

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18-01-2025 A.A. 2024/2025, primo appello, compito A

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Si calcoli il volume dell'insieme $V \subset \mathbf{R}^3$ definito da $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, |x| + y \leq x + |y|\}$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\cos\left(t - \frac{x}{a}\right) + \sin\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) H\left(t - \frac{x}{a}\right), & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t \end{cases}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3} dx}{(x-1)(x-8)(x^2+1)}$ (disegnare solo il cammino)

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (12 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia dato il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x^2 \underline{i} - y^2 \underline{j} + z^2 \underline{k}$. Si calcoli il flusso attraverso la superficie che contorna l'insieme $W = \{-1 \leq x \leq 0, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, |x| + y \leq x + |y|\}$. Le normali vanno scelte in modo che puntino verso l'esterno (La superficie che contorna W è composta da cinque facce)

4) (12 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale $\frac{(x-y)dx + (x+y-2)dy}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$. Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 2) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ percorsa in senso antiorario
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.

Regole per la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18-01-2025 A.A. 2024/2025, primo appello, compito B

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Si calcoli il volume dell'insieme $V \subset \mathbf{R}^3$ definito da $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, |x| - y \leq x + |y|\}$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(-\cos\left(t - \frac{x}{a}\right) + \sin\left(t - \frac{x}{a}\right)\right) H\left(t - \frac{x}{a}\right), & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t \end{cases}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3} dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 64)}$ (disegnare solo il cammino)

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (13 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia dato il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x^2 \underline{i} - y^2 \underline{j} + z^2 \underline{k}$. Si calcoli il flusso attraverso la superficie che contorna l'insieme $W = \{-1 \leq x \leq 0, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, |x| + y \leq x + |y|\}$. Le normali vanno scelte in modo che puntino verso l'esterno (La superficie che contorna W è composta da cinque facce)

4) (12 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale $\frac{(x-y)dx + (x+y-2)dy}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$. Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 2) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ percorsa in senso antiorario
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.

Regole per la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18-01-2025 A.A. 2024/2025, primo appello, compito C

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Si calcoli il volume dell'insieme $V \subset \mathbf{R}^3$ definito da $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, -|x| + y \leq x + |y|\}$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\cos\left(t - \frac{x}{a}\right) - \sin\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) H\left(t - \frac{x}{a}\right), & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t \end{cases}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \int_0^{+\infty} \frac{x^{-2/3} dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 64)}$ (disegnare solo il cammino)

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (13 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia dato il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x^2 \underline{i} - y^2 \underline{j} + z^2 \underline{k}$. Si calcoli il flusso attraverso la superficie che contorna l'insieme $W = \{-1 \leq x \leq 0, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, |x| + y \leq x + |y|\}$. Le normali vanno scelte in modo che puntino verso l'esterno (La superficie che contorna W è composta da cinque facce)

4) (12 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale $\frac{(x-y)dx + (x+y-2)dy}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$. Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 2) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ percorsa in senso antiorario
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.

Regole per la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
18-01-2025 A.A. 2024/2025, primo appello, compito D

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Si calcoli il volume dell'insieme $V \subset \mathbf{R}^3$ definito da $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, |x| + y \leq x - |y|\}$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(-\cos\left(t - \frac{x}{a}\right) - \sin\left(t - \frac{x}{a}\right)\right) H\left(t - \frac{x}{a}\right), & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t \end{cases}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/3} dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 64)}$ (disegnare solo il cammino)

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4}$ il cui dominio è $\mathbf{R}$, analizzarne la convergenza puntuale e uniforme nel suo insieme di definizione

Se esiste trovare un intervallo (a, b) (a e b finiti o infiniti) in cui la convergenza è uniforme

4) (13 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia dato il campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x^2 \underline{i} - y^2 \underline{j} + z^2 \underline{k}$. Si calcoli il flusso attraverso la superficie che contorna l'insieme $W = \{-1 \leq x \leq 0, |y| \leq 1, 0 \leq z \leq |x| + |y|, |x| + y \leq x + |y|\}$. Le normali vanno scelte in modo che puntino verso l'esterno (La superficie che contorna W è composta da cinque facce)

4) (12 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale $\frac{(x-y)dx + (x+y-2)dy}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$. Si calcolino gli integrali curvilinei lungo le curve i cui sostegni sono:

- 1) $x^2 + y^2 = 1/4$ percorsa in senso antiorario
- 2) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ percorsa in senso antiorario
- 3) La parabola di equazione $y = x^2 - 1, -2 \leq x \leq 2$.

