Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica & Internet
02–07–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Estiva, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7.5 punti) Si considerino le superfici cartesiane S_1 e S_2 di equazione rispettivamente $z = 4 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2$ e $z = 1 + x^2 + y^2$. Si calcoli il valore di quella porzione di volume compresa fra le due superfici e la cui proiezione sul piano (x, y) verifica le condizioni $y + x \geq 0$, $9x^2 + 3y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Integrando per fili l'integrale è

$$\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y+x\geq 0}} (4 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 - 1 - x^2 - y^2)dx\,dy - \iint_{\substack{9x^2+3y^2\leq 1\\ y+x\geq 0}} (4 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 - 1 - x^2 - y^2)dx\,dy$$

ossia

$$\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y+x\geq 0}} (3 - \frac{3}{2}x^2 - 3y^2)dx\,dy - \iint_{\substack{9x^2+3y^2\leq 1\\ y+x\geq 0}} (3 - \frac{3}{2}x^2 - 3y^2)dx\,dy \doteq I_1 - I_2 \qquad (1)$$

Cominciamo col primo. Passiamo a coordinate polari.

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt \int_0^1 \rho(3 - \frac{3}{2}\rho^2 C^2 - 3\rho^2 S^2)d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{8}C^2 - \frac{3}{4}S^2\right] =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\frac{1+\cos(2t)}{2} - \frac{3}{4}\frac{1-\cos(2t)}{2}\right] = \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{16}\pi - \frac{3}{18}\pi = \frac{15}{16}\pi$$

I_2. Cambiamo variabili $u = 3x$, $v = \sqrt{3}y$. La retta $y \geq -x$ diventa $v \geq -u/\sqrt{3}$ e l'integrale diventa

$$I_2 = \iint_{\substack{u^2+v^2\leq 1\\ \sqrt{3}v+u\geq 0}} (3 - \frac{1}{6}u^2 - v^2) \underbrace{\frac{1}{3\sqrt{3}}}_{Iacobiano} du\,dv =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} dt \int_0^1 d\rho\rho(3 - \frac{1}{6}\rho^2\frac{1+\cos(2t)}{2} - \rho^2\frac{1-\cos(2t)}{2}) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{48} - \frac{1}{8}\right) = \frac{65\pi}{144\sqrt{3}}$$

La differenza dà il risultato.

2) (7.5 punti) Si considerino la superficie S_1 e la curva **chiusa** C , giacente su S_1, la cui proiezione sul piano (x, y) ha il sostegno definito da: 1) $8x^2 + 16y^2 = 1$, $4x^2 + 2y^2 = 1$ se $y > 0$ 2) se $y = 0$ il sostegno è dato dai due segmenti congiungenti i punti di contatto delle due ellissi con l'asse delle ascisse.

La curva è percorsa in modo che la sua proiezione sul piano (x, y) sia percorsa in senso antiorario.

Si calcoli $\oint_C (-ydx + x(dy+dz))$

Svolgimento: Come prima cosa bisogna avere bene in mente come è fatta la proiezione sul piano (x,y) della curva chiusa C. In formule è scrivibile come

$$\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 : 8x^2+16y^2=1,\ 4x^2+2y^2=1,\ y\geq 0\}\bigcup\left\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 : y=0,\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\leq |x|\leq\frac{1}{2}\right\}$$

Poi conviene spezzare la forma differenziale nella somma $\omega=(xdy-ydx)+xdz\overset{\text{def}}{=}\omega_1+\omega_2$ ed osservare che ω_1 non contiene la z e quindi l'integrale curvilineo dipende solo dalla proiezione della curva sul piano (x,y). Inoltre $\oint_C \omega_1$ è pari a 2 volte l'area della proiezione sul piano (x,y) della curva chiusa C ossia $\oint_C \omega_1 = \pi(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{8\sqrt{2}})=\pi\frac{3}{8\sqrt{2}}$

