Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
29–04–2024 A.A. 2023/2024, terzo appello (straordinario)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome **compito (A)**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1)* (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) **1)** Calcolare il volume in $\mathbf{R}^3$ definito da $x^2+y^2+12 \le z \le 8\sqrt{x^2+y^2}$ **2)** Si calcoli la superficie totate che racchiude il volume.

Soluzione Sia $\sqrt{x^2+y^2}=r$. $x^2+y^2+12=8\sqrt{x^2+y^2}$ equivale a $8r=12+r^2$ da cui $r=2,6$ e quindi l'insieme in questione è descritto da $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6, x^2+y^2+12\le z\le 8\sqrt{x^2+y^2}\}$.

Volume Integrazione per fili.

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_{2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} dx\,dy \int_{x^2+y^2+12\le z\le 8\sqrt{x^2+y^2}} dz =$$
$$= \iint_{2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} (8\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2-12)dx\,dy$$

Passiamo a coordinate polari nel piano $\displaystyle\int_2^6 rdr\int_0^{2\pi} dt(8r-r^2-12)=\frac{256\pi}{3}$

Integrazione per strati. Descriviamo il volume come segue $V_1=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 16\le z\le 48,\ z^2/64\le x^2+y^2\le z-12\}$ quindi il volume è

$$\int_{16}^{48} dz \iint_{z^2/64\le x^2+y^2\le z-12} dx\,dy = \int_{16}^{48} dz\pi\left(z-12-\frac{z^2}{64}\right)=\frac{256\pi}{3}$$

Volume di rotazione. Non è necessario ma per dare una spiegazione conforme a quanto descritto a lezione scriviamo le equazioni come $12+y^2+z^2\le x\le 8\sqrt{y^2+z^2}$. Le figure (cono e paraboloide) sono di rotazione (dipendono da y^2+z^2) e quindi possiamo descrivere il volume come un volume di rotazione intorno all'asse z. Se scriviamo $S=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2\colon 16\le z\le 48, z/8\le y\le\sqrt{z-12}\}$, il volume che cerchiamo è

$$\iint_S 2\pi y\,dy\,dz = \int_{16}^{48} dz\int_{z/8}^{\sqrt{z-12}} 2\pi y dy = \int_{16}^{48} dz\left(z-12-\frac{z^2}{64}\right)=\frac{256\pi}{3}$$

Parametrizzazione con coordinate sferiche $x=r\sin t\cos\varphi$, $y=r\sin t\sin\varphi$, $z=r\cos t$. $x^2+y^2=r^2\sin^2\vartheta$ per cui il volume è descritto da

$$0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le t\le\pi/2,\quad 12+r^2\sin^2 t\le r\cos t\le 8r|\sin t|$$

Superficie conica Parametrizziamo come una superficie cartesiana. La parte del cono con $x \geq 0, y \geq 0$ (S) è

$$S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 6, \quad z = 8\sqrt{x^2+y^2}\}$$

$S_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 2, \quad z = 8\sqrt{x^2+y^2}\}$, $\quad S_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 6, \quad z = 8\sqrt{x^2+y^2}\}$

$$\iint_S d\sigma = \iint_{S_2} d\sigma - \iint_{S_1} d\sigma = \iint_{x^2+y^2\leq 36} \sqrt{65}dx\,dy - \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{65}dx\,dy = \pi\sqrt{65}(36-4) = \pi 32\sqrt{65}$$

Superficie conica; Parametrizziamo come una figura di rotazione. In $z = 8\sqrt{x^2+y^2}$ poniamo $x = 0$ e otteniamo $z = 8y$ che è l'equazione della proiezione sul piano (y,z) dell'equazione del cono. Sia $(y(t), z(t)) \doteq \underline{\gamma}(t) = (t, 8t)$, $2 \leq t \leq 6$. La superficie che cerchiamo è l'unione delle circonferenze di centro sull'asse z e raggio y e il suo valore è $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} 2\pi t ds = \int_2^6 dt 2\pi t\sqrt{65} = \pi 32\sqrt{65}$

Superficie parabolica Parametrizziamo come una superficie cartesiana. Procedendo come per il cono

$$S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 6, \quad z = x^2+y^2-12\}$$

$S_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 2, \quad z = x^2+y^2-12\}$, $\quad S_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 6, \quad z = x^2+y^2-12\}$

$$\iint_S d\sigma = \iint_{S_2} d\sigma - \iint_{S_1} d\sigma =$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leq 36} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dx\,dy - \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dx\,dy =$$
$$= \int_0^{2\pi} dt \int_0^6 dr r\sqrt{1+4r^2} - \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 dr r\sqrt{1+4r^2} = \frac{\pi}{6}((145)^{3/2} - (17)^{3/2})$$

Come paraboloide di rotazione. Poniamo $x = 0$ in $z = 12 + x^2 + y^2$ da cui $z = 12 + y^2$ e quindi $(y(t), z(t)) = \underline{\gamma}(t) = (t, 12 + t^2)$ e la superficie è

$$\int_{\underline{\gamma}} 2\pi t ds = \int_2^6 dt 2\pi t\sqrt{1+4t^2} = \frac{\pi}{6}((145)^{3/2} - (17)^{3/2})$$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x + x^2 + t, & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & u(0,t) = \sin t \end{cases}$$