Regole per la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Soluzioni Compito A

Soluzione 1). Bisogna studiare quattro casi.

$x \geq 0, y \geq 0$. Si ha $x + y \leq x + y$ sempre vera.

$x < 0, y \geq 0$. Si ha $-x + y \leq x + y$ se e solo se $x \geq 0$ mai.

$x < 0, y < 0$. Si ha $-x + y \leq x - y$ se e solo se $y \leq x$.

$x \geq 0, y < 0$. Si ha $x + y \leq x - y$ se e solo se $y \leq 0$ sempre vera

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-1}^x dy(-x - y) + \int_0^1 dx \int_{-1}^0 dy(x - y) + \int_0^1 dx \int_0^1 dy(x + y) = \frac{5}{2}$$

Alcuni hanno avuto la maldestra idea di usare coordinate polari. Si poteva a patto di usarle bene e per avere un'idea precisa bisogna guardare la lezione n.4 pag.13-14

Primo quadrante. L'integrale è $\int_0^1 dx \int_0^1 dy(x + y) = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy(x + y)$ in quanto la funzione integranda $x + y$ è simmetrica rispetto allo scambio x che va in y e y che va in x .

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_{\cos t}^{\frac{1}{\cos t}} (r \cos t + r \sin t) r dr = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{\sin t}{\cos^3 t} \right) dt$$

Nel primo integrale sostituiamo $t = \arctan y$ ed otteniamo 1. Il secondo ci dà $1/2$ per cui otteniamo $2/3(1 + 1/2) = 1$. Gli altri si fanno analogamente.

Soluzione 2). Scriviamo l'equazione come

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(b \cos\left(t - \frac{x}{a}\right) + c \sin\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) H\left(t - \frac{x}{a}\right), & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = d \cdot t, & > 0 \end{cases}$$

In trasformata di Laplace $v(x, p) \doteq \mathcal{L}u$ si ha

$$p^2 v - a^2 v_{xx} = e^{-px/a} \left(\frac{bp}{p^2 + 1} + \frac{c}{p^2 + 1} \right)$$

Cerchiamo la soluzione particolare della non omogenea nella forma $\beta x e^{-px/a} \doteq \beta x E(x, p)$ da cui

$$p^2 \beta x E - a^2 \beta E \left(\frac{xp^2}{a^2} - \frac{2p}{a} \right) = E \left(\frac{bp}{p^2 + 1} + \frac{c}{p^2 + 1} \right) \iff 2pa\beta E = E \left(\frac{bp}{p^2 + 1} + \frac{c}{p^2 + 1} \right)$$

$\beta = \frac{1}{2a} \frac{b}{p^2 + 1} + \frac{1}{2a} \frac{c}{p(p^2 + 1)}$ e la soluzione della non omogenea è $\frac{1}{2a} \frac{xbE}{p^2 + 1} + \frac{1}{2a} \frac{xcE}{p(p^2 + 1)}$. La soluzione più generale è la somma della più generale soluzione della omogenea ossia αE e della soluzione particolare appena trovata quindi $\alpha E + \frac{1}{2a} \frac{xbE}{p^2 + 1} + \frac{1}{2a} \frac{xcE}{p(p^2 + 1)}$. Resta da trovare α e ciò avviene tramite la condizione al bordo $u(0, t) = dt$ che in trasformata di Laplace diventa $v(0, p) = \mathcal{L}(t) = d/p^2$ da cui

$$\alpha E + \frac{1}{2a} \frac{xpE}{p^2 + 1} + \frac{1}{2a} \frac{xcE}{p(p^2 + 1)} \Big|_{x=0} = \alpha = \frac{d}{p^2}$$

