Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
29–02–2024 A.A. 2023/2024, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome **compito (A)**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Calcolare l'area dell'insieme in $\mathbf{R}^2$ definito da $\{(x^2+y^2)^{3/2} \leq x, \qquad (x^2+y^2)^{3/2} \leq |y|\sqrt{3}\}$ (usare coordinate polari centrate nell'origine)

Soluzione $(x^2+y^2)^{3/2} \leq x$ diventa $r^2 \leq \cos t$ da cui $\cos t \geq 0$ e quindi $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Il dominio è simmetrico rispetto allo scambio $y \to -y$ per cui calcoliamo solo per $y \geq 0$. $x \leq y\sqrt{3}$ se e solo se $\pi/6 \leq t \leq \pi/2$ per cui l'area è

$$2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{\sqrt{\cos t}} rdr + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt \int_0^{3^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sin t}} rdr = 1 - \frac{1}{2} + \sqrt{3}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x + t, \quad x,t > 0 \quad a > 0 \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = \cos t \end{cases}$$

Soluzione $p^2 v - a^2 v_{xx} = \dfrac{x}{p} + \dfrac{1}{p^2} + px$, $v_x(0,p) = p/(p^2+1)$ da cui $v(x,p) = \dfrac{1}{p^4} + \dfrac{x}{p} + \dfrac{x}{p^3} + a\left(\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p^4} - \dfrac{1}{p^2+1}\right)e^{-px/a}$. La soluzione è dunque $u(x,t) = \dfrac{t^3}{6} + x + \dfrac{xt^2}{2} + a\left(\hat{t} + \dfrac{(\hat{t})^3}{6} - \sin\hat{t}\right)H(\hat{t})$, $\hat{t} = t - x/a$.

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin(\pi x))^2 \cos(\pi x)\,dx}{x(4x-3)(x^2+1)}$

Si indichi il percorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione. Non è necessario mostrare che l'integrale su determinati cammini tende a zero (Esprimere $(\sin(\pi x))^2$ in termini di $2\pi x$ come fatto più volte a lezione ed usare la formula opportuna fra le seguenti possibili due: 1) $\cos\alpha\cos\beta = (\cos(\xi+\eta) \pm \cos(\xi-\eta))/2$ oppure $\sin\alpha\sin\beta = (\cos(\xi+\eta) \pm \cos(\xi-\eta))/2$ con ξ,η da individuare)

Soluzione $(\sin(\pi x))^2\cos(\pi x) = \dfrac{1}{2}\cos(\pi x)(1-\cos(2\pi x)) = \dfrac{\cos(\pi x)}{2} - \dfrac{\cos(3\pi x)+\cos(\pi x)}{4} = \dfrac{\cos(\pi x) - \cos(3\pi x)}{4}$ per cui l'integrale è $\mathrm{Re}\left[V.P.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x} - e^{i3\pi x}\,dx}{4x(4x-3)(x^2+1)}\right] = \dfrac{-2\pi}{50}(e^{-\pi} -$

$e^{-3\pi}$). Il cammino è quello di pag.14 del Giornale delle lezioni ma con una ulteriore indentazione a $z = 3/4$.

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia dato il cilindro di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e il paraboloide $z = x^2 + 2y^2$. Le due figure si incontrano lungo la curva chiusa $\underline{\gamma}$ (che si avvolge sul cilindro). Sia data la forma differenziale $\omega = \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy + \frac{x^2}{4x^2+9y^2}dz$. Si calcoli $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ $\big($fondamentale è parametrizzare $\underline{\gamma}\big)$

Soluzione La curva ha equazioni $x = \gamma_1(t) = 3C$, $y = \gamma_2(t) = 2S$, $z = \gamma_3(t) = 9C^2 + 8S^2$. Spezziamo la $\frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$ coinvolge solo le coordinate (x, y), è definita in $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ed è chiusa. Per il Lemma di Gauss–Green l'integrale è lo stesso che otterrei se lo effettuassi lungo la curva $(x, y) = (C/2, S)$ e il risultato è

$$\int_0^{2\pi} \frac{-S(-S/2) + (C/2)C}{1} dt = \pi$$

Rimane $\int_{\underline{\gamma}} \frac{x^2}{4x^2+9y^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{9C^2}{36}(-18CS + 16SC)dt = 0$

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
29–02–2024 A.A. 2023/2024, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome **compito (B)**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1)* (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Calcolare l'area dell'insieme in $\mathbf{R}^2$ definito da $\{(x^2+y^2)^{3/2} \le x, \qquad (x^2+y^2)^{3/2} \le |y|/\sqrt{3}\}$ (usare coordinate polari centrate nell'origine)

