

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
03-05-2025 A.A. 2024/2025, appello straordinario

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

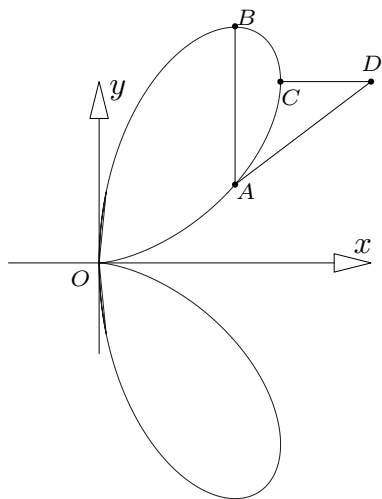
CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**)



Sia $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$ l'equazione del bordo delle due figure curvilinee. L'angolo determinato dal segmento OC col semiasse positivo delle ascisse è 45 gradi. I punti A e B hanno ascissa $3/2$. $D = (3, 2)$. 1) Si calcoli l'area della parte curvilinea $\widehat{ACBA}$ 2) Si calcoli l'area della parte $\widehat{ADCA}$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \left(t - \frac{x}{a} \right)^2 H\left(t - \frac{x}{a}\right) & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \end{cases}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{(\cos t)^2 dt}{(5 - 4 \cos t)^2}$

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^p e^{-k^2 x^2}$ con $x \geq 0, p \geq 0$.

1) Argomentando dire per quali valori di p converge puntualmente come funzione di x .

2) Argomentando dire per quale valore di p converge uniformemente in $[0, +\infty)$ e per quali non

converge uniformemente (se esistono).

4) (12 punti) Solo per Elettronica&Internet Sia data la forma differenziale $\omega = (3x^2 - y^2 - 2yz - z^2 + 2xy + 2xz)dx + (x^2 - 3y^2 - 6yz - 3z^2 - 2xy - 2xz)dy + (x^2 - 3y^2 - 6yz - 3z^2 - 2xy - 2xz)dz$ e la curva $\underline{\gamma}$ in $\mathbf{R}^3$ definita da $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = -\sin t - \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/6$. Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}} \omega$

4) (12 punti) Solo per Informatica Sia data la forma differenziale
$$\frac{(1 - x^2y + 2xy^2 + xy^3 + 2x^3y^4 + x^5y^5) dx}{(1 + x^2y)^2} - \frac{(1 + x^3)dy}{(1 + x^2y)^2}$$
 Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $y = \sin x$ $0 \leq x \leq \pi/2$
- 2) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario

Regole per la consegna

- 1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile
- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Soluzioni

1) Passiamo a coordinate polari. $x = rC$, $y = rS$ da cui $r^4 = 8r^3 \cos t \sin^2 t$ quindi $r = 8CS^2$ e $CSr \geq 0$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ma per la foglia superiore serve $0 \leq t \leq \pi/2$. Sostituendo $x = 3/2$ nella relazione $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$ viene fuori $y = \pm\sqrt{3}/2$, $y = \pm 3\sqrt{3}/2$ quindi il segmento OA forma un angolo di 30 gradi con il semiasse positivo delle ascisse e 60 gradi il segmento OB .

1). Usiamo Gauss-Green. Il segmento curvilineo $\widetilde{AB}$ è il sostegno della curva $x = 8C^2S^2$, $y = 8CS^3$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (8C^2S^2(-8S^4 + 24C^2S^2) - 8CS^3(-16CS^3 + 16C^3S)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 64C^2S^4 dt = 8 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(2t) \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2t))^2 dt - 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2t))^2 \cos(2t) dt = \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt - \frac{2}{3} (\sin(2t))^3 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1 - \sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Il segmento verticale è parametrizzato da $(3/2, -t)$, $-3\sqrt{3}/2 \leq t \leq -\sqrt{3}/2$ per cui l'integrale curvilineo su di esso è $\frac{1}{2} \frac{3}{2} \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} -dt = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$ e il risultato finale è $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \sim 0.61$

2). Il tratto $\overline{AD}$ è $t\overline{D} + (1-t)\overline{A} = (\frac{3}{2}(1+t), t(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2})$ e il relativo l'integrale curvilineo è $9/4 - 9\sqrt{3}/8$. Poi abbiamo il tratto orizzontale da D verso A $(-t, 2)$, $-3 \leq t \leq -2$ che dà

$$1. \text{ Infine il tratto obliquo discendente } -4 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt - \frac{2}{3} (\sin(2t))^3 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \right] = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La somma dei tre contributi è $\frac{47}{12} - \frac{\pi}{6} - \frac{13\sqrt{3}}{8} \sim 0.58$

2) La soluzione della equazione $p^2 v(x, p) - a^2 v_{xx}(x, p) = \frac{2xE}{p^3}$, $v(0, p) = 0$ ($E \doteq e^{-px/a}$) è $v(x, p) = \frac{xE}{2p^5} + \frac{x^2 E}{2ap^4}$ per cui $u(x, t) = \frac{x \cdot (\hat{t})^4 H(\hat{t})}{48} + \frac{x^2 \cdot (\hat{t})^3 H(\hat{t})}{12a}$, ($\hat{t} = t - x/a$).

