

**Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
22-02-2025 A.A. 2024/2025, secondo appello, compito A**

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

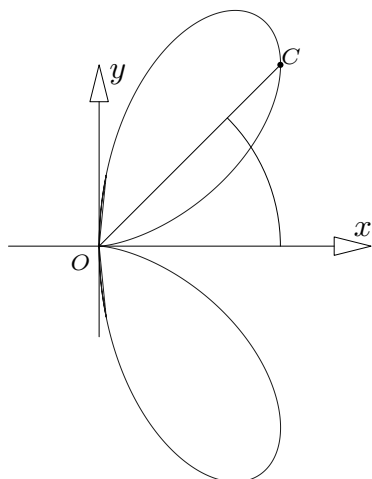
CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**)



Sia $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$ l'equazione del bordo delle due figure curvilinee. L'angolo determinato dal segmento OC col semiasse positivo delle ascisse è 45 gradi. 1) Si ruoti la parte della foglia superiore che sta sotto al segmento OC di 360 gradi intorno all'asse x e si calcoli il volume del solido generato 2) Si ruoti la foglia superiore di 180 gradi intorno alla retta OC e si calcoli il volume del solido ottenuto (Per i punti 1) e 2) conviene integrare per parti ricordando chi è la derivata di $(\sin x)^n$ con n intero. Inoltre per il punto 2) si veda pag.15 della lezione n.8 dove un calcolo analogo viene proposto per trovare l'area di una superficie ma l'idea è la stessa)

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = G(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{dove } G(t) = \int_0^t y(\cos(t-y) + \sin(t-y))dy$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $\oint_{|z-1|=3/2} \frac{\cos(\pi z/2)dz}{z(e^{i2\pi z} - 1)}$

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (12 punti) Solo per Elettronica&Internet Siano dati: 1) l'ellisse $x^2/4 + y^2 = 1$, 2) il punto $P \equiv (2, 2, 2)$, 3) il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = 2xy^2\underline{i} + yx^2\underline{j} + z(x^2 + y^2)\underline{k}$. Da P colleghiamo tutti i punti dell'ellisse e del suo interno fino a generare un volume conico V la cui superficie contornante è composta dalla superficie laterale conica e dalla base ellissoidale. Si calcoli il flusso attraverso la superficie laterale del campo vettoriale $\underline{F}$. (È utile ricordare la formula $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ del segmento che corre fra i punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$)

4) (12 punti) Solo per Informatica Sia data la forma differenziale
$$\frac{(2x^2 + 2y^2 - x + x^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 + y^4 - 2y^2x)dx}{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \frac{y dy}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$
 Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $y = \frac{x^2}{2} - 1, 0 \leq x \leq 2$
- 2) $x = y^2 + y, -1 \leq y \leq 1$
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.
- 4) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 5) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario

Regole per la consegna

- 1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile
- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18-01-2025 A.A. 2024/2025, primo appello, compito B

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

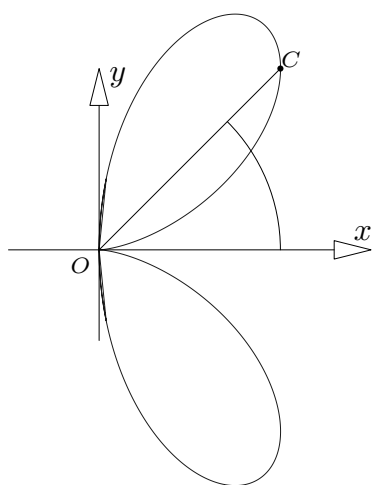
Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo



Sia $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$ l'equazione del bordo delle due figure curvilinee. L'angolo determinato dal segmento OC col semiasse positivo delle ascisse è 45 gradi. 1) Si ruoti la parte della foglia superiore che sta sotto al segmento OC di 360 gradi intorno all'asse x e si calcoli il volume del solido generato 2) Si ruoti la foglia superiore di 180 gradi intorno alla retta OC e si calcoli il volume del solido ottenuto (Per i punti 1) e 2) conviene integrare per parti ricordando chi è la derivata di $(\sin x)^n$ con n intero. Inoltre per il punto 2) si veda pag.15 della lezione n.8 dove un calcolo analogo viene proposto per trovare l'area di una superficie ma l'idea è la stessa)