Ora non resta che calcolare $\oint_C xdz$. Bisogna eseguire le seguenti parametrizzazioni:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : x_1=t, y_1=0, z_1=4-\frac{1}{2}t^2, \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\leq t\leq\frac{1}{2}\\
&\gamma_2 : x_2=\frac{1}{2}\cos t, y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, z_2=4-\frac{1}{8}\cos^2 t-\sin^2 t, \quad 0\leq t\leq\pi\\
&\gamma_3 : x_3=t, y_3=0, z_3=4-\frac{1}{2}t^2 \quad -\frac{1}{2}\leq t\leq -\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
&\gamma_4 : x_4=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t, y_4=-\frac{1}{4}\sin t, z_4=4-\frac{1}{16}\cos^2 t-\frac{1}{8}\sin^2 t \quad -\pi\leq t\leq 0
\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{4}\oint_{\gamma_k} xdz=\frac{\sqrt{2}}{24}-\frac{2}{3}$. Il risultato finale è la somma dei due ossia

$$\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{24}$$

Alternativamente si può usare il Teorema di Stokes. Parametrizziamo la superficie $x=\varphi_1(u,v)=u$, $\varphi_2(u,v)=v$, $z=\varphi_3(u,v)=4-u^2/2-2v^2$.

$$\underline{\varphi}_u(u,v)\wedge\ \underline{\varphi}_v(u,v)=u\underline{i}+4v\underline{j}+\underline{k}$$

Sia A quelle porzione del grafico della superficie di S_1 la cui proiezione sul piano (x,y) sta all'interno della curva C. L'integrale che cerchiamo è

$$\iint_A \underbrace{(0,-1,2)}_{rot(-y,x,x)}\cdot\frac{(\underline{\varphi}_u(u,v)\wedge\ \underline{\varphi}_v(u,v))}{\|\underline{\varphi}_u(u,v)\wedge\ \underline{\varphi}_v(u,v)\|}d\sigma$$

Con la parametrizzazione cartesiana otteniamo

$$\iint_{int\,C}(-4v+2)dudv=\iint_{\substack{4u^2+2v^2\leq 1\\ v\geq 0}}(-4v+2)dudv-\iint_{\substack{8u^2+16v^2\leq 1\\ v\geq 0}}(-4v+2)dudv$$

Primo integrale. $u=\frac{r}{2}\cos t$, $v=\frac{r}{\sqrt{2}}\sin t$, $0\leq t\leq\pi$,

$$\int_0^\pi dt\int_0^1\frac{r}{2\sqrt{2}}(-\frac{4r}{\sqrt{2}}\sin t+2)dr=\int_0^1\frac{r}{2\sqrt{2}}(\frac{-8r}{\sqrt{2}}+2\pi)dr=-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Secondo integrale. $u = \frac{r}{2\sqrt{2}}\cos t$, $v = \frac{r}{4}\sin t$, $0 \le t \le \pi$,

$$\int_0^\pi dt \int_0^1 \frac{r}{8\sqrt{2}}(-r\sin t + 2)dr = \int_0^1 \frac{r}{8\sqrt{2}}(-2r + 2\pi)dr = \frac{-1}{12\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

Sottraendo si ha il risultato.

3) (7.5 punti) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 - \dfrac{4}{3}xy$. Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

Svolgimento: si veda il compito del 2/2/2015 nella pagina dell'anno accademico 2014–2015

4) (7.5 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{-t} \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1 \end{cases}$

Detta $y(t; y_0, y_1)$ la soluzione, si trovino y_0 e y_1 tale che $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t; y_0, y_1) = 0$

Svolgimento: si veda il compito del 17/2/2007 nella pagina dell'anno accademico 2006–2007

Mio malgrado devo ribadire quanto già detto nei precedenti compiti: chi sbaglia a scrivere la formula per $\mathcal{L}(y)$ prende zero all'esercizio