3) (Informatica) sostituire $z = e^{it}$. Risultato $31\pi/108$

3) (Elettronica&Internet) La serie converge puntualmente per ogni valore di x . Basta osservare che $\lim_{k \rightarrow \infty} x^2 \cdot x^p e^{-k^2 x^2} = 0$.

Il massimo di $x^p e^{-k^2 x^2}$ si ha per $x_k = \sqrt{p}/(k\sqrt{2})$ e

$$x^p e^{-k^2 x^2} \leq \frac{p^{1/(2p)}}{2^{1/(2p)} k^p} e^{-p/2}$$

da cui la convergenza totale per $p > 1$ e quindi uniforme. Per $p \leq 1$ non c'è convergenza totale.

Sia $1/(n+1) \leq x < 1/n$

$$\sup_{x \geq 0} \sum_{k=0}^{+\infty} x^p e^{-k^2 x^2} \geq \sup_{x \geq 0} \sum_{k=n+1}^{2n} x^p e^{-k^2 x^2} \geq \sup_{1/(n+1) \leq x < 1/n} \sum_{k=n+1}^{2n} x^p e^{-k^2 x^2} \geq n \frac{1}{(n+1)^p} e^{-1}$$

ed è una quantità non piccola per ogni $p \leq 1$ da cui la non convergenza.

4) (Elettronica&Internet) Il rotore della forma è zero ed è definita in $\mathbf{R}^3$ quindi è una forma esatta in $\mathbf{R}^3$. Cerchiamo il potenziale integrando in x .

$$U(x, y, z) = x^3 - y^2x - 2xyz - z^2x + x^2y + x^2z + V(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2xy - 2xz + x^2 + V_y = (x^2 - 3y^2 - 6yz - 3z^2 - 2xy - 2xz)$$

da cui $V_y = -3y^2 - 6yz - 3z^2$ e $V(y, z) = -y^3 - 3y^2z - 3z^2y + W(z)$. Quindi

$$U(x, y, z) = x^3 - y^2x - 2xyz - z^2x + x^2y + x^2z - y^3 - 3y^2z - 3z^2y + W(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2xy - 2zx + x^2 - 3y^2 - 6zy + W_z = x^2 - 3y^2 - 6yz - 3z^2 - 2xy - 2xz$$

$W_z = -3z^2$ $w(z) = -z^3$ e quindi $U(x, y, z) = x^3 - y^2x - 2xyz - z^2x + x^2y + x^2z - y^3 - 3y^2z - 3z^2y - z^3$. Il risultato è 0.

4) Informatica Detta $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ la forma si può verificare che $A_y - B_x = 3xy^2$ da cui $(A - xy^3)_y - B_x = 0$ quindi la forma $\tilde{\omega} = (A - xy^3)dx + Bdy$ è chiusa.

1) $\int_{\underline{\gamma}} \tilde{\omega} = \int_{\underline{\gamma}} \omega - \int_{\underline{\gamma}} xy^3 dx$ per cui $\int_{\underline{\gamma}} \tilde{\omega} + \int_{\underline{\gamma}} xy^3 dx = \int_{\underline{\gamma}} \omega$. Il sostegno giace in un sottoinsieme semplicemente connesso per cui utilizziamo il cammino **solo per** $\tilde{\omega}$

$$\underline{\gamma}_1(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2, \quad \underline{\gamma}_2(t) = (\pi/2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\underline{\gamma}_1} \tilde{\omega} = \int_{\underline{\gamma}_1} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{\underline{\gamma}_2} \tilde{\omega} dx = \int_0^1 \frac{1 + (\pi/2)^3}{(1 + y\pi^2/4)^2} dt = \frac{8 + \pi^3}{8 + \pi^2}$$

$$\int_{\underline{\gamma}} xy^3 = \frac{1}{4}. \text{ Il risultato è la somma dei tre contributi}$$

2) Stesso argomento di 1). La curva è chiusa in un semplicemente connesso per cui $\oint_{\underline{\gamma}} \tilde{\omega} = 0$.

$$\oint_{\underline{\gamma}} xy^3 = 0 \text{ lo stesso (non per la esattezza della forma ma solo per una casualità)}$$