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = G(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$G(t) = \int_0^t y(-\cos(t-y) + \sin(t-y))dy$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $\oint_{|z-2|=3} \frac{\cos(\pi z/4)dz}{z(e^{i\pi z} - 1)}$

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (13 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Siano dati: 1) l'ellisse $x^2/4 + y^2 = 1$, 2) il punto $P \equiv (2, 2, 2)$, 3) il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = 2xy^2\underline{i} + yx^2\underline{j} + z(x^2 + y^2)\underline{k}$. Da P colleghiamo tutti i punti dell'ellisse e del suo interno fino a generare un volume conico V la cui superficie contornante è composta dalla superficie laterale conica e dalla base ellissoidale. Si calcoli il flusso attraverso la superficie laterale del campo vettoriale $\underline{F}$. (È utile ricordare la formula $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ del segmento che corre fra i punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$)

4) (12 punti) **Solo per Informatica** $\frac{(2x^2 + 2y^2 - x + x^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 + y^4 - 2y^2x)dx}{x^2 + y^2 - 2x + 1} +$

$\frac{y dy}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$ Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $y = \frac{x^2}{2} - 1, 0 \leq x \leq 2$
- 2) $x = y^2 + y, -1 \leq y \leq 1$
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.
- 4) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 5) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario

Regole per la consegna

- 1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile
- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18-01-2025 A.A. 2024/2025, primo appello, compito C

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

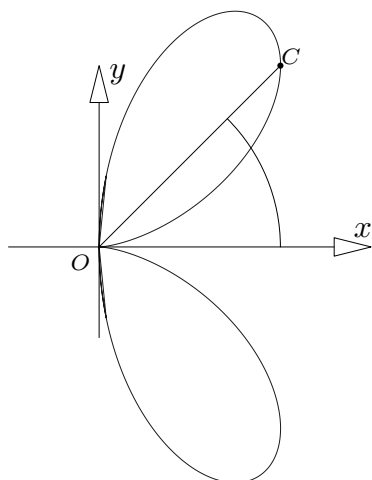
CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per elettronica&Internet e 12 per informatica)



Sia $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$ l'equazione del bordo delle due figure curvilinee. L'angolo determinato dal segmento OC col semiasse positivo delle ascisse è 45 gradi. 1) Si ruoti la parte della foglia superiore che sta sotto al segmento OC di 360 gradi intorno all'asse x e si calcoli il volume del solido generato 2) Si ruoti la foglia superiore di 180 gradi intorno alla retta OC e si calcoli il volume del solido ottenuto (Per i punti 1) e 2) conviene integrare per parti ricordando chi è la derivata di $(\sin x)^n$ con n intero. Inoltre per il punto 2) si veda pag.15 della lezione n.8 dove un calcolo analogo viene proposto per trovare l'area di una superficie ma l'idea è la stessa)

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = G(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \end{cases}$$

dove $G(t) = \int_0^t y(\cos(t - y) - \sin(t - y))dy$

3) (9 punti) Solo per Informatica Calcolare $\oint_{|z+1|=3/2} \frac{\cos(\pi z/2)dz}{z(e^{-i2\pi z} - 1)}$

3) (11 punti) Solo per Elettronica&Internet

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme

nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (13 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Siano dati: 1) l'ellisse $x^2/4 + y^2 = 1$, 2) il punto $P \equiv (2, 2, 2)$, 3) il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = 2xy^2\underline{i} + yx^2\underline{j} + z(x^2 + y^2)\underline{k}$. Da P colleghiamo tutti i punti dell'ellisse e del suo interno fino a generare un volume conico V la cui superficie contornante è composta dalla superficie laterale conica e dalla base ellissoidale. Si calcoli il flusso attraverso la superficie laterale del campo vettoriale $\underline{F}$. (È utile ricordare la formula $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ del segmento che corre fra i punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$)

