rho\sin t$$

e l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho \frac{9\rho}{32\sqrt{3}} \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\rho C - 8\left(\frac{1}{64} + \frac{9}{65}\rho^2 C^2\right) - \frac{9}{8}\rho^2 S^2\right] = \frac{\pi 27}{512\sqrt{3}}$$

2) 2.1)

$$f_x = 3x^2 - 18y = 0, \quad f_y = -12y - 16 - 18x = 0 \implies \overbrace{(-8, 32/3)}^{max}, \quad \overbrace{(-1, 1/6)}^{sella}$$

2.2) Ovviamente si dal momento che $f(x, y)$ è continua e il quadrato è compatto quindi dobbiamo cercare il massimo e minimo all'interno del quadrato *e sul bordo*

2.3) Se il punto è all'interno, adottiamo la procedura solita e troviamo $(-1, 1/6)$ che però è una sella. Non ci rimane che analizzare la funzione sul bordo.

$$f(x, 1) \doteq g(x) = x^3 - 18x - 22, \ -1 \le x \le 1, \quad g'(x) = 3x^2 - 18 \ge 0 \iff x \le -\sqrt{6}, \vee x \ge \sqrt{6}$$

Ne segue che $g(x)$ è sempre decrescente per cui il massimo ha ordinata $g(-1, 1) = -5$, e il minimo ha ordinata $g(1, 1) = -39$

$$f(x, -1) \doteq h(x) = x^3 + 18x + 10, \ -1 \le x \le 1, \quad h'(x) = 3x^2 + 18 > 0 \ h \text{ sempre crescente}$$

Il minimo è $h(-1, -1) = -9$, il massimo è $f(1, -1) = 29$

$f(1, y) \doteq F(y) = -6y^2 - 34y + 1$, $-1 \le y \le 1$, $F'(y) = -12y - 34 < 0$, per cui il massimo è $F(1, -1) = 29$ e il minimo è $F(1, 1) = -39$

$f(-1, y) \doteq G(y) = -6y^2 + 2y - 1$, $-1 \le y \le 1$, $G'(y) = -12y + 2 \ge 0$, per $y \le 1/6$ per cui si ha un massimo a $y = 1/6$ e $G(1/6) = -5/6$. Inoltre $G(-1, 1) = -5$ e $G(-1, -1) = -9$

In definitiva il massimo vale 29 ed è assunto nel punto $(1, -1)$ mentre il minimo vale -39 ed è assunto nel punto $(1, 1)$. Notare che il punto $(-1, 1/6)$ da sella è diventato massimo locale non assoluto.

Chi ha risposto correttamente e solamente alla domanda 2.1), ha avuto 5.5

3) Il sistema è $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(x/\overline{x}) & x, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 1 \end{cases}$ In trasformata di Laplace abbiamo

$$p^2 v(x, p) - a^2 v_{xx} = \frac{1}{p}\sin\frac{x}{\overline{x}}, \qquad v_x(0, p) = 1/p$$

$$v(x,p)=\frac{\overline{x}^2}{p(a^2+p^2\overline{x}^2)}\sin\frac{x}{\overline{x}}+\left(\frac{\overline{x}a}{p^2(a^2+p^2\overline{x}^2)}-\frac{a}{p^2}\right)e^{-px/a}$$
$$v(x,p)=\frac{\overline{x}^2}{a^2}\left(\frac{-p}{a^2/\overline{x}^2+p^2}+\frac{1}{p}\right)\sin\frac{x}{\overline{x}}+e^{-px/a}\left(\frac{\overline{x}}{ap^2}-\frac{\overline{x}^2}{a^2}\frac{a/\overline{x}}{a^2/\overline{x}^2+p^2}\right)-\frac{a}{p^2}e^{-px/a}$$

e finalmente

$$u(x,t)=\frac{\overline{x}^2}{a^2}\sin\frac{x}{\overline{x}}-\frac{\overline{x}^2}{a^2}\sin\frac{x}{\overline{x}}\cos\frac{ta}{\overline{x}}+H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{\overline{x}}{a}(t-\frac{x}{a})-\frac{\overline{x}^2}{a^2}\sin\left(\frac{a}{\overline{x}}(t-\frac{x}{a})\right)-a(t-\frac{x}{a})\right)$$

Errori gravi
1) Una volta scritta l'equazione differenziale ordinaria per $v(x,p)$, si sbaglia a scrivere la soluzione della non omogenea.
2) Il termine noto (forzante) viene preso per un prodotto di convoluzione.
3) Si scrive $\sin(x/\overline{x})$ e poi si fa la trasformata ottenendo $\overline{x}^2/(1+p^2\overline{x}^2)$ anziché $p^{-1}\sin(x/\overline{x})$

4) 4.1) Fissato un qualsiasi punto $x_0\in(0,1]$, quando $n>2/x_0$, $f_n(x_0)=0$ per cui converge puntualmente a zero per ogni x_0.; $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ per ogni x.

