Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
09–09–2020 A.A. 2019/2020, Sesto appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,5. Gli studenti di **Informatica**, A.A.2019/2020 risolvano gli esercizi 1 (esclusa 1.2),3,4,5.

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. I calcoli vanno scritti in maniera esaustiva. Ad esempio il calcolo di un integrale o la risoluzione di una equazione differenziale vanno esplicitate e non basta scrivere la soluzione

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

1) (3.5 punti per elettr.& intern., 4.5 punti per informatica) Sia dato l'insieme $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x \in [-1,1], y \in [0,1]\}$. Si calcoli il volume dell'insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon (x,y) \in D, z \geq 0, z \leq x^2 + 2y^2,\ z \leq 3x^2 + y^2\}$

1.1) (3 punti) Si consideri quella parte di D, detta E tale che $y \leq \sqrt{2}x$, $x \geq 0$ e la si ruoti di 180 gradi intorno alla retta di equazione $y = -\sqrt{2}x$. Si calcoli il volume della regione dello spazio generata

1.2) (1 punto) Si ruoti D intorno all'asse delle y di 180 gradi e sia V il volume generato. Calcolare il flusso attravesro la superficie esterna di V del campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z) = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$

Gli studenti esibiscano esplicitamente tutti i passaggi per il calcolo degli integrali

2) (7.5 punti) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x + y$ soggetta alla condizione $x^2 + y^2 - x - y - 1/16 = 0$.

3) (7.5 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = (e^{(t-\frac{x}{a})} - e^{-(t-\frac{x}{a})})H(t - \dfrac{x}{a}) & x, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = t \end{cases}$$

4) (7.5 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x^2(x^3+1)(x^2+1)} dx$
evidenziando il cammino di integrazione e parametrizzando **ogni singolo tratto.** L'integrale è reale e voglio un risultato reale.

5) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{-3x^2y^3dx}{x^6+y^6} + \dfrac{3x^3y^2dy}{x^6+y^6}$. Calcolare $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2$.

$$\underline{\gamma}_1 = (2^{\frac{2\vartheta}{5\pi}} \cos\vartheta, 2^{\frac{2\vartheta}{5\pi}} \sin\vartheta),\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{5\pi}{2}, \qquad \underline{\gamma}_2 = (t, t^2 - 2),\ 0 \leq t \leq 2$$

soluzioni

1) Soluzione Bisogna calcolare $2\left[\int_0^1 dy \int_{y/\sqrt{2}}^1 (x^2+2y^2)dx + \int_0^1 dy \int_0^{y/\sqrt{2}} (3x^2+y^2)dx\right] = 2-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$
oppure

$$2\left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{\sqrt{2}x}^1 (3x^2+y^2)dy + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^{\sqrt{2}x} (x^2+2y^2)dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_0^1 (x^2+2y^2)dy\right]$$

1.1) Soluzione $2\pi \int_0^1 dy \int_{y/\sqrt{2}}^1 (y+\sqrt{2}x)/\sqrt{3}dx = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{6}}$

1.2) Soluzione Teorema di Gauss. Integriamo per strati $3\int_0^1 dy \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dr(r^2+y^2)r\,dr = \dfrac{5\pi}{2}$

2) La prima osservazione da fare è l'esistenza, non ovvia, sia del minimo che del massimo. Per questo si usa il teorema di Weierstrass

Una funzione continua su un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ compatto (chiuso e limitato) ammette massimo e minimo e sono entrambe assunti

La funzione continua è $f(x,y) = x+y$ e $E = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x^2+y^2-x-y-1/16 = 0\}$. Detta $z = F(x,y) = x^2+y^2-x-y-1/16$, (continua), $E = F^{(-1)}(\underbrace{\{0\}}_{sta\ sull'asse\ z})$ e quindi E è la controimmagine di un insieme chiuso ($\{0\}$) secondo una funzione continua. Dalla definizione di continuità , E è chiuso.

Ora mostriamo che E è limitato. Supponiamo non lo sia e quindi in E stanno dei punti per cui $|x|+|y| \to +\infty$. Prendiamo $x \to +\infty$ da cui $x^2-x \to +\infty$. L'uguaglianza $x^2-x = y-y^2+1/16$ mostra che è impossibile.

Un altro modo di procedere è $x^2+y^2 \geq (|x|+|y|)^2/2$ da cui

$$0 = x^2+y^2-x-y-1/16 \geq (|x|+|y|)^2/2 - (|x|+|y|) - 1/16$$

ed è impossibile se almeno una fra x e y diverge.