4) (12 punti) **Solo per Informatica** $\frac{(2x^2 + 2y^2 - x + x^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 + y^4 - 2y^2x)dx}{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \frac{y dy}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$ Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $y = \frac{x^2}{2} - 1, 0 \leq x \leq 2$
- 2) $x = y^2 + y, -1 \leq y \leq 1$
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.
- 4) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 5) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario

Regole per la consegna

- 1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile
- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18-01-2025 A.A. 2024/2025, primo appello, compito D

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

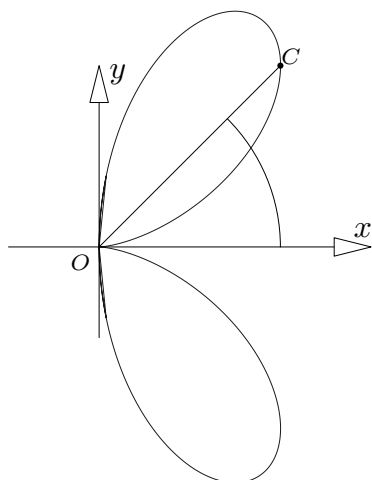
CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**)



Sia $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$ l'equazione del bordo delle due figure curvilinee. L'angolo determinato dal segmento OC col semiasse positivo delle ascisse è 45 gradi. 1) Si ruoti la parte della foglia superiore che sta sotto al segmento OC di 360 gradi intorno all'asse x e si calcoli il volume del solido generato 2) Si ruoti la foglia superiore di 180 gradi intorno alla retta OC e si calcoli il volume del solido ottenuto (Per i punti 1) e 2) conviene integrare per parti ricordando chi è la derivata di $(\sin x)^n$ con n intero. Inoltre per il punto 2) si veda pag.15 della lezione n.8 dove un calcolo analogo viene proposto per trovare l'area di una superficie ma l'idea è la stessa)

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = G(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \end{cases}$$

dove $G(t) = \int_0^t y(-\cos(t-y) - \sin(t-y))dy$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $\oint_{|z+2|=3} \frac{\cos(\pi z/4)dz}{z(e^{-i\pi z} - 1)}$

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme

nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (13 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Siano dati: 1) l'ellisse $x^2/4 + y^2 = 1$, 2) il punto $P \equiv (2, 2, 2)$, 3) il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = 2xy^2\underline{i} + yx^2\underline{j} + z(x^2 + y^2)\underline{k}$. Da P colleghiamo tutti i punti dell'ellisse e del suo interno fino a generare un volume conico V la cui superficie contornante è composta dalla superficie laterale conica e dalla base ellissoidale. Si calcoli il flusso attraverso la superficie laterale del campo vettoriale $\underline{F}$. (È utile ricordare la formula $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ del segmento che corre fra i punti $\underline{x}$ e $\underline{y}$)

4) (12 punti) **Solo per Informatica** $\frac{(2x^2 + 2y^2 - x + x^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 + y^4 - 2y^2x)dx}{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \frac{y dy}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$ Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $y = \frac{x^2}{2} - 1, 0 \leq x \leq 2$
- 2) $x = y^2 + y = 0, -1 \leq y \leq 1$
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.
- 4) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 5) La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario

Regole per la consegna

- 1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile
- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Soluzioni

1) Compiti A,B,C,D. Parte 1). Sia S la porzione di foglia superiore che giace sotto la retta OC . Il volume è $\iint_S 2\pi y dy dx$. Passiamo a coordinate polari. $x = rC$, $y = rS$ da cui $r^4 = 8r^3 \cos t \sin^2 t$ quindi $r = 8CS^2$ e $CSr \geq 0$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ma per la foglia superiore serve $0 \leq t \leq \pi/2$. La porzione S è descritta da $x = rC$, $y = rS$, $0 \leq t \leq \pi/4$, $0 \leq r \leq 8CS^2$. L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} dt \int_0^{8CS^2} 2\pi r S r dr &= \int_0^{\pi/4} dt \frac{2\pi}{3} 2^9 C^3 S^7 = \frac{2^{10}\pi}{3} \int_0^{\pi/4} C^2 \frac{(S^8)'}{8} dt = \frac{2^7\pi}{3} C^2 S^8 \Big|_0^{\pi/4} - \frac{2^7\pi}{3} \int_0^{\pi/4} (-2CSS^8) dt \\ &= \frac{4\pi}{3} + \frac{2^8\pi}{3 \cdot 10} S^{10} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{15} = \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