Soluzione $(x^2+y^2)^{3/2} \le x$ diventa $r^2 \le \cos t$ da cui $\cos t \ge 0$ e quindi $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

Il dominio è simmetrico rispetto allo scambio $y \to -y$ per cui calcoliamo solo per $y \ge 0$. $x \le y/\sqrt{3}$ se e solo se $\pi/3 \le t \le \pi/2$ per cui l'area è

$$2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{\sqrt{\cos t}} r dr + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt \int_0^{3^{\frac14}\sqrt{\sin t}} r dr = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}(1-\frac{1}{2}) = 1$$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x - t, \quad x,t>0 \quad a>0 \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = \sin t \end{cases}$$

$p^2 v - a v_{xx} = \dfrac{x}{p} - \dfrac{1}{p^2} + px$, $v_x(0,p) = 1/(p^2+1)$, da cui

$v(x,p) = \dfrac{x}{p} + \dfrac{x}{p^3} - \dfrac{1}{p^4} + a\left(\dfrac{1}{p^4} + \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{p^2+1}\right) e^{-px/a}$ e quindi $u(x,t) = x + \dfrac{xt^2}{2} - \dfrac{t^3}{6} + a\left(\dfrac{(\hat t)^3}{6} + \hat t - 1 + \cos \hat t, \right) H(\hat t)$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos(\pi x))^2 \cos(\pi x)\, dx}{x(4x-3)(x^2+1)}$

Si indichi il percorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione. Non è necessario mostrare che l'integrale su determinati cammini tende a zero (Esprimere $(\cos(\pi x))^2$ in termini di $2\pi x$ come fatto più volte a lezione ed usare la formula $\sin\alpha\cos\beta = (\sin(\xi+\eta) \pm \sin(\xi-\eta))/2$ con ξ, η da individuare)

Soluzione $(\cos(\pi x))^2 \cos(\pi x) = \dfrac{1}{2}\cos(\pi x)(1+\cos(2\pi x)) = \dfrac{\cos(\pi x)}{2} + \dfrac{\cos(3\pi x) + \cos(\pi x)}{4} = \dfrac{3\cos(\pi x) + \cos(3\pi x)}{4}$ per cui l'integrale è $\mathrm{Re}\left[V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{i\pi x} + e^{i3\pi x}\, dx}{4x(4x-3)(x^2+1)}\right] = \dfrac{-\pi 8\sqrt{2}}{75} - \dfrac{4\pi}{25}(\dfrac{3e^{-\pi}}{4} +$

$\frac{e^{-3\pi}}{4}$). Il cammino è quello di pag.14 del Giornale delle lezioni ma con una ulteriore indentazione a $z = 3/4$.

Si poteva scrivere pure $\cos^3(\pi x) = \frac{1}{8}(e^{i3\pi x} + e^{-i3\pi x} + 3e^{i\pi x} + 3e^{-i\pi x})$ e calcolare quattro integrali facendo però attenzione che il primo e il terzo "vanno chiusi sopra" mentre il secondo e il quarto sotto.

Non si può scrivere $\cos^3(\pi x) = \mathrm{Re}(e^{i3\pi x})$ oppure $\cos(2\pi x)\cos(\pi x) = \mathrm{Re}(e^{i2\pi x}e^{i\pi x})$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia dato il cilindro di equazione $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1$, e il paraboloide $z = \frac{x^2}{2} + 2y^2$. Le due figure si incontrano lungo la curva chiusa $\underline{\gamma}$ (che si avvolge sul cilindro). Sia data la forma differenziale $\omega = \frac{-y}{9x^2+y^2}dx + \frac{x}{9x^2+y^2}dy + \frac{x^2}{x^2+16y^2}dz$. Si calcoli $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ (fondamentale è parametrizzare $\underline{\gamma}$)

Soluzione La curva ha equazioni $x = \gamma_1(t) = 2C$, $y = \gamma_2(t) = S/2$, $z = \gamma_3(t) = 2C^2 + S^2/2$. La forma $\frac{-y}{9x^2+y^2}dx + \frac{x}{9x^2+y^2}dy$ coinvolge solo le coordinate (x, y), è definita in $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ed è chiusa. Per il Lemma di Gauss–Green l'integrale è lo stesso che otterrei se lo effettuassi lungo la curva $(x, y) = (C/3, S)$ e il risultato è

$$\int_0^{2\pi} \frac{-S(-S/3) + (S/3)S}{1} dt = 2\pi/3$$

Rimane $\int_{\underline{\gamma}} \frac{x^2}{x^2+16y^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{4C^2}{4}(-4CS + SC)dt = 0$