5) (5 punti) Si dimostri il Teorema: *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^3$ aperto e connesso e sia $\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$ una forma tale che $a, b, c \in C^1(A)$. Allora la forma è esatta se e solo se l'integrale su ogni curva chiusa regolare, semplice è nullo.*

Analisi II per Ingegneria Informatica
02–07–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Estiva, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7.5 punti) Si considerino le superfici cartesiane S_1 e S_2 di equazione rispettivamente $z = 4 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2$ e $z = 1 + x^2 + y^2$. Si calcoli il valore di quella porzione di volume compresa fra le due superfici e la cui proiezione sul piano (x, y) verifica le condizioni $y + x \geq 0$, $9x^2 + 3y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Svolgimento: si veda il compito per elettronica&internet

2) (7.5 punti) Sia $\underline{\gamma}^+$ la curva di sostegno $x^2 + y^2 = 16$ percorsa in senso antiorario e $\underline{\sigma}^-$ la curva di sostegno $x^2 + y^2 = 9$ percorsa in senso orario. Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{y-2}{y^2 - 4y + 5 + x^2 - 2x}dx - \frac{x-1}{y^2 - 4y + 5 + x^2 - 2x}dy$$

Si calcolino le quantità $I_1 : \oint_{\underline{\gamma}^+} \omega + \oint_{\underline{\sigma}^-} \omega$ e $I_2 : \oint_{\underline{\gamma}^+} \omega - \oint_{\underline{\sigma}^-} \omega$

Svolgimento I_1. La forma è chiusa. La curva $\underline{\gamma}^+ \cup \underline{\sigma}^-$ giace in un semplicemente connesso e quindi l'integrale è zero. *Si badi che la semplce connessione dipende in modo essenziale dal fatto che σ^- è percorsa in senso orario (concetto spiegato e ribadito a lezione)*

I_2. Sicome

$$\oint_{\underline{\gamma}^+} \omega - \oint_{\underline{\sigma}^-} \omega = \oint_{\underline{\gamma}^+} \omega + \oint_{\underline{\sigma}^+} \omega$$

il ragionamento di prima non è più valido.
Bisogna osservare che il denominatore delle due espressioni è $(x-1)^2 + (y-2)^2$ ed il punto $(1, 2)$ giace all'interno di tutte e due le curve. Nel passaggio quindi dalla curva più esterna a quella più interna non si interseca il punto $(1, 2)$. Per il Lemma di Gauss–Green, $\oint_{\underline{\gamma}^+} \omega = -\oint_{\underline{\sigma}^-} \omega$

Quindi il risultato è pari a $2\oint_{\underline{\gamma}^+} \omega$. Sempre per il Lemma di Gauss–Green, l'ultimo integrale è pari a $2\oint_{\underline{\gamma}_1^+} \omega$, dove $\underline{\gamma}_1^+$ è la curva $1 + \varepsilon \cos t$, $2 + \varepsilon \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ con ε così piccolo da stare all'interno della circonferenza $x^2 + y^2 = 9$ e quindi $\varepsilon < 3 - \sqrt{5}$. L'integrale vale $2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

Chi ha concluso che la forma differenziale è esatta dopo aver verificato che le derivate miste sono uguali (forma chiusa), ha commesso un grave errore con forte penalizzazione nel punteggio

3) (7.5 punti) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$

Seguendo il cammino "a Pacman" a pag.12 del Giornale delle Lezioni, si perviene a $2I = 2\pi i Res f(-1)$ dove $f(z) = \sqrt{z}/(1+z)^2$ da cui

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\sqrt{z} = \pi i \lim_{z\to -1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{\pi i}{2}\frac{1}{(e^{i\pi})^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

4) (7.5 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{-t} \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1 \end{cases}$

Detta $y(t; y_0, y_1)$ la soluzione, si trovino y_0 e y_1 tale che $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t; y_0, y_1) = 0$

Svolgimento: si veda il compito per elettronica&internet