In trasformata di Laplace la soluzione è $v(x,p) = e^{-px/a}\left(\dfrac{1}{1+p^2} - \dfrac{1}{p^4} - \dfrac{2a^2}{p^5}\right) + \dfrac{1}{p^4} + \dfrac{2a^2}{p^5} + \dfrac{x}{p^3} + \dfrac{x^2}{p^3}$ da cui

$$u(x,t) = H(t - \frac{x}{a})\left(\sin(t - \frac{x}{a}) - \frac{1}{6}(t - \frac{x}{a})^3 - \frac{a^2}{12}(t - \frac{x}{a})^4\right) + \frac{t^3}{6} + \frac{a^2t^4}{12} + \frac{xt^2}{2} + \frac{x^2t^2}{2}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{xy(x+2y)}{(x+y)^2}dx - \dfrac{2x^2y + xy^2}{(x+y)^2}dy$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ con $\underline{\gamma} = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi/3$

$$\left(\frac{xy(x+2y)}{(x+y)^2}\right)_y + \left(\frac{2x^2y+xy^2}{(x+y)^2}\right)_x = 1 \implies \left(\frac{xy(x+2y)}{(x+y)^2} - y\right)_y + \left(\frac{2x^2y+xy^2}{(x+y)^2}\right)_x = 0$$

da cui la forma $\omega_1 = \left(\frac{xy(x+2y)}{(x+y)^2} - y\right)dx - \frac{2x^2y+xy^2}{(x+y)^2}dy$ è esatta nell'insieme semplicemente connesso $y > -x$ e la curva su cui integrare si trova in tale insieme.

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega_1 = \int_{\underline{\gamma}} \omega - \int_{\underline{\gamma}} ydx \implies \int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}} \omega_1 + \int_{\underline{\gamma}} ydx$$

Per calcolare $\int_{\underline{\gamma}} \omega_1$ usiamo il cammino $\underline{\gamma}_1(t) = (-t, 0)$, $-1 \le t \le \varepsilon$, $\varepsilon < 0$, $\underline{\gamma}_2(t) = (0, t)$, $\varepsilon \le t \le \sqrt{3}/2$ e $\underline{\gamma}_3(t) = (-t, \sqrt{3}/2)$, $0 \le t \le 1/2$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_{\underline{\gamma}_1} \tilde{\omega}_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int 0 \cdot dt = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_{\underline{\gamma}_2} \tilde{\omega}_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int 0 \cdot dt = 0$$

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega_1 = \int_{\underline{\gamma}_3} \omega_1 = \int_{\underline{\gamma}_3} \left(\frac{xy(x+2y)}{(x+y)^2} - y\right) dx =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-t\frac{\sqrt{3}}{2}(-t+\sqrt{3})}{(-t+\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-dt) = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right) dt + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{8}$$

$$\int_{\underline{\gamma}} ydx = \int_0^{2\pi/3} \sin t(-\sin t)dt = \frac{-\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

per cui il risultato è $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{8} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{-\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8}$

Alternativamente si sarebbe potuto scegliere il cammino $\underline{\gamma}_1(t) = (1, t)$, $0 \le t \le \sqrt{3}/2$, e poi $\gamma_2(t) = (-t, \sqrt{3}/2)$, $-1 \le t \le 1/2$.

Seconda soluzione Calcoliamo il potenziale di $\tilde{\omega}$.

$$\frac{xy(x+2y)}{(x+y)^2} - y = y - \frac{y^3}{(x+y)^2} \implies U(x,y) = \frac{y^3}{(x+y)} + y^2 + h(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{(x+y)} + y^2 + h(y)\right) = -\frac{2x^2y+xy^2}{(x+y)^2} + h' = -\frac{2x^2y+xy^2}{(x+y)^2}$$

da cui $h = h_0$. Quindi il potenziale di $\tilde{\omega}$ è $U(x,y) = \frac{y^3}{(x+y)} - y^2$ e $U(-1/2, \sqrt{3}/2) - U(1,0) = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{8}$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet** La superficie laterale, detta S, che contorna il volume descritto nel primo esercizio è composta da due elementi, uno appartenente al cono $z = 8\sqrt{x^2+y^2}$ e uno appartenente al paraboloide $z = 12 + x^2 + y^2$. Si calcoli $\iint_S (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma$ dove $\underline{V}(\underline{x}) = x\underline{i} - y\underline{j} + zx^2\underline{k}$ e la normale esterna è tale che sul cono deve avere la terza componente positiva e sul paraboloide negativa

Teorema di Gauss. La divergenza è x^2 da cui

$$\iiint_V x^2 dx\,dy\,dz = \iint_{2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} x^2 dx\,dy \int_{x^2+y^2+12\le z\le 8\sqrt{x^2+y^2}} dz =$$
$$= \iint_{2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 6} x^2(8\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - 12)dx\,dy$$

Passiamo a coordinate polari nel piano $\displaystyle\int_2^6 rdr \int_0^{2\pi} dtr^2\cos^2 t(8r - r^2 - 12) = \frac{11776\pi}{15}$