e finalmente possiamo scrivere

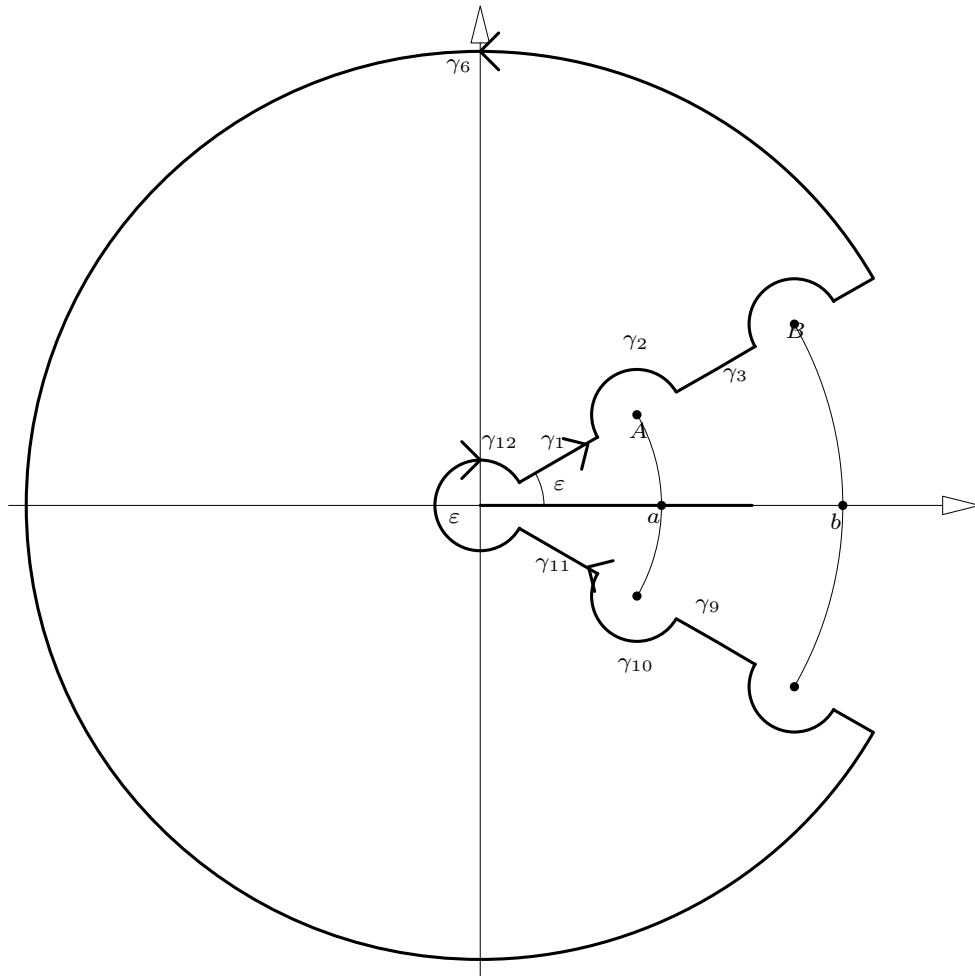
$$v(x, p) = \frac{dE}{p^2} + \frac{1}{2a} \frac{xbE}{p^2 + 1} + \frac{1}{2a} \frac{xcE}{p(p^2 + 1)} = \frac{dE}{p^2} + \frac{1}{2a} \frac{xbE}{p^2 + 1} + \frac{1}{2a} \frac{xcE}{p} - \frac{1}{2a} \frac{xcE}{p^2 + 1}$$

Detta $\hat{t} = t - x/a$ si ha

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{(-1)}(v) = \left(d\hat{t} + \frac{xb}{2a} \sin \hat{t} + \frac{xc}{2a} - \frac{xc}{2a} \cos \hat{t} \right) H(\hat{t})$$

La soluzione si ottiene ponendo $a = b = d = 1$.

Soluzione 3) (Informatica).