Parte 2). Siano rispettivamente A e B la parte inferiore e superiore alla retta OC della foglia superiore. L'integrale che cerchiamo è $2\pi \iint_A \frac{x-y}{\sqrt{2}} dx dy + 2\pi \iint_B \frac{y-x}{\sqrt{2}} dx dy$ e in coordinate polari otteniamo

$$\int_0^{\pi/4} dt \int_0^{8CS^2} dr r^2 (C-S) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dt \int_0^{8CS^2} dr r^2 (S-C) = \frac{16\pi}{5}$$

Per il calcolo di in 1) qualcuno ha utilizzato, male, la formula lecita $\int_a^b \pi f^2(x) dx$. Vediamo. Il volume che cerchiamo è compreso fra il volume (V_1) generato dal segmento OC e il volume (V_2) generato dalla rotazione del bordo inferiore della foglia superiore. Lo calcoliamo quindi per sottrazione.

$$V_1 = \pi \int_0^2 y^2 dy = 8\pi/3. \quad C = (2, 2).$$

Per calcolare V_2 abbiamo $y^4 + 2y^2(x^2 - 4x) + x^4 = 0$ da cui $y^2 = 4x - x^2 \pm 2|x|\sqrt{4-2x}$. Chiaramente $4x - x^2 = x(4-x) \geq 0$ e $4x - x^2 \geq 2x\sqrt{4-2x}$. Infatti quadrando si ha $16 + x^2 - 8x \geq 14 - 8x$ se e solo se $x \geq 0$. $y = \pm\sqrt{4x - x^2 + 2|x|\sqrt{4-2x}}$ corrisponde ai bordi della foglia superiore ed inferiore che corre fra l'origine ed il punto C alla massima distanza dall'asse delle ascisse mentre $y = \pm\sqrt{4x - x^2 - 2|x|\sqrt{4-2x}}$ corrisponde ai bordi della foglia superiore ed inferiore che corre fra l'origine ed il punto C alla minima distanza dall'asse delle ascisse. V_2 è quindi

$$\pi \int_0^2 (4x - x^2 - 2|x|\sqrt{4-2x}) dx = \frac{16\pi}{15} \implies \frac{8\pi}{3} - \frac{16\pi}{15} = \frac{8\pi}{5}$$

2) Nel termine noto scriviamo $r \sin(t - \frac{x}{a}) + s \cos(t - \frac{x}{a})$ per cui in trasformata di Laplace si ha

$$p^2 v - a^2 v_{xx} = e^{-px/a} \frac{1}{p^2} \left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{sp}{1+p^2} \right) = e^{-px/a} \left(\frac{r}{p^2} - \frac{r}{1+p^2} + \frac{s}{p} - \frac{sp}{1+p^2} \right) \doteq E(x, p) F(x, p)$$

Proviamo $v(x, p) = cx E$ da cui

$$p^2 cx E - cp^2 x E + 2cpa E = EF \implies c = \frac{F}{2ap}$$

La soluzione è $v(x, p) = \alpha E + \frac{xEF}{2ap}$ e $u(0, t) = 0$ diventa $v(0, p) = 0$ da cui $\alpha = 0$ e finalmente

$$v(x, p) = \frac{x}{2a} e^{-px/a} \left(\frac{r}{p^3} - \frac{r}{p(1+p^2)} + \frac{s}{p^2} - \frac{s}{1+p^2} \right) = \frac{x}{2a} e^{-px/a} \left(\frac{r}{p^3} - \frac{r}{p} + \frac{rp}{1+p^2} + \frac{s}{p^2} - \frac{s}{1+p^2} \right)$$

$$\hat{t} = t - x/a$$

$$u(x, t) = \frac{x}{2a} H(\hat{t}) \left[\frac{r\hat{t}^2}{2} - r + r \cos \hat{t} + s\hat{t} - s \sin \hat{t} \right]$$

Compito A, $r = s = 1$. Compito B, $-r = s = 1$. Compito C, $r = -s = 1$. Compito D, $r = s = -1$.

