Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
22–01–2024 A.A. 2023/2024, primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome **compito (A)**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1)* (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Calcolare

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\Big|y^2-x|x|\Big|dx\,dy$$

L'integrale è somma di diversi contributi che vanno scritti con chiarezza.

1–A Soluzione Detta $f(x,y)$ la funzione integranda, si verifica $f(x,y)=f(x,-y)$ e inoltre, se il punto di ccordinate (x,y) sta nel dominio di integrazione $x^2+y^2\leq 1$, ci sta anche il punto $(x,-y)$. Possiamo scrivere quindi

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\Big|y^2-x|x|\Big|dx\,dy = 2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0}}\Big|y^2-x|x|\Big|dx\,dy =$$
$$= 2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0,\ x\geq 0}}\Big|y^2-x^2\Big|dx\,dy + 2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0,\ x\leq 0}}\Big|y^2+x^2\Big|dx\,dy \doteq I+J$$

I.

$$y^2-x^2\geq 0 \iff |y|\geq|x| \iff y\geq x$$

Quindi spezziamo

$$I = 2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq x\geq 0}}(y^2-x^2)dx\,dy + 2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\geq y\geq 0}}(x^2-y^2)dx\,dy = 4\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\geq y\geq 0}}(x^2-y^2)dx\,dy =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt\int_0^1 r\,r^2(\cos^2 t-\sin^2 t)dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2t)dt = \frac{1}{2}$$

J.

$$2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0,\ x\leq 0}}\Big|y^2+x^2\Big|dx\,dy = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dt\int_0^1 rr^2dr = \frac{\pi}{4}$$

$I+J=1/2+\pi/4$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x+t, \quad x,t>0 \quad a>0\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u_x(0,t)=\sin t\end{cases}$$

2–A Soluzione In trasformata di Laplace $v(x,p)$ l'equazione diventa

$$p^2 v - a^2 v_{xx} = \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}, \quad v_x(0,p) = \frac{1}{1+p^2}$$

La soluzione della omogenea è al solito $\alpha e^{-px/a}$. La soluzione della non omogenea è $b + cx$.

$$p^2(b+cx) - a^2(b+cx)_{xx} = \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2} \implies b = \frac{1}{p^4} \; c = \frac{1}{p^3}$$

$v(x,p)$ è la somma delle due quindi

$$v(x,p) = \alpha e^{-px/a} + \frac{1}{p^4} + \frac{x}{p^3}$$

$$v_x(0,p) = \frac{-p\alpha}{a} + \frac{1}{p^3} = \frac{1}{1+p^2} \implies \alpha = \frac{a}{p^4} - \frac{a}{p(1+p^2)}$$

$$v(x,p) = \left(\frac{a}{p^4} - \frac{a}{p(1+p^2)}\right) e^{-px/a} + \frac{1}{p^4} + \frac{x}{p^3}$$

Inoltre scriviamo

$$v(x,p) = \left(\frac{a}{p^4} - \frac{a}{p} + \frac{ap}{1+p^2}\right) e^{-px/a} + \frac{1}{p^4} + \frac{x}{p^3}$$

Detto $\hat{t} = t - x/a$ risulta

$$u(x,t) = \left(\frac{\hat{t}^3}{6} - 1 + \cos\hat{t}\right) aH(\hat{t}) + \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x-1)(x^2+1)}$

Si indichi il percorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

3–A Soluzione Il percorso è analogo a quello che trovate a pag.9 della lezione del 2/11/2023. L'unica differenza consiste nel fatto che il cerchietto piccolo è centrato in $z = 1$ anziché in $z = 0$.

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x-1)(x^2+1)} = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re} e^{ix} \, dx}{(x-1)(x^2+1)} = \mathrm{Re}\left(\pi i \frac{e^i}{2} + 2\pi i \frac{e^{i^2}}{2i(i-1)}\right) =$$
$$= \frac{-\pi \sin 1}{2} - \frac{\pi}{2e}$$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la seguente funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{y^3}{6} \doteq z$ soggetta al vincolo $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura.

4–A Soluzione

$$L(x,y,\lambda) = \frac{x^4}{2} + \frac{y^3}{6} - \lambda(x^2 - \frac{y^2}{4} - 1)$$

$$2x^3-\lambda 2x=0,\quad \frac{y^2}{2}+\lambda\frac{y}{2}=0,\quad x^2-\frac{y^2}{4}=1$$

Le soluzioni (x,y,λ) sono

$$(\pm\sqrt{2},-2,2),\quad (1,0,1),\quad (-1,0,1)$$

Sono tutti punti non singolari.