$$\begin{aligned} A &= ae^{i\varepsilon}, \quad B = be^{i\varepsilon}, \quad \gamma_1(t) = te^{i\varepsilon} \quad \varepsilon \leq t \leq a-r, \quad \gamma_2(t) = ae^{i\varepsilon} + re^{-it} \quad -\pi \leq t \leq 0, \\ \gamma_3(t) &= te^{i\varepsilon} \quad a+r \leq t \leq b-r, \quad \gamma_4(t) = be^{i\varepsilon} + re^{-it} \quad -\pi \leq t \leq 0, \\ \gamma_5(t) &= te^{i\varepsilon}, \quad b+r \leq t \leq R, \quad \gamma_6(t) = Re^{it} \quad \varepsilon \leq t \leq 2\pi - \varepsilon, \quad \gamma_7(t) = -te^{i(2\pi - \varepsilon)} \quad -R \leq t \leq -b-r \\ \gamma_8(t) &= (be^{i\varepsilon} + re^{-it})e^{i(2\pi - \varepsilon)} \quad -2\pi \leq t \leq -\pi, \quad \gamma_9(t) = -te^{i(2\pi - \varepsilon)} \quad -b-r \leq t \leq -a-r \\ \gamma_{10}(t) &= (ae^{i\varepsilon} + re^{-it})e^{i(2\pi - \varepsilon)} \quad -2\pi \leq t \leq -\pi, \quad \gamma_{11}(t) = -te^{i(2\pi - \varepsilon)} \quad -a+r \leq t \leq -\varepsilon \\ \gamma_{12}(t) &= \varepsilon e^{-it} \quad \varepsilon - 2\pi \leq t \leq -\varepsilon \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{z^{2/3}}{(z-1)(z-8)(z^2+1)}$$

$$\begin{aligned} & \pi \cot \frac{-2\pi}{3} \frac{1}{(1-8)(1+1)} + \pi \cot \frac{-2\pi}{3} \frac{8^{2/3}}{(8-1)(64+1)} + \\ & + \frac{2\pi i}{1-e^{i4\pi/3}} \left(\frac{e^{i\pi/3}}{(i-1)(i-8)2i} + \frac{e^{i\pi}}{(-i-1)(-i-8)(-2i)} \right) = \\ & = \frac{-\pi 19\sqrt{3}}{910} + \frac{\pi e^{-2i\pi/3}}{-2i\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{e^{i\pi/3}(-i-1)(-i-8)}{130} + \frac{(i-1)(i-8)}{130} \right) = \frac{-\pi 19\sqrt{3}}{910} + \frac{\pi}{130}(7-3\sqrt{3}) = \\ & = \frac{-4\sqrt{3}\pi}{91} + \frac{7\pi}{130} \end{aligned}$$

Soluzione 3) (Elettronica&Internet) Convergenza puntuale. Per $x = 0$ converge puntualmente essendo la serie pari a zero. Dalla maggiorazione $\frac{x^2 k}{x^4 + k^4} \leq \frac{x^2 k}{k^4}$ e dal fatto che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^3} < \infty \text{ si conclude che la serie converge puntualmente per ogni } x.$$

Non converge uniformemente in $\mathbf{R}$. Facciamo vedere che $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N : \sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4} \geq \varepsilon$.

Dato N prendiamo x tale che $N \leq x < N+1$ e $n = N+1$ da cui

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4} \geq \sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{N^2 k}{(N+1)^4 + k^4} > \\ & > \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{N^2 k}{2(2N)^4} = \frac{1}{32N^2} \sum_{k=N+1}^{2N} k = \frac{1}{32N^2} \left(\sum_{k=0}^{2N} k - \sum_{k=0}^N k \right) = \\ & = \frac{1}{32N^2} \frac{1}{2} (2N(2N+1) - N(N+1)) = \frac{3N+1}{64N} > \frac{3}{64} \end{aligned}$$

per cui si può prendere $\varepsilon = 3/64$.

Converge totalmete quindi uniformemente in ogni intervallo (a, b) purché a e b finiti. Basta prendere il più grande in modulo fra a e b (supponiamo $|b|$) e scrivere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{x^4 + k^4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 k}{k^4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^2}{k^3} < \infty$$

Soluzione 4) (Elettronica&Internet) Appliciamo il Teorema di Gauss. Il volume contornato dalla superficie è $\{-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq -x-y\}$ per cui il risultato è

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-1}^x dy \int_0^{-x-y} dz (2x - 2y + 2z) = \frac{11}{12}$$

Soluzione 4) (Informatica) Prima maniera La forma è chiusa. $\omega = \frac{(x-y)dx + (x+y-2)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

1) La circonferenza giace $x^2 + y^2 = 1/4$ in un sottoinsieme semplicemente connesso del piano e quindi l'integrale è zero.

