

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
01-09-2025 A.A. 2024/2025, quinto appello

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (12 punti) 1) Sia dato l'insieme definito da $V = \{4x^2z - 4x^3 - 4xz + 4x^2 - z^2 + zx - 4x + 4z \leq 0, y^2 \leq z^4 \leq 256\}$. Si calcoli l'integrale esteso a V della funzione $f(x, y, z) = e^x/z^2$

2) (12 punti) Se $g(u) \doteq \int_0^u (\sin^2(y) + \cos(y))(u-y)dy$ e $G(t) = \int_0^t g(u)du$, si risolva la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = G(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

[Notare che la condizione al bordo riguarda la derivata della funzione, non la funzione non derivata]

3) (11 punti) Solo per Informatica

Calcolare $\oint_D \frac{\cotg(\pi z) dz}{z \cotgh(\pi z)}$ dove D è il quadrato piano complesso centrato nell'origine e lato $5/2$.

3) (11 punti) Solo per Elettronica&Internet

Si calcoli $\int_{\varphi} \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e φ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno è dato dall'insieme $\{z = x^2 + y^2, z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2\}$

4) (11 punti) Solo per Elettronica&Internet

Sia data la funzione $F(x, y, z) = x + xy + yz + zx + x^6 + y^6 + z^6$. Dimostrare che nell'intorno di $(0, 0, 0)$ l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $x = f(y, z)$. Dimostrare inoltre che $(y, z) = (0, 0)$ è un punto critico della funzione $f(y, z)$ e stabilirne la natura.

4) (11 punti) Solo per Informatica

Sia data la forma differenziale $\omega = f(x, y)dx + (\cos(xy) + \frac{1}{x-y})dy$. Trovare una $f(x, y)$ tale che la forma ω sia esatta nell'insieme di definizione. Poi calcolare l'integrale curvilineo sulla curva il cui sostegno è la funzione $x^4 + 15y^4 = 1$ nella parte che va dal punto $(-1/2, 1/2)$ verso il punto $(-1, 0)$.

Soluzioni

1)

$$4x^2z - 4x^3 - 4xz + 4x^2 - z^2 + zx - 4x + 4z = 4x^2(z - x) - 4x(z - x) - z(z - x) + 4(z - x) \leq 0$$

$$(z - x)(4x^2 - 4x + 4 - z) \leq 0$$

Primo caso. $z \leq x$ e $x \leq \frac{1 - \sqrt{z - 3}}{2} = x_-(z)$ oppure $x \geq \frac{1 + \sqrt{z - 3}}{2} \doteq x_+(z)$. Ne segue $z \geq 3$ e $z \leq 4$ da $z^4 \leq 256$. Si vede facilmente che per $3 \leq z \leq 4$ si ha $x_+(z) < z$ quindi il contributo è

$$\int_3^4 \frac{dz}{z^2} \int_z^{+\infty} e^x dx \int_{-z^2}^{z^2} dy = +\infty$$

$$2) \quad \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(\sin^2 t + \cos t) \mathcal{L}(t) = \left(\frac{1}{2p} - \frac{p}{2(4 + p^2)} + \frac{p}{1 + p^2} \right) \frac{1}{p^2}. \quad \mathcal{L}(G) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(g)$$

L'equazione diventa

$$p^2 v(x, p) - a^2 v_{xx}(x, p) = e^{-px/a} \mathcal{L}(G)$$

Provando la non omogenea con $x \xi e^{-px/a}$ si ha $\xi = \mathcal{L}(G)/(2ap)$ e la soluzione è ($E = E(x, p) = e^{-px/a}$) $v(x, p) = \alpha E + \frac{x E \mathcal{L}(G)}{2ap}$. La condizione al bordo dà $\frac{-p\alpha}{a} + \frac{\mathcal{L}(G)}{2ap} = 0$ da cui $\alpha = \frac{\mathcal{L}(G)}{2p^2}$ e quindi la soluzione finale è

$$\begin{aligned} v(x, p) &= \frac{\mathcal{L}(G)E}{2p^2} + \frac{x E \mathcal{L}(G)}{2ap} = \\ &= \frac{E}{2} \left(\frac{1}{2p^6} - \frac{1}{2p^4(4 + p^2)} + \frac{1}{p^4(1 + p^2)} \right) + \frac{x E}{2a} \left(\frac{1}{2p^5} - \frac{1}{2p^3(4 + p^2)} + \frac{1}{p^3(1 + p^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^4(p^2 + 4)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} \frac{\sin(2t_4)}{2} dt_4 = \frac{\sin(2t)}{32} + \frac{t^3}{24} - \frac{t}{16}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^4(p^2 + 1)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} \sin(t_4) dt_4 = \sin t + \frac{t^3}{6} - t$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^3(p^2 + 4)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} \frac{\sin(2t_3)}{2} dt_3 = \frac{\cos(2t)}{16} + \frac{t^2}{8} - \frac{1}{16}$$