$(\sqrt{2},-2,2)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(2\sqrt{2},-(-2)/2)\cdot(h_1,h_2)=(2\sqrt{2},1)\cdot(h_1,h_2)=2\sqrt{2}h_1+h_2=0$ da cui $\underline{h}=(h_1,-2\sqrt{2}h_1)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(h_1,-2\sqrt{2}h_1)\left(\begin{pmatrix}6x^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}h_1\\ -h_1 2\sqrt{2}\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(\sqrt{2},-2,2)}=$$
$$=(h_1,-2\sqrt{2}h_1)\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ -h_1 2\sqrt{2}\end{pmatrix}=0$$

Non possiamo decidere nulla con la procedura appena usata.

$(-\sqrt{2},-2,2)$. Come sopra

$(1,0,1)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(2,0)\cdot(h_1,h_2)=2h_1=0$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(0,h_2)\left(\begin{pmatrix}6x^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\ h_2\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(1,0,1)}=$$
$$=(0,h_2)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ h_2\end{pmatrix}=h_2^2/2\ \text{(minimo)}$$

$(-1,0,1)$. Come il precedente.

Per risolvere i punti $(\pm\sqrt{2},-2,2)$ e anche per risolvere gli altri punti si poteva anche scrivere $x^2=1-y^2/4$ e sostituire nella funzione ottenendo $y^4/16+y^3/8+y^2/2+1$ che derivata diventa $y(y+2)^2\geq 0$ da cui $y=0$ minimo e $y=-2$ sella. I punti $(\pm 2,-2,2)$ sono quindi delle selle.

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
22–01–2024 A.A. 2023/2024, primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome **compito (B)**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l’uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1)* (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Calcolare

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\Big|y^2-\frac{3}{4}x|x|\Big|dx\,dy$$

L’integrale è somma di diversi contributi che vanno scritti con chiarezza.

1–B Soluzione Detta $f(x,y)$ la funzione integranda, si verifica $f(x,y)=f(x,-y)$ e inoltre, se il punto di ccordinate (x,y) sta nel dominio di integrazione $x^2+y^2\le 1$, ci sta anche il punto $(x,-y)$. Possiamo scrivere quindi

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\Big|y^2-\frac{3}{4}x|x|\Big|dx\,dy = 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0}}\Big|y^2-\frac{3}{4}x|x|\Big|dx\,dy =$$
$$= 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\, x\ge 0}}\Big|y^2-\frac{3}{4}x^2\Big|dx\,dy + 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\, x\le 0}}\Big|y^2+\frac{3}{4}x^2\Big|dx\,dy \doteq I+J$$

I.

$$y^2-\frac{3}{4}x^2\ge 0 \iff |y|\ge\sqrt{3}|x|/2 \iff y\ge\sqrt{3}x/2$$

Quindi spezziamo e poi passiamo a coordinate polari $x=r\cos t$, $y=r\sin t$. $y\ge\dfrac{\sqrt{3}x}{2}$ diventa $\arctan t\ge\sqrt{3}/2$ ($t_0=\arctan(\sqrt{3}/2)$)

$$I = 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge\frac{\sqrt{3}x}{2}\ge 0}}(y^2-\frac{3}{4}x^2)dx\,dy + 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ \frac{\sqrt{3}x}{2}\ge y\ge 0}}(\frac{3}{4}x^2-y^2)dx\,dy =$$
$$= 2\int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1 r\,r^2(\sin^2 t-\frac{3}{4}\cos^2 t)dr + 2\int_0^{t_0}dt\int_0^1 r\,r^2(\frac{3}{4}\cos^2 t-\sin^2 t)dr =$$
$$= 2\int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1 r\,r^2(\frac{1-\cos(t)}{2}-\frac{3}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}t)dr + 2\int_0^{t_0}dt\int_0^1 r\,r^2(\frac{3}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}-\frac{1-\cos(2t)}{2})dr =$$
$$= \left(\frac{\pi}{32}-\frac{t_0}{16}+\frac{7\sin(2t_0)}{32}\right)+\left(\frac{-t_0}{16}+\frac{7\sin(2t_0)}{32}\right) = \frac{\pi}{32}-\frac{t_0}{8}+\frac{7}{16}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} =$$
$$= \frac{\pi}{32}-\frac{t_0}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

J.

$$2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0,\, x\leq 0}} \Big|y^2+\frac{3}{4}x^2\Big| dx\,dy = 2\int_0^1 r\,dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}+\frac{3}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dr = \frac{7\pi}{32}$$

