Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
15–06–2020 A.A. 2019/2020, Sessione estiva, primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4. Gli studenti di **Informatica**, A.A.2019/2020 risolvano gli esercizi 1,3,5,6.

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate e non basta scrivere la soluzione

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

1) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale doppio $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ dove $D \subset \mathbf{R}^2$ è la porzione del piano (x,y), proiezione dell'insieme $E \subset \mathbf{R}^3$ dato da $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon z = 1 + 2x/3 + \sqrt{2}y/3, z \geq \sqrt{7x^2/3 + 4y^2/3}\}$

2) (7.5 punti) Si consideri la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 + \frac{3}{4}(x^2 - y^2)$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 1$. Se ne trovino massimo e minimo assoluti

3) (7.5 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = (t - \frac{x}{a})e^{-(t-\frac{x}{a})}H(t - \frac{x}{a}) \quad x, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = t \end{cases}$$

3.1) Si dica quanto vale $(u_t - au_x)(x,t)$ quando $x = at$. Esporre i calcoli e non solo il risultato finale

4) (7.5 punti) Sia data la serie di funzioni $\{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k|x|e^{-kx^2}$

4.1) si trovi l'insieme di convergenza puntuale

4.2) argomentando si dica se nell'intervallo $(a,1]$, $a > 0$ è uniformemente convergente

4.3) argomentando si dica se nell'intervallo $[0,1]$, è uniformemente convergente

4.4) argomentando si dica se nell'intervallo $[1/2, 3]$, è uniformemente convergente

4.5) argomentando si dica quanto vale $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$

4.6) Detta $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$, argomentando si dica quanto vale $\int_1^2 S(x)dx$

5) (7.5 punti) Calcolare $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x\pi) - \sin(2\pi x)}{x^2(x^3+1)(x^2+1)}dx$
evidenziando il cammino di integrazione e parametrizzando **ogni singolo tratto.** L'integrale è reale e voglio un risultato reale.

6) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale $\omega = (f(y) + x^2y + xy^2)dx + (\frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}})dy$. Trovare $f(y)$ tale che ω sia esatta e calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma(t) = (\arcsin t, \arctan t)$, $0 \le t \le 1$.

soluzioni

1) ∂E è l'insieme dato dal sistema

$$z = 1 + 2x/3 + \sqrt{2}y/3, \qquad 1 + \frac{4x}{3} + \frac{2\sqrt{2}y}{3} + \frac{4x^2}{9} + \frac{2y^2}{9} + \frac{4\sqrt{2}xy}{9} = \frac{7x^2}{3} + \frac{4y^2}{3}$$

mentre ∂D è l'insieme dato da

$$1 + \frac{4x}{3} + \frac{2\sqrt{2}y}{3} + \frac{4x^2}{9} + \frac{2y^2}{9} + \frac{4\sqrt{2}xy}{9} = \frac{7x^2}{3} + \frac{4y^2}{3}$$

che è una ellisse in forma non canonica e traslata rispetto al centro. D è invece l'insieme (x, y) tale che

$$1 + \frac{4x}{3} + \frac{2\sqrt{2}y}{3} + \frac{4x^2}{9} + \frac{2y^2}{9} + \frac{4\sqrt{2}xy}{9} \geq \frac{7x^2}{3} + \frac{4y^2}{3}$$

Prendiamo in considerazione solo la parte quadratica $\frac{17x^2}{9} + \frac{10y^2}{9} - \frac{4\sqrt{2}xy}{9}$ e mettiamola in forma canonica.

$$\det \begin{pmatrix} 17-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 10-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda_{1,2,} = 9, 18$$

Autovettori di λ_1.

$$\begin{pmatrix} 8 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \underline{u} = (1, 2\sqrt{2})/3$$

Autovettori di λ_2.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \underline{u} = (-2\sqrt{2}, 1)/3$$

La matrice del cambiamento di base è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

e quella del cambio di coordinate è la trasposta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ +2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\xi - 2\sqrt{2}\eta}{3} \\ y = \dfrac{2\sqrt{2}\xi + \eta}{3} \end{cases} \quad (\text{iacobiano} = 1)$$

da cui

$$\frac{17x^2}{9} + \frac{10y^2}{9} - \frac{4\sqrt{2}xy}{9} \to \xi^2 + 2\eta^2, \qquad 1 + \frac{2x}{3} + \frac{\sqrt{2}y}{3} \to 1 + \frac{2\xi}{3} - \frac{\sqrt{2}\eta}{3}$$

Nelle coordinate (ξ, η) l'insieme ∂D diventa

$$\xi^2 + 2\eta^2 = 1 + \frac{4\xi - 2\sqrt{2}\eta}{3} \iff \left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\eta + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

L’integrale che dobbiamo calcolare è

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_{\left(\xi-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(\eta+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2\leq\frac{14}{9}} (\xi^2+\eta^2)d\xi d\eta = \frac{287\sqrt{2}\pi}{324}$$

2) Passiamo a coordinate circolari $x=\cos t$, $y=\sin t$. La funzione diventa $f(C,S)=C^3+S^3+\frac{3}{4}(C^2-S^2)$, $-\pi\leq t\leq\pi$. ed è una funzione 2π–periodica della sola variabile t. $f'(t)=3CS(S-C)-3CS=3CS(\sqrt{2}\sin(t-\pi/4)-1)\geq 0$ se e solo se $-\pi/2\leq t\leq 0$, $\pi/2\leq t\leq\pi$ e decresce in $-\pi\leq t\leq-\pi/2$, $0\leq t\leq\pi/2$,

$$f(\frac{-\pi}{2})=\frac{-7}{4},\quad f(0)=\frac{7}{4},\quad f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4},\quad f(\pi)=\frac{-1}{4}$$

In questo modo salta subito fuori chi sono i punti di massimo e di minimo in quanto lo studio si è ridotto ad una funzione periodica di una variabile e quindi non è necessario andare ad osservare il comportamento della funzione agli estremi.

Passando attraverso il gradiente di $x^3+y^3+3(x^2-y^2)/4-\lambda(x^2+y^2-1)$ si hanno i punti critici (x,y,λ) $(0,1,3/4)$, $(0,-1,-9/4)$, $(1,0,9/4)$, $(-1,0,-3/4)$.

3) In trasformata di Laplace diventa

$$p^2v(x,p)-a^2v_{xx}=\frac{e^{-px/a}}{(p+1)^2}$$

Cerchiamo la soluzione della non omogenera come $f(x,p)=\alpha+\beta xe^{-px/a}$.

$$f_x=\beta e^{-px/a}-\frac{p\beta}{a}xe^{-px/a},\qquad f_{xx}=\frac{-2p\beta}{a}e^{-px/a}+\frac{p^2\beta}{a^2}xe^{-px/a}$$

Otteniamo

$$p^2\alpha+p^2\beta xe^{-px/a}+2p\beta ae^{-px/a}-p^2\beta xe^{-px/a}=\frac{e^{-px/a}}{(p+1)^2}\implies\alpha=0,\quad\beta=\frac{1}{2ap(p+1)^2}$$

La soluzione è $v(x,p)=Ae^{-px/a}+\underline{\frac{xe^{-px/a}}{2ap(p+1)^2}}$. La condizione iniziale ci dà

$$v_x(0,p)=\frac{-pA}{a}+\frac{1}{2ap(p+1)^2}=\frac{1}{p^2}\implies A=\frac{-a}{p^3}+\frac{1}{2p^2(p+1)^2}$$

$$v(x,p)=\frac{-ae^{-px/a}}{p^3}+\frac{e^{-px/a}}{2p^2(p+1)^2}+\frac{xe^{-px/a}}{2ap(p+1)^2}$$

$$u(x,t)=H(t-\frac{x}{a})\Big[\frac{-a}{2}(t-\frac{x}{a})^2+\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a}-2)+\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})e^{-(t-\frac{x}{a})}+e^{-(t-\frac{x}{a})}+$$
$$+\frac{x}{2a}-\frac{x}{2a}(t-\frac{x}{a})e^{-(t-\frac{x}{a})}-\frac{x}{2a}e^{-(t-\frac{x}{a})}\Big]$$

Molti studenti hanno trovato difficoltà nel ricavare la soluzione particolare della equazione non omogenea e che ho sottolineato. Forse ciò è dovuto al fatto che a parte una costante inessenziale, il “termine forzante” è esattamente una delle funzioni che compongono la soluzione della omogenea e quando ciò accade, in genere, si prende quella funzione e la si moltiplica per x. È la tipica

risonanaza che si sviluppa nelle equazioni di ordine 2. Chi ha letto attentamente le soluzioni del 29/2/2020, forse, è riuscito a risolvere l'equazione per $v(x,p)$ senza dover operare una seconda trasformata di Laplace esattamente come ho fatto io. Ad ogni modo, espongo anche la seconda modalità per ricavare $v(x,p)$

Dunque abbiamo l'equazione

$$-p^2 v(x,p) + a^2 v_{xx} = \frac{-e^{-px/a}}{(p+1)^2}, \qquad v_x(0,p) = 1/p^2,$$

e $v(0,p)$ la lasciamo indicata e le daremo un valore opportuno. $\mathcal{L}(v(x,p)) \doteq h(s,p)$. $\mathcal{L}(v_x(x,p)) = sv(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v_{xx}(x,p)) = s^2 h(s,p) - sv(0,p) - \dfrac{1}{p^2}$ e quindi abbiamo

$$-p^2 h(s,p) + a^2(s^2 h(s,p) - sv(0,p) - \frac{1}{p^2}) = \frac{-a}{(p+1)^2(p+as)}$$

$$h(s,p) = \frac{1}{a^2s^2 - p^2}\left(\frac{-a}{(p+1)^2(p+as)} + a^2 sv(0,p) + \frac{a^2}{p^2}\right)$$

$$h(s,p) = \left(\frac{-a}{(p+1)^2(as-p)(p+as)^2} + \frac{a^2 sv(0,p)}{a^2s^2-p^2} + \frac{a^2}{p^2(a^2s^2-p^2)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-a}{(p+1)^2(as-p)(p+as)^2}\right) = \frac{-e^{px/a}}{4p^2(p+1)^2} - \frac{a}{(p+1)^2}\frac{1}{a^2}\frac{d}{ds}\frac{e^{sx}}{as-p}\Big|_{s=\frac{-p}{a}} =$$

$$= \frac{-e^{px/a}}{4p^2(p+1)^2} - \frac{a}{(p+1)^2}\frac{1}{a^2}\left[\frac{xe^{-px/a}}{-2p} - \frac{ae^{-px/a}}{4p^2}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a^2 sv(0,p)}{a^2s^2-p^2}\right) = \frac{v(0,p)}{2}e^{px/a} + \frac{v(0,p)}{2}e^{-px/a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a^2}{p^2(a^2s^2-p^2)}\right) = \frac{ae^{px/a}}{2p^3} - \frac{ae^{-px/a}}{2p^3}$$

I contributi proporzionali a $e^{px/a}$ devono andar via per cui

$$\frac{-1}{4p^2(p+1)^2} + \frac{v(0,p)}{2} + \frac{a}{2p^3} = 0 \implies v(0,p) = \frac{-a}{p^3} + \frac{1}{2p^2(p+1)^2}$$

ed otteniamo

$$v(x,p) = \mathcal{L}^{-1}(h(s,p)) = \frac{a}{(p+1)^2}\frac{1}{a^2}\frac{xe^{-px/a}}{2p} + \frac{a}{(p+1)^2}\frac{1}{a^2}\frac{ae^{-px/a}}{4p^2} +$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-px/a}\left(\frac{-a}{p^3} + \frac{1}{2p^2(p+1)^2}\right) - \frac{ae^{-px/a}}{2p^3} =$$
$$= \frac{-ae^{-px/a}}{p^3} + \frac{xe^{-px/a}}{2ap(p+1)^2} + \frac{e^{-px/a}}{2p^2(p+1)^2}$$

3.1) $u_t(at,t) \equiv u_x(at,t) = 0$

4)

4.1) Per $x = 0$ evidentemente $S_n(0) = 0$ e quindi converge. Per $x \neq 0$ basta osservare che $\lim_{k\to+\infty} k^3 e^{-kx^2} = 0$ e quindi definitivamente $0 < k|x|e^{-kx^2} < \varepsilon/k^2$ e scatta il teorema del confronto. Il fatto che il limite sia zero non è importante ma conta solo che non sia $+\infty$.

4.2) $e^{-kx^2} \leq e^{-ka^2}$ e quindi la serie converge totalmente e quindi uniformemente dal momento che la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} ke^{-ka^2}$ converge. Si capisce pure che tale ragionamento non funziona per $a = 0$.

4.3) Ci orientiamo verso la convergenza uniforme o la convergenza non uniforme? Rispondere alla domanda è importante al fine di stabilire quale strategia impostare. Osserviamo che il massimo di x^{-kx^2} è assunto per $x_k = 1/\sqrt{2ek}$ e il massimo di kx^{-kx^2} vale $\sqrt{k/(2e)}$ che tende a $+\infty$. Siamo quindi indotti a propendere verso la convergenza non uniforme.

Prima dimostrazione

Ricordo che dobbiamo mostrare

$$\exists\ \varepsilon > 0 : \forall\ N\ \exists\ n > N : \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=n}^{+\infty} k|x|e^{-kx^2} > \varepsilon$$

$$\sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=n}^{+\infty} k|x|e^{-kx^2} \geq \sup_{x\in[0,1]} n|x|e^{-nx^2} = nx_n e^{-nx_n^2} = \sqrt{n/(2e)} \to +\infty$$

e quindi non converge uniformemente.

Seconda dimostrazione

C'è un secondo modo evidenziato a pagina 54 del Giornale delle lezioni.

Dalla continuità delle successioni uniformemente convergenti, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to 0} k|x|e^{-kx^2} = 0$ deve essere uguale a $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k|x|e^{-kx^2}$. Sia $x \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-kx^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)e^{-kx^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-(k-1)x^2} = e^{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-kx^2}$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-kx^2}(1 - e^{x^2}) = -\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx^2} \frac{-1}{1 - e^{-x^2}} \implies \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-kx^2} = \frac{e^{x^2}}{(e^{x^2} - 1)^2}$$

Evidentemente $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k|x|e^{-kx^2} = +\infty$ e si ha conferma della non uniforme convergenza in $[0, 1]$.

4.4) Essendo $x_k \to 0$, il massimo in $[1/2, 3]$ della funzione kxe^{-kx^2} è pari a $\dfrac{k}{2}e^{-k/4}$ e quindi per n grande abbastanza (ossia $ne^{-n/4}/2 < 1/2$)

$$\sup_{[1/2,3]} \sum_{k=n}^{+\infty} kxe^{-kx^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{2}e^{-k/4} < \varepsilon$$

e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo n_ε per cui se $n > n_\varepsilon$, la precedente espressione è minore da ε.

4.5)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} kxe^{-kx^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2k} - \frac{e^{-k}}{2k}\right) = +\infty$$

4.6) Grazie all'uniforme convergenza

$$\int_0^1 S(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^2 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_1^2 S_n(x)dx$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 \sum_{k=0}^n kxe^{-kx^2}dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n k\left(\frac{e^{-k}}{2k} - \frac{e^{-2k}}{2k}\right) = \frac{1}{2}\frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}\frac{e^2}{e^2-1} = \frac{1}{2}\frac{e}{e^2-1}$$

5) Scrivo direttamente il risultato

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left[\left(\frac{-i\pi}{2} + i\pi\frac{-2}{6\cdot 2} + 2\pi i\frac{e^{-\pi}-e^{-2\pi}}{-2i(1-i)}\right) + 2\pi i\left(\frac{e^{i\pi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} - e^{2i\pi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{e^{\frac{4\pi i}{3}}3e^{\frac{4\pi i}{3}}(1+e^{\frac{4\pi i}{3}})}\right)\right] = \\
&= -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}(e^{-\pi}-e^{-2\pi}) + \mathrm{Im}\left(\frac{2\pi i}{3}e^{\frac{-\pi i}{3}}\left(e^{i\pi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} - e^{2i\pi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}\right)\right) \\
&= -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}(e^{-\pi}-e^{-2\pi}) + \mathrm{Im}\left(\frac{2\pi i}{3}e^{\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}}e^{\frac{-i\pi}{6}} - \frac{2\pi i}{3}e^{-\pi\sqrt{3}}e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = \\
&= -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}(e^{-\pi}-e^{-2\pi}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}e^{\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}} + \frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{3}
\end{aligned}$$

6) La condizione di chiusura è $f' + x^2 + 2xy = x^2 + 2xy + y^2$ ossia $f(y) = y^3/3$ (più una costante ma nell'integrale non conta) e la forma diventa $(y^3/3 + x^2y + xy^2/3)dx + (x^2y + xy^2 + x^3/3 + 1/\sqrt{1+y^2})dy$. La primitiva è $U(x,y) = \frac{xy^3}{3} + \frac{yx^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} + \ln(y+\sqrt{1+y^2})$ e $\int_\gamma \omega = \frac{\pi^4}{48} + \ln(\frac{\pi}{4} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}})$

L'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ andava ricavato con tutti i passaggi per arrivare alla primitiva