

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
20-09-2025 A.A. 2024/2025, sesto appello

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (12 punti) **1)** Sia dato l'insieme definito da $V = \{4x^2z - 4x^3 - 4xz + 4x^2 - z^2 + zx - 4x + 4z \leq 0, y^2 \leq z^4 \leq 256\}$. Si calcoli l'integrale esteso a V della funzione $f(x, y, z) = e^x/z^2$

2) (12 punti) Se $g(\xi) \doteq \int_0^\xi (\sin^2(y) + \cos(y))(\xi - y)dy$ e $G(t) = \int_0^t g(\xi)d\xi$, si risolva la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = xG(t) & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

[Notare che la condizione al bordo riguarda la derivata della funzione, non la funzione non derivata]

3) (11 punti) **Solo per Informatica**

Calcolare $\oint_D \frac{\sin(\pi z^2) dz}{z^6 \sin(\pi z)}$ dove D è il quadrato nel piano complesso centrato nell'origine e lato 3.

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Si calcoli $\int_\varphi \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e φ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno è dato dall'insieme $\{z = x^2 + y^2, z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2\}$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = 4xy + 3(x^2 + y^2 + x^3 + y^3)$

4) (11 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale $\omega = \frac{e^T}{V}dV + e^{2T} \ln V dT$. Dimostrare che esiste una funzione $h(T)$ tale che la forma $\omega_1 = h(T) \cdot \omega$ è esatta

3) Calcolare $\int_{\underline{\gamma}} \omega_1$ lungo la curva $\underline{\gamma}(T) = (T, T^2 - 2T + 2), 1 \leq T \leq 2$

Soluzioni

1)

$$4x^2z - 4x^3 - 4xz + 4x^2 - z^2 + zx - 4x + 4z = 4x^2(z - x) - 4x(z - x) - z(z - x) + 4(z - x) \leq 0$$

$$(z - x)(4x^2 - 4x + 4 - z) \leq 0$$

Primo caso. $z \leq x$ e $x \leq \frac{-1 - \sqrt{z-3}}{2} = x_-(z)$ oppure $x \geq \frac{-1 + \sqrt{z-3}}{2} \doteq x_+(z)$. Ne segue $z \geq 3$ e $z \leq 4$ da $z^4 \leq 256$. Si vede facilmente che per $3 \leq z \leq 4$ si ha $x_+(z) < z$ quindi il contributo è

$$\int_3^4 \frac{dz}{z^2} \int_z^{+\infty} e^x dx \int_{-z^2}^{z^2} dy = +\infty$$

$$\mathbf{2)} \quad \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(\sin^2 t + \cos t) = \left(\frac{1}{2p} - \frac{p}{4+p^2} + \frac{p}{1+p^2} \right) \frac{1}{p^2}. \quad \mathcal{L}(G) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(g)$$

L'equazione diventa

$$p^2 v(x, p) - a^2 v_{xx}(x, p) = x \mathcal{L}(G)$$

Provando la non omogenea con $x\xi$ si ha $\xi = \mathcal{L}(G)/p^2$ e la soluzione è ($E = E(x, p) = e^{-px/a}$)
 $v(x, p) = \alpha E + \frac{x \mathcal{L}(G)}{p^2}$. La condizione al bordo dà $\frac{-p\alpha}{a} + \frac{\mathcal{L}(G)}{p^2} = 0$ da cui $\alpha = \frac{a \mathcal{L}(G)}{p^3}$ e quindi la soluzione finale è

$$\begin{aligned} v(x, p) &= \frac{a \mathcal{L}(G) E}{p^3} + \frac{x \mathcal{L}(G)}{p^2} = \\ &= a E \left(\frac{1}{2p^7} - \frac{1}{p^5(4+p^2)} + \frac{1}{p^5(1+p^2)} \right) + x \left(\frac{1}{2p^6} - \frac{1}{p^4(4+p^2)} + \frac{1}{p^4(1+p^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^5(p^2+4)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \int_0^{t_4} dt_5 \frac{\sin(2t_5)}{2} = \frac{-\cos(2t)}{64} + \frac{t^4}{96} - \frac{t^2}{32} + \frac{1}{64}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^5(p^2+1)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \int_0^{t_4} dt_5 \sin(t_5) = -\cos t + \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{2} + 1$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^4(p^2+4)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} \frac{\sin(2t_4)}{2} dt_4 = \frac{\sin(2t)}{32} + \frac{t^3}{24} - \frac{t}{16}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^4(p^2+1)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} \sin(t_4) dt_4 = \sin t + \frac{t^3}{6} - t$$

per cui abbiamo ($\hat{t} = t - x/a$)

$$u(x, t) = a H(\hat{t}) \left[\frac{\hat{t}^6}{1440} + \frac{\cos(2\hat{t})}{64} - \cos \hat{t} + \frac{\hat{t}^4}{48} + \frac{15\hat{t}^2}{32} + \frac{63}{64} \right] + x \left[\frac{\hat{t}^5}{250} + \frac{t^3}{8} - \frac{\sin(2t)}{16} + \sin t - \frac{15t}{16} \right]$$

3) Informatica Residui solo in $z = 0$,

$z = 0$. Polo di ordine 5. Lo sviluppo di Laurent in $z = 0$ è $\frac{1}{z^5} - \frac{\pi^2}{6z^3} + \left(\frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{6} \right) \frac{1}{z} + O(z)$,

Risultato $i \left(\frac{7\pi^5}{180} - \frac{\pi^3}{3} \right)$

3) Elettronica&Internet Appliciamo il Teorema di Stokes. Il rotore del campo vettoriale $(yz - \frac{y^3}{3}, xz + \frac{x^3}{3}, xy)$ è $\underline{V} \doteq (0, 0, x^2 + y^2)$. Intersechiamo il paraboloide e il piano e otteniamo $x^2 + y^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}y = 2$ da cui $x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}rC$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}rS$. Dobbiamo calcolare

$$\iint_{x^2+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y \leq 2} (x^2 + y^2) = \frac{15\pi}{2}$$

4) Elettronica&Internet Ci sono 4 punti critici. $(0, 0)$ (minimo); $(-10/9, -10/9)$ (massimo); $(2/9, -4/9)$ e $(-4/9, 2/9)$ (selle)

4) Informatica Le condizioni di chiusura di $h(T)\omega$ sono $\frac{he^T}{V} + h'\frac{e^T}{V} = \frac{he^{2T}}{V}$ quindi $h + h' = he^T$, $\frac{h'}{h} = e^T - 1$ quindi $\ln|h| = e^T - T + c$. $|h| = e^{e^T - T + c}$. Se $h > 0$ allora $h\omega = e^{e^T - T + c} \frac{e^T}{V} dV + e^{e^T - T + c} e^{2T} \ln V dT$ che è esatta. $h\omega = \frac{e^{e^T + c}}{V} dV + e^{e^T + T + c} \ln V dT$. $U(T, V) = e^{e^T + c} \ln|V| + K(T)$. La curva su cui integrare sta nel primo quadrante quindi $V > 0$. $U_T = e^{e^T + c} \ln V e^T + K'(T) = e^{e^T + T + c} \ln V$ quindi $K' = 0$, $K = K_0$. Possiamo prendere $K_0 = 0$ da cui $e^{e^T + c} \ln V$ e l'integrale curvilineo è $U(2, 2) - U(1, 1)$ che dipende da c . Se $h < 0$ è l'opposto.