$I+J=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{t_0}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale
$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x-t, \quad x,t>0 \quad a>0\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u_x(0,t)=\cos t\end{cases}$

2–B Soluzione In trasformata di Laplace $v(x,p)$ l'equazione diventa

$$p^2v-a^2v_{xx}=\frac{x}{p}-\frac{1}{p^2}, \quad v_x(0,p)=\frac{p}{1+p^2}$$

La soluzione della omogenea è al solito $\alpha e^{-px/a}$. La soluzione della non omogenea è $b+cx$.

$$p^2(b+cx)-a^2(b+cx)_{xx}=\frac{x}{p}-\frac{1}{p^2} \implies b=\frac{-1}{p^4},\ c=\frac{1}{p^3}$$

$v(x,p)$ è la somma delle due quindi

$$v(x,p)=\alpha e^{-px/a}-\frac{1}{p^4}+\frac{x}{p^3}$$

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}+\frac{1}{p^3}=\frac{p}{1+p^2} \implies \alpha=\frac{a}{p^4}-\frac{a}{1+p^2}$$

$$v(x,p)=\left(\frac{a}{p^4}-\frac{a}{1+p^2}\right)e^{-px/a}-\frac{1}{p^4}+\frac{x}{p^3}$$

Detto $\hat{t}=t-x/a$ risulta

$$u(x,t)=\left(\frac{\hat{t}^3}{6}-\sin\hat{t}\right)aH(\hat{t})-\frac{t^3}{6}+\frac{xt^2}{2}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x-2)(x^2+1)}$

Si indichi il percorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

3–B Soluzione Il percorso è analogo a quello che trovate a pag.9 della lezione del 2/11/2023. L'unica differenza consiste nel fatto che il cerchietto piccolo è centrato in $z=1$ anziché in $z=0$.

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x-2)(x^2+1)}=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}e^{ix}\,dx}{(x-2)(x^2+1)}=\mathrm{Im}\left(\pi i\frac{e^{2i}}{5}+2\pi i\frac{e^{i^2}}{2i(i-2)}\right)=$$
$$=\frac{\pi\cos 2}{5}-\frac{\pi}{5e}$$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la seguente funzione $f(x,y)=\dfrac{y^4}{2}+\dfrac{x^3}{6}\doteq z$ soggetta al vincolo $y^2+\dfrac{x^2}{4}=1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura.

4–B Soluzione

$$L(x,y,\lambda)=\frac{y^4}{2}+\frac{x^3}{6}-\lambda\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right)$$

Il sistema

$$2y(y^2-\lambda)=0,\quad x(x-\lambda)=0$$

ha come soluzioni

$$(0,\pm\sqrt{\lambda}),\quad (\lambda,0),\quad (\lambda,\pm\sqrt{\lambda}),$$

e poi tenendo conto che deve essere $4y^2+x^2=4$ si hanno le soluzioni (x,y,λ)

$$(0,\pm1,1),\quad (\pm2,0,\pm2),\quad \left(\sqrt{2}-1,\pm\sqrt{\sqrt{2}-1},\sqrt{2}-1\right)$$

Sono tutti punti non singolari.

$(0,1,1)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(0,2)\cdot(h_1,h_2)=0$ da cui $\underline{h}=(h_1,0)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(h_1,0)\left(\begin{pmatrix}x&0\\0&6y^2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1/2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(0,1,1)}=$$
$$=(h_1,0)\begin{pmatrix}-1/2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}=-h_1^2/2\quad\text{(massimo)}$$

$(0,-1,1)$. Rifacendo gli stessi calcoli arriviamo a

$$(h_1,0)\begin{pmatrix}-1/2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}=-h_1^2/2\quad\text{(massimo)}$$

$(2,0,2)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(1,0)\cdot(h_1,h_2)=0$ da cui $\underline{h}=(0,h_2)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(0,h_2)\left(\begin{pmatrix}x&0\\0&6y^2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1/2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(2,0,2)}=$$
$$=(0,h_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}=-4h_2^2\quad\text{(massimo)}$$

$(-2,0,-2)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(-1,0)\cdot(h_1,h_2)=0$ da cui $\underline{h}=(0,h_2)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(0,h_2)\left(\begin{pmatrix}x&0\\0&6y^2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1/2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(-2,0,-2)}=$$
$$=(0,h_2)\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}=4h_2^2\quad\text{(minimo)}$$

$\left(\sqrt{2}-1, \sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}-1\right) \doteq (q, \sqrt{q}, q)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(q/2, 2\sqrt{q}) \cdot (h_1, h_2) = 0$ da cui $\underline{h} = (h_1, -\sqrt{q}h_1/