Analisi II per Ingegneria Elettronica & Internet
10–02–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, secondo appello, compito A

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (10 punti) Sia data la funzione $F(x,y,z) = \sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2 + z + x^2 + y^2$.

1.1) Applicando il "Teorema delle funzioni implicite", dimostrare che la relazione $F(x,y,z)=0$ definisce nell'intorno del punto $\underline{x} = (0,0,0)$ una funzione $z = f(x,y)$. [Quindi esiste una sfera $B_{\underline{0}}(r) = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon \|\underline{x}\| < r, \underline{x} = (x,y)\}$ tale che $F(x,y,f(x,y)) = 0$ *per ogni* $(x,y) \in B_{\underline{0}}(r)$. Il valore di r non è importante].

1.2) Dimostrare che $(0,0)$ è un punto critico per $f(x,y)$ e determinarne la natura.

Risposta (barrare): massimo, minimo sella

2) (6 punti) Calcolare il volume dello spazio che soddisfa le seguenti relazioni: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \geq 1$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 18 - x^2 - y^2$.

3) (8 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + y'(t) = t & x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ x'(t) + x(t) + y(t) = t & y'(0) = 1 \end{cases}$

4) (6 punti) Si dimostri il teorema: *Sia* $\{f_n(x)\}$ $x \in [a,b]$ *(può essere* $a = -\infty$ *e/o* $b = +\infty$*) una successione tale che* $\sup\limits_{x\in[a,b]} f_n(x) \leq M_n$. *Se accade che* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty$ *(la serie converge) allora la serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *è uniformemente convergente.*

4.1) Si dica se la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+k^2}$ converge uniformemente in $[-3,3]$ e in $[0,+\infty)$.

Soluzione di 4.1) La serie converge puntualmente per ogni x e basta maggiorare $\dfrac{x}{x^2+k^2} \leq \dfrac{x}{k^2}$ osservando contestualmente che $\sum 1/k^2$ converge.

Convergenza uniforme in $[-3,3]$. Bisogna mostrare che

$$\sup_{-3\leq x\leq 3} \Big| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x}{x^2+k^2} \Big| < \varepsilon \ \forall\ n \geq n_\varepsilon$$

Basta vedere $0 \leq x \leq 3$ essendo la funzione dispari. Ora

$$\sup_{-3\leq x\leq 3} \Big| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x}{x^2+k^2} \Big| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \sup_{0\leq x\leq 3} \frac{x}{x^2+k^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \sup_{0\leq x\leq 3} \frac{x}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^2} \leq 3\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon$$

non appena $n > 3/\varepsilon$.

In $[0, +\infty)$ la convergenza non è uniforme (basta $x \in [1, +\infty)$)

$$\sup_{x\geq 1} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x}{x^2+k^2} \geq \sup_{x\geq 1} x \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dy}{x^2+y^2} = \sup_{x\geq 1} \arctan \frac{y}{x}\Big|_{n-1}^{+\infty} = \sup_{x\geq 1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{n-1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$$

da cui la non uniforme convergenza.

Analisi II per Ingegneria Informatica
10–02–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, secondo appello, compito A

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7.5 punti) Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è il bordo superiore dell'ellisse percorso in senso antiorario $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ e $\omega = \frac{-(y-1)dx + xdy}{x^2 + (y-1)^2}$

2) (7.5 punti) Calcolare il volume dello spazio che soddisfa le seguenti relazioni: $\frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 18 - x^2 - y^2$.

3) (7.5 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + y'(t) = t & x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ x'(t) + x(t) + y(t) = t & y'(0) = 1 \end{cases}$

4) (7.5 punti) Per $p = 5, 6, 7, 8, 9$ si calcoli l'integrale $\oint_Q \frac{z^p}{z(z^3-1)(z^2-4)} dz$ dove Q è il rettangolo che collega i punti $(3, -2)$, $(3, 2)$, $(-3/2, 2)$, $(-3/2, -2)$ e percorso in senso antiorario.

Analisi II per Ingegneria Elettronica & Internet
10–02–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, secondo appello, compito B

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (10 punti) Sia data la funzione $F(x, y, z) = -\sin x^2 - \sin y^2 - \sin z^2 + z - x^2 - y^2$.

1.1) Applicando il "Teorema delle funzioni implicite", dimostrare che la relazione $F(x, y, z) = 0$ definisce nell'intorno del punto $\underline{x} = (0, 0, 0)$ una funzione $z = f(x, y)$. [Quindi esiste una sfera $B_{\underline{0}}(r) = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon \|\underline{x}\| < r, \underline{x} = (x, y)\}$ tale che $F(x, y, f(x, y)) = 0$ *per ogni* $(x, y) \in B_{\underline{0}}(r)$. Il valore di r non è importante].

1.2) Dimostrare che $(0, 0)$ è un punto critico per $f(x, y)$ e determinarne la natura.

Risposta (barrare): massimo, minimo sella

2) (6 punti) Calcolare il volume dello spazio che soddisfa le seguenti relazioni: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \geq 1$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 36 - x^2 - y^2$.

3) (8 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + y'(t) = t & x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ x'(t) + x(t) + y(t) = t & y'(0) = -1 \end{cases}$

4) (6 punti) Si dimostri il teorema: *Sia* $\{f_n(x)\}$ $x \in [a, b]$ *(può essere* $a = -\infty$ *e/o* $b = +\infty$*) una successione tale che* $\sup\limits_{x \in [a,b]} f_n(x) \leq M_n$. *Se accade che* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty$ *(la serie converge) allora la serie* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *è uniformemente convergente.*

4.1) Si dica se la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x}{x^4 + k^2}$ converge uniformemente in $[-3, 3]$ e in $[0, +\infty)$.

Soluzione La serie converge uniformemente in $[0, +\infty)$ e quindi anche puntualmente. Basta mostrare che

$$\sup_{x \geq 0} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x}{x^4 + k^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \sup_{x \geq 0} \frac{x}{x^4 + k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3\sqrt{k}}{2 \cdot 3^{1/4} k^4} < \varepsilon$$

Analisi II per Ingegneria Informatica
10–02–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, secondo appello, compito B

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7.5 punti) Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è il bordo superiore dell'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$ percorso in senso antiorario e $\omega = \frac{-(y-2)dx + xdy}{x^2+(y-2)^2}$

2) (7.5 punti) Calcolare il volume dello spazio che soddisfa le seguenti relazioni: $\frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 36 - x^2 - y^2$.

3) (7.5 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + y'(t) = t & x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ x'(t) + x(t) + y(t) = t & y'(0) = -1 \end{cases}$

4) (7.5 punti) Per $p = 5, 6, 7, 8, 9$ si calcoli l'integrale $\oint_Q \frac{z^p}{z(z^3-1)(z^2-4)} dz$ dove Q è il rettangolo che collega i punti $(3,-3)$, $(3,3)$, $(-3/2,3)$, $(-3/2,-3)$ e percorso in senso antiorario.