2) La circonferenza $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ non giace in un sottoinsieme semplicemente connesso del piano e quindi l'integrale va calcolato. $x = 1 + C$, $y = 1 + S$ da cui

$$\oint \omega = \int_0^{2\pi} ((C-S)(-S) + (C+S)C) dt = 2\pi$$

3) La parabola giace in un semplicemente connesso e quindi scegliamo il cammino equivalente composto dalle tre curve $\underline{\gamma}_1(t) = (-2, -t)$, $-3 \leq t \leq -1$, $\underline{\gamma}_2(t) = (t, -1)$, $-2 \leq t \leq 2$, $\underline{\gamma}_3(t) = (2, t)$, $-1 \leq t \leq 3$

$$\begin{aligned} \oint_{\underline{\gamma}_1} \omega + \oint_{\underline{\gamma}_2} \omega + \oint_{\underline{\gamma}_3} \omega &= 2 \arctan \frac{2}{3} + \left(\frac{\ln 5}{2} + \arctan \frac{1}{2} - \frac{\ln(13)}{2} + \arctan \frac{3}{2} \right) + 2 \arctan 2 = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{13} + \left[\arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{3}{2} \right] + \left[\arctan \frac{1}{2} + \arctan 2 \right] + \arctan \frac{2}{3} + \arctan 2 = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{13} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi + \arctan \frac{2 + \frac{2}{3}}{1 - 2\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{13} + 2\pi - \arctan 8 \end{aligned}$$

si veda <https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente>.

Si può verificare che se si fosse scelto il cammino $x = t$, $y = 3$, $-2 \leq t \leq 2$ si sarebbe ottenuto $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{13} - \arctan 8$, un risultato quindi sbagliato. **Perché?**

Seconda maniera. Scriviamo la forma come

$$\begin{aligned} \frac{((x-1) - (y-1))dx + ((x-1) + (y-1))dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} &= \frac{(x-1)dx + (y-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \frac{-(y-1)dx + (x-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \\ &= \omega_1 + \omega_2 = d\left(\frac{1}{2} \ln((x-1)^2 + (y-1)^2)\right) + \frac{-(y-1)dx + (x-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

ω_1 è esatta e ω_2 è chiusa.

$\underline{\gamma}_1$ sta in un insieme semplicemente connesso per cui $\oint \omega_{\underline{\gamma}_1} = 0$.

$\underline{\gamma}_2$. $\oint \omega_1 = 0$ essendo ω_1 esatta. Per il calcolo di $\oint \omega_2 = 0$ si parametrizzi $\underline{\gamma}(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t)$.

$\underline{\gamma}_3$. $\oint \omega_1 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 13)$. $\underline{\gamma}_3$ sta in un semplicemente connesso per cui possiamo trovare un potenziale anche per ω_2 .

$$U(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y-1}{x-1}, & x > 1 \\ \arctan \frac{y-1}{x-1} - \pi, & x < 1 \\ -\pi/2, & y < 1, x = 1 \end{cases}$$

$$\oint_{\underline{\gamma}_3} \omega_2 = U(2, 3) - U(-2, 3) = \arctan 2 - \arctan \frac{2}{-3} + \pi = 2\pi - \arctan 8$$

Soluzioni Compito B

Soluzione 1).

$x \geq 0, y \geq 0$. Si ha $x - y \leq x + y$ sempre vera.
 $x < 0, y \geq 0$. Si ha $-x - y \leq x + y$ se e solo se $y \geq -x$
 $x < 0, y < 0$. Si ha $-x - y \leq x - y$ mai
 $x \geq 0, y < 0$. Si ha $x - y \leq x - y$ sempre

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 dy(-x + y) + \int_0^1 dx \int_{-1}^0 dy(x - y) + \int_0^1 dx \int_0^1 dy(x + y) = \frac{5}{2}$$

L'uso delle coordinate polari era possibile ancorché inopportuno ma a patto di usarle bene. Chi ne ha sbagliato l'uso può guardare l'esercizio A per avere un'idea uguale in tutti gli esercizi

Soluzione 2). Vedere la soluzione del compito A sostituendo $b = -1, c = 1, d = 1$.

Soluzione 3) Informatica

$f(z) = \frac{z^{1/3}}{(z-1)(z-8)(z+1)(z+8)}$. Per i cammini su cui integrare si veda il compito A

$$\begin{aligned} & \pi \cot \frac{-\pi}{3} \frac{1}{-18 \cdot 7} + \pi \cot \frac{-\pi}{3} \frac{8^{1/3}}{63 \cdot 16} + \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi/3}} \left(\frac{e^{i\pi/3}}{18 \cdot 7} + \frac{8^{1/3} e^{i\pi/3}}{-63 \cdot 16} \right) = \\ & = \frac{\pi}{168\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{-2\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{18 \cdot 7} - \frac{2}{63 \cdot 16} \right) = \frac{-\pi\sqrt{3}}{504} \end{aligned}$$

Soluzione 3) Elettronica&Internet Uguale al compito A.

Soluzione 4) Elettronica&Internet Uguale al compito A.

Soluzione 4) Informatica Uguale al compito A.

Soluzioni Compito C

Soluzione 1).

$y - |x| \leq x + |y|$ se e solo se $y \leq x + |x| + |y|$ che è vera sempre grazie al fatto che $|x| \geq x$ sempre.

$$4 \int_0^1 dx \int_0^1 dy(x + y) = 4$$

L'uso delle coordinate polari era possibile ancorché inopportuno ma a patto di usarle bene. Chi ne ha sbagliato l'uso può guardare l'esercizio A per avere un'idea uguale in tutti gli esercizi

Soluzione 2). Vedere la soluzione del compito A sostituendo $b = 1, c = -1, d = 1$.

Soluzione 3) Informatica.

$f(z) = \frac{z^{-2/3}}{(z-1)(z-8)(z+1)(z+8)}$. Per i cammini su cui integrare si veda il compito A

$$\begin{aligned} & \pi \cot \frac{2\pi}{3} \frac{1}{(1+1)(1-64)} + \pi \cot \frac{2\pi}{3} \frac{8^{-2/3}}{(64-1)(8+8)} + \frac{2\pi i}{1 - e^{-i4\pi/3}} \left(\frac{e^{-i2\pi/3}}{(-2)(-63)} + \frac{8^{-2/3} e^{-i2\pi/3}}{(63)(-16)} \right) = \\ & = \frac{31\pi\sqrt{3}}{4032} + \frac{2\pi i e^{2i\pi/3}}{2i\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{e^{-i2\pi/3}}{126} + \frac{e^{-i2\pi/3}}{4 \cdot 63(-16)} \right) = \frac{31\pi}{\sqrt{3}4032} + \frac{31\pi}{2016\sqrt{3}} = \frac{\pi 31\sqrt{3}}{4032} \end{aligned}$$

Soluzione 3) Elettronica&Internet Uguale al compito A.

Soluzione 4) Elettronica&Internet Uguale al compito A.

Soluzione 4) Informatica Uguale al compito A.

Soluzioni Compito D

Soluzione 1).

$x \geq 0, y \geq 0$. Si ha $x + y \leq x - y$ mai tranne $y = 0$

$x < 0, y \geq 0$. Si ha $-x + y \leq x - y$ se e solo se $y \leq x$ mai.

$x < 0, y < 0$. Si ha $-x + y \leq x + y$ mai

$x \geq 0, y < 0$. Si ha $x + y \leq x + y$ sempre

$$\int_0^1 dx \int_{-1}^0 dy (x - y) = 1$$

L'uso delle coordinate polari era possibile ancorché inopportuno ma a patto di usarle bene. Chi ne ha sbagliato l'uso può guardare l'esercizio A per avere un'idea uguale in tutti gli esercizi

Soluzione 2). Vedere la soluzione del compito A sostituendo $b = -1, c = -1, d = 1$.

Soluzione 3) Informatica

$f(z) = \frac{z^{-1/3}}{(z-1)(z-8)(z+1)(z+8)}$. Per i cammini su cui integrare si veda il compito **A**

$$\begin{aligned} & \pi \cot \frac{\pi}{3} \frac{1}{-16 \cdot 9} + \pi \cot \frac{\pi}{3} \frac{8^{-1/3}}{63 \cdot 16} + \frac{2\pi i}{1 - e^{-i2\pi/3}} \left(\frac{e^{-i\pi/3}}{18 \cdot 7} + \frac{e^{-i\pi/3}}{18 \cdot 7 \cdot 16} \right) = \\ & = \frac{-5\pi}{673\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{18 \cdot 7} - \frac{1}{18 \cdot 7 \cdot 16} \right) = \frac{5\sqrt{3}\pi}{2016} \end{aligned}$$

Soluzione 3) Elettronica&Internet Uguale al compito A.

Soluzione 4) Elettronica&Internet Uguale al compito A.

Soluzione 4) Informatica Uguale al compito A.