3) (Informatica) Compito A Abbiamo tre residui, a $z = 0, 1, 2$.

$z = 0$. Sviluppiamo secondo Laurent in $z = 0$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{8} + O(z^4)}{1 + 2\pi iz - 2\pi^2 z^2 + O(z^3) - 1} = \frac{1}{z} \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{8} + O(z^4)}{1 + i\pi z + O(z^2)} \frac{1}{2\pi iz} = \\ &= \frac{1}{2\pi iz^2} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{8} + O(z^4) \right) (1 - i\pi z + O(z^2)) = \frac{1}{2\pi iz^2} - \frac{1}{2z} + \frac{i\pi}{16} + O(1) \end{aligned}$$

da cui il residuo $-1/2$.

$$z = 1. \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \cos \frac{\pi z}{2}}{e^{2i\pi z} - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(z-1) \sin \frac{\pi(z-1)}{2}}{e^{2i\pi(z-1)} - 1} = 0$$

$$z = 2. \quad \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2) \cos \frac{\pi z}{2}}{e^{2i\pi(z-2)} - 1} = \frac{i}{2\pi} \text{ per cui l'integrale è } 2\pi i \left(\frac{-1}{2} + \frac{i}{2\pi} \right) = -\pi i - 1$$

Compito B Abbiamo tre residui $z = 0, 2, 4$.

$z = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{32} + O(z^4)}{i\pi z(1 + \frac{i\pi z}{2} + O(z^2))} = \frac{1}{i\pi z^2} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{32} + O(z^4) \right) (1 - \frac{i\pi z}{2} + O(z^2)) = \frac{1}{i\pi z^2} - \frac{1}{2z} + O(1)$$

da cui il residuo $-1/2$.

$$z = 2. \quad \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2) \cos \frac{\pi z}{4}}{e^{i\pi z} - 1} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-(z-2) \sin \frac{\pi(z-2)}{4}}{e^{i\pi(z-2)} - 1} = 0$$

$$z = 4. \quad \lim_{z \rightarrow 4} \frac{(z-4) \cos \frac{\pi z}{4}}{e^{i\pi(z-4)} - 1} = \frac{i}{\pi} \text{ per cui l'integrale è } 2\pi i \left(\frac{-1}{2} + \frac{i}{\pi} \right) = -\pi i - 2$$

Compito C Abbiamo tre residui $z = 0, -1, -2$.

$z = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{8} + O(z^4)}{-2i\pi z(1 - i\pi z + O(z^2))} = \frac{i}{2\pi z^2} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{8} + O(z^4) \right) (1 + i\pi z + O(z^2)) = \frac{i}{\pi z^2} - \frac{1}{2z} + O(1)$$

da cui il residuo $-1/2$.

$$z = -1. \quad \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+1) \cos \frac{\pi z}{2}}{e^{-2i\pi z} - 1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+1) \sin \frac{\pi(z+1)}{2}}{e^{-2i\pi(z+1)} - 1} = 0$$

$$z = -2. \quad \lim_{z \rightarrow -2} \frac{(z+2) \cos \frac{\pi z}{2}}{e^{-2i\pi(z+2)} - 1} = \frac{-i}{2\pi} \text{ per cui l'integrale è } 2\pi i \left(\frac{-1}{2} - \frac{i}{2\pi} \right) = -\pi i + 1$$

Compito D Abbiamo tre residui $z = 0, -2, -4$.