$$\mathcal{L}^{(-1)}\left(\frac{1}{p^3(p^2 + 1)}\right) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} \sin(t_3) dt_3 = \cos t + \frac{t^2}{2} - 1$$

per cui abbiamo ($\hat{t} = t - x/a$)

$$u(x, t) = H(\hat{t}) \left[\frac{\hat{t}^5}{480} - \frac{\sin(2\hat{t})}{128} + \frac{\sin \hat{t}}{2} + \frac{\hat{t}^3}{48} - \frac{33\hat{t}}{64} \right] + \frac{x H(\hat{t})}{a} \left[\frac{\hat{t}^4}{96} - \frac{\cos(2\hat{t})}{64} + \frac{\cos \hat{t}}{2} + \frac{7\hat{t}^2}{132} - \frac{31}{64} \right]$$

3) Informatica Residui in $z = 0$, $z = \pm 1$, $z = \pm i/2$.

$z = 0$. Polo di ordine 2. Dobbiamo calcolare

$$\frac{\cot g(\pi z)}{z^2 \cotan(\pi z)} = \frac{1}{z} - \frac{2\pi^2 z}{3} + O(z^3)$$

$z = i/2$ Polo di ordine 1. $\lim_{z \rightarrow i/2} (z - i/2) f(z) = \frac{-2}{\pi} \coth(\pi/2)$

$$z = -i/2 \text{ Polo di ordine 1. } \lim_{z \rightarrow -i/2} (z + i/2)f(z) = \frac{-2}{\pi} \coth(\pi/2)$$

$$z = 1 \text{ Polo di ordine 1. } \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \frac{\tanh \pi}{\pi}$$

$$z = -1 \text{ Polo di ordine -1. } \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1)f(z) = \frac{\tanh \pi}{\pi}$$

$$\text{Risultato } 2\pi i \left(1 - \frac{\coth(\pi/2)}{\pi} + \frac{2 \tanh \pi}{\pi} \right)$$

3) Elettronica&Internet Applichiamo il Teorema di Stokes. Il rotore del campo vettoriale $(yz - \frac{y^3}{3}, xz + \frac{x^3}{3}, xy)$ è $\underline{V} \doteq (0, 0, x^2 + y^2)$. Intersechiamo il paraboloide e il piano e otteniamo $x^2 + y^2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}y = 2$ da cui $x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}rC$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}rS$. Dobbiamo calcolare

$$\iint_{x^2+y^2-\sqrt{2}-\sqrt{2}y \leq 2} (x^2 + y^2) = \frac{15\pi}{2}$$

4) Elettronica&Internet Detta $F(x, y, z)$ la funzione data, $F_x(0, 0, 0) = 1 \neq 0$. È una sella

4) Informatica Bisogna che $f_y = -y \sin(xy) - \frac{1}{(x-y)^2}$ da cui $f(x, y) = \frac{-\sin(xy)}{x^2} + \frac{y \cos(xy)}{x} + \frac{1}{y-x} + c$. Possiamo prendere $c = 0$. La forma $\omega = \left(\frac{-\sin(xy)}{x^2} + \frac{y \cos(xy)}{x} + \frac{1}{y-x} \right) dx + \left(\cos(xy) + \frac{1}{x-y} \right) dy$ è esatta nel secondo quadrante privato dell'origine e dell'asse delle ordinate che è dove si trova la curva (insieme semplicemente connesso). Calcoliamo il potenziale $U(x, y)$

$$U_y = \cos(xy) + \frac{1}{x-y} \implies U = \frac{\sin(xy)}{x} - \ln|x-y| + g(y)$$

$$U_x = \frac{y \cos(xy)}{x} - \frac{\sin(xy)}{x^2} + \frac{1}{y-x} + g' = \frac{y \cos(xy)}{x} - \frac{\sin(xy)}{x^2} + \frac{1}{y-x} \implies g = g_0 = 0$$

$$U = \frac{\sin(xy)}{x} - \ln(y-x)$$

Poi dobbiamo calcolare

$$U(-1, 0) - U\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -2 \sin \frac{1}{4}$$