4.2) Se converge uniformemente deve essere

$$\forall\ \varepsilon\ \exists\ n_\varepsilon\colon n>n_\varepsilon\implies \sup_{x\geq a} f_n(x)<\varepsilon$$

Se prendiamo $n_\varepsilon=[2/a]$, non appena $n>n_\varepsilon$, **per qualunque** $x\geq a$, si ha $f_n(x)=0<\varepsilon$ da cui la convergenza uniforme.

4.3) La risposta è no. $f_n(1/n)=\sqrt{n}$ e quindi con $a=0$ non è possibile ripetere il ragionamento precedente.

4.4) Dalla uniforme convergenza della successione di funzioni, possiamo dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^1 f_n(x)dx=\int_a^1\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx=0$ oppure possiamo calcolare direttamente

4.5) $\int_0^1 f_n(x)dx=0$

Possibili errori 4.4) Eseguiamo l'integrale.

$$\int_a^1 f(x)dx=\int_a^{\frac{1}{n}} n^{\frac{3}{2}}xdx-\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^{\frac{3}{2}}(x-\frac{2}{n})dx=\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{a^2})-n^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{n^2}-\frac{1}{2n^2})+2n\to-\infty?????$$

Dove sta l'errore?

5) Sappiamo che l'integrale è $\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)(x-\pi/2)}dx$ passiamo alla funzione complessa $\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)(z-\pi/2)}$ e otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)(x-\pi/2)}dx=i\pi\lim_{z\to0}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-\pi/2)}+i\pi\lim_{z\to\pi/2}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}+2\pi i\mathrm{Res}f(i)=$$
$$=-2i+i\pi\cdot i\frac{2}{\pi}\frac{4}{4+\pi^2}+2\pi i\frac{-1}{2e}\frac{2}{2i-\pi}=-2i-\frac{8}{4+\pi^2}-\frac{2\pi i}{e(2i-\pi)}$$

La parte immaginaria dà $-2+\dfrac{2\pi^2}{e(4+\pi^2)}$

Errori gravi 1) Se si chiude sopra, calcolare il residuo anche in $z=-i$ o viceversa.

6 1) Chiaramente non è esatta.

2) Le condizioni di chiusura di $h(T)\omega$ sono $\dfrac{h'}{T^2}-\dfrac{2h}{T^3}=\dfrac{h}{T^2}$, $\dfrac{h'}{h}=1+\dfrac{2}{T}$ e quindi $\ln h = T+2\ln T$
$h(T)=T^2e^T$ e quindi $h(T)\omega = e^T dV + Ve^T dT$ con primitiva $U(T,V)=Ve^T$

3) $50-10=40$. Integrare sul cammino dato è impossibile.

7) $f(t)=H(t-1)+H(t-1)(t-1)-H(t-2)(t-2)-H(t-2)$ e quindi in trasformata di Laplace abbiamo

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1}\left(\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p}\right)$$

$$\begin{aligned}
&x(t)=(1-\cos(t-1))H(t-1)+(t-1-\sin(t-1))H(t-1)+\\
&+(-1+\cos(t-2)-(t-2)+\sin(t-2))H(t-2)=\\
&=(t-\cos(t-1)-\sin(t-1))H(t-1)+(1-t+\cos(t-2)+\sin(t-2))H(t-2)=\\
&\doteq A(t)H(t-1)+B(t)H(t-2)
\end{aligned}$$

A titolo di verifica verifichiamo le condizioni iniziali. $x(0)=0$ chiaramente

$$x'(t)=A'(t)H(t-1)+A(t)\delta(t-1)+B'(t)H(t-2)+B(t)\delta(t-2)=A(1)+B(2)=0$$