$z = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{32} + O(z^4)}{z - i\pi z(1 + \frac{-i\pi z}{2} + O(z^2))} = \frac{-1}{i\pi z^2} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{32} + O(z^4)\right) \left(1 + \frac{i\pi z}{2} + O(z^2)\right) = \frac{-1}{i\pi z^2} - \frac{1}{2z} + O(1)$$

da cui il residuo $-1/2$.

$$z = -2. \quad \lim_{z \rightarrow -2} \frac{(z+2)\cos \frac{\pi z}{4}}{e^{-i\pi z} - 1} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{-(z+2)\sin \frac{\pi(z+2)}{4}}{e^{-i\pi(z+2)} - 1} = 0$$

$$z = -4. \quad \lim_{z \rightarrow -4} \frac{(z+4)\cos \frac{\pi z}{4}}{e^{-i\pi(z+4)} - 1} = \frac{-i}{\pi} \text{ per cui l'integrale è } 2\pi i \left(\frac{-1}{2} - \frac{i}{\pi} \right) = -\pi i + 2$$

3) (Elettronica&Internet) Compiti A,B,C,D. Se $x = 0$ chiaramente converge. Inoltre la serie converge puntualmente per ogni $x \neq 0$ in quanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{k^4 x^4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 x^2}$.

Per la convergenza uniforme potremmo provare a dimostrare la convergenza totale. Ogni termine $\frac{x^2 k}{1 + (kx)^4}$ ha un massimo a $x = 1/k$ ed il valore del massimo è $1/(2k)$ da cui $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k) = +\infty$.

Ciò spinge verso la non convergenza uniforme per cui proviamo a dimostrare

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N : \sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4} \geq \varepsilon$$

Dato N prendiamo x tale che $1/(N+1) \leq x < 1/N$ e $n = N+1$ da cui

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4} &\geq \sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{k}{(N+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{k^4}{N^4}} > \\ &> \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{N+1}{(N+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{16N^2}{N^2}} = \frac{N}{17(N+1)} > \frac{N}{34N} = \frac{1}{34} \end{aligned}$$

per cui si può prendere $\varepsilon = 1/34$ e non converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $(0, a)$, $(-a, 0)$ oppure $(-a, b)$, $a, b > 0$.

Converge invece uniformemente ed anzi totalmente in $(a, +\infty)$, $a > 0$. Basta scrivere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{1 + (kx)^4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 x^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 a^2} < +\infty$$

La premessa dell'appello passato $N \leq x < N+1$ **non va bene** e infatti la serie **converge uniformemente** se $x \geq X > 0$. Peraltro ponendo $x = 1/y$ la presente serie si riconduce alla serie precedente

4) (Elettronica&Internet) Compiti A,B,C,D. La somma del flusso dalla superficie laterale e dalla base (B) è $\iiint_V \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z}$ per cui il flusso che cerchiamo è

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} - \iint_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)}) d\sigma, \quad \underline{n}^{(e)} = (0, 0, -1)$$

La parametrizzazione del volume è $(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \lambda \leq 1)$

$$\lambda(2, 2, 2) + (1 - \lambda)(2r \cos t, r \sin t, 0) = (2\lambda + 2rC(1 - \lambda), 2\lambda + rS(1 - \lambda), 2\lambda),$$

Lo iacobiano è $4r\lambda(1 - \lambda)$.

$$3y^2 + 2x^2 = 3(4\lambda^2 + r^2S^2(1 - \lambda)^2 + 4\lambda rS(1 - \lambda)) + 2(4\lambda^2 + 4r^2C^2(1 - \lambda)^2 + 8\lambda rC(1 - \lambda))$$

Le parti proporzionali a C e S danno contributo nullo. Il primo integrale è

$$\int_0^1 d\lambda \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 dr 4r\lambda(1 - \lambda)(20\lambda^2 + (1 - \lambda)^2r^2(3S^2 + 8C^2)) = 4\pi + \frac{11\pi}{20} = \frac{91\pi}{20}$$

$\iint_B (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)}) d\sigma = 0$ in quanto $(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)}) = (F_1(\underline{x}), F_2(\underline{x}), F_3(\underline{x})) \cdot (0, 0, -1) = -F_3(\underline{x})$ e poi $-F_3(\underline{x}) = -z(x^2 + y^2)$ va calcolato sull'ellisse di base che prevede $z = 0$ da cui il risultato.

4) Informatica C'è stato un errore di scrittura nella forma differenziale. Gli studenti sono stati opportunamente "indennizzati".