Una volta accertato che esistono sia massimo che minimo li cerchiamo attraverso i Moltiplicatori di Lagrange. $(x,y,\lambda) = \left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}, \dfrac{3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ è un massimo mentre $(x,y,\lambda) = \left(\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}, \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}, \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}\right)$ è un minimo

3) $v(x,p) = \mathcal{L}u(x,t)$ e l'equazione differenziale diventa

$$p^2v - a^2v_{xx} = \frac{2e^{-px/a}}{p^2-1}, \quad v_x(0,p) = 1/p^2$$

L'omogenea al solito è risolta da $\alpha e^{-px/a} + \beta e^{px/a}$ e per la non omogenea si ricorre al solito a $Bxe^{-px/a}$ con B da calcolare (sia $E \doteq e^{-px/a}$)

$$p^2BxE + 2apBE - zp^2BE = \frac{2E}{p^2-1} \implies B = \frac{1}{ap(p^2-1)}$$

e quindi al soluzione, a parte la condizione iniziale è

$$v(x,p) = \alpha e^{-px/a} + \beta e^{px/a} + \frac{xe^{-px/a}}{ap(p^2-1)} \qquad (\beta = 0)$$

$$v_x(0,p) = \frac{-p\alpha}{a} + \frac{1}{ap(p^2-1)} = \frac{1}{p^2} \implies v(x,p) = \left[\frac{1}{p^2(p^2-1)} - \frac{a}{p^3}\right] e^{-px/a} + \frac{xe^{-px/a}}{ap(p^2-1)} =$$
$$= e^{-px/a}\left[\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{a}{p^3} + \frac{x}{2a(p-1)} + \frac{x}{2a(p+1)} - \frac{x}{ap}\right]$$
$$u(x,t) = \left[\sinh(t-\frac{x}{a}) - (t-\frac{x}{a}) - \frac{a}{2}(t-\frac{x}{a})^2 + \frac{x}{a}\cosh(t-\frac{x}{a}) - \frac{x}{a}\right] H(t-\frac{x}{a})$$

4)

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}x} - e^{\frac{i3\pi}{2}x}}{x^2(x^3+1)(x^2+1)}dx - \pi^2 + \frac{\pi}{3} =$$
$$= 2\pi i\left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(\frac12+\frac{i\sqrt3}{2})} - e^{i\frac{3\pi}{2}(\frac12+\frac{i\sqrt3}{2})}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}(1+e^{\frac{2i\pi}{3}})3e^{\frac{2i\pi}{3}}} + \frac{e^{\frac{-\pi}{2}} - e^{\frac{-3\pi}{2}}}{-1(1-i)2i}\right] \to \frac{\pi - 2\pi^2}{3} + \frac{1}{3\sqrt2}\left(-1 + \frac{\sqrt3}{2}\left(e^{\frac{-\sqrt3\pi}{4}} - e^{\frac{-3\sqrt3\pi}{4}}\right)\right)$$

5) Prima soluzione La forma è chiusa ma non esatta (gli studenti devono esibire le relative derivate). Per vederlo prendiamo la curva $\underline{\gamma}(t) = ((\cos t)^{1/3}, (\sin t)^{1/3}) \doteq (C^{1/3}, S^{1/3})$ $0 \le t \le 2\pi$ e $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{-3C^{\frac23}S\frac13 C^{\frac{-2}{3}}(-S) + 3S^{\frac23}C\frac13 S^{\frac{-2}{3}}C}{C^2+S^2}dt = 2\pi \neq 0$ e quindi la forma non è esatta

Il gradiente della funzione $f(x,y) = \arctan(y^3/x^3)$ è pari alle funzioni definenti la forma differenziale. Inoltre osserviamo che

$$\lim_{\substack{x\to0^+\\y>0}} \arctan\frac{y^3}{x^3} = \frac{\pi}{2},\ \lim_{\substack{x\to0^-\\y>0}} \arctan\frac{y^3}{x^3} = \frac{-\pi}{2},\ \lim_{\substack{x\to0^+\\y<0}} \arctan\frac{y^3}{x^3} = \frac{-\pi}{2},\ \lim_{\substack{x\to0^-\\y<0}} \arctan\frac{y^3}{x^3} = \frac{\pi}{2}$$

Definiamo allora la funzione

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y),\ x>0 \\ f(x,y)+\pi,\ x<0 \\ \pi/2\ x=0,\ y>0 \end{cases}$$

Notare che per $x=0$, $y<0$ non è definita ed anzi $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0^+\\y<0}} F(x,y) - \lim_{\substack{x\to0^-\\y<0}} F(x,y) = 2\pi$. Non c'è modo quindi di definirla in maniera tale che sia continua e men che meno C^1.

Il punto iniziale è $(1,0)$. Per $\vartheta = 5\pi/2$ abbiamo $(0,2)$ e si gira una sola volta intorno all'origine. Per $\vartheta = 3\pi/2$ si ha il punto $2^{\frac35}(0,-1) \doteq P$ Per questa parte della curva $\underline{\gamma}_1$,

$$\int_{\underline{\gamma}_1} \omega = \lim_{\substack{x\to0^-\\y=-2^{\frac35}}} F(x,y) - F(1,0) = \frac{3\pi}{2} - 0$$

Poi c'è quella parte della curva $\underline{\gamma}_1$ che connette i punti P e $Q = (0,2)$ corrispondente a $\vartheta = 5\pi/2$. Per questa parte della curva $\underline{\gamma}_1$,

$$\int_{\underline{\gamma}_1} \omega = F(0,2) - \lim_{\substack{x\to0^+\\y=-2^{\frac35}}} F(x,y) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

e la somma dei due contributi è $5\pi/2$.

Ora passiamo a $\underline{\gamma}_2$. Il punto iniziale è $(0,-2)$ e quello finale $(2,2)$ per cui

$$\int_{\underline{\gamma}_2} \omega = F(2,2) - \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y=-2}} F(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Sommando si ha $\dfrac{13\pi}{4}$

Seconda soluzione Eseguiamo l'integrale curvilineo $(2^{\frac{2\vartheta}{5\pi}} \doteq 2^q)$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{-3C^2S^3 2^{5q}(-2^q S + 2^q C \ln 2 \frac{2}{5\pi}) + +3C^3S^2 2^{5q}(2^q C + 2^q S \ln 2 \frac{2}{5\pi})}{2^{6q}(C^6+S^6)} dt = \\
&= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{3C^2S^2}{(C^2+S^2)(C^4+S^4-C^2S^2)} dt = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{3C^2S^2}{(C^2+S^2)((C^2+S^2)^2-3C^2S^2)} dt = \\
&= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{3C^2S^2-1}{1-3C^2S^2} dt + \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dt}{1-3C^2S^2} = \frac{-5\pi}{2} + 4\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \frac{dt}{4-3(\sin(2t))^2} = \\
&= \frac{-5\pi}{2} + 2\int_0^{5\pi} \frac{du}{4-3\sin^2 u} = \frac{-5\pi}{2} + 4\int_0^{5\pi} \frac{du}{5+3\cos(2u)} = \frac{-5\pi}{2} + 2\int_0^{10\pi} \frac{dv}{5+3\cos v} = \\
&= \frac{-5\pi}{2} + 10\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\frac{2z}{3z^2+10z+3} = \frac{-5\pi}{2} + \frac{40\pi i}{8i} = \frac{5\pi}{2}
\end{aligned}$$

Alternativamente

$$\int_0^{10\pi} \frac{dv}{5+3\cos v} = 5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{5+3\cos v} + 5\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dv}{5+3\cos v} = 10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{5+3\cos v}$$

e poi sostituire $v = \arctan y$ (sostituzione di Weierstrass)

Per quanto riguarda $\underline{\gamma}_2$, la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso e quindi possiamo sostituire a $\underline{\gamma}_2$ la curva che più fa al caso nostro. Scegliamo $(2^{\alpha\vartheta+\beta}\cos\vartheta, 2^{\alpha\vartheta+\beta}\sin\vartheta)$, $-\pi/2 \le \vartheta \le \pi/4$ con $\alpha = \dfrac{8(\sqrt{2}-1)}{3\pi}$ e $\beta = \dfrac{2+4\sqrt{2}}{3}$. Rifacendo i calcoli di prima arriviamo a

$$\begin{aligned}
&\frac{-3\pi}{4} + 4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{4-3(\sin(2t))^2} = \frac{-3\pi}{4} + 2\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{4-3(\sin u)^2} = \frac{-3\pi}{4} + 4\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{5+3\cos(2u)} = \\
&= \frac{-3\pi}{4} + 2\int_{-2\pi}^{\pi} \frac{dv}{5+3\cos v} = \frac{-3\pi}{4} + \underbrace{2\int_{-2\pi}^{0} \frac{dv}{5+3\cos v}}_{\pi} + \underbrace{2\int_0^{\pi} \frac{dv}{5+3\cos v}}_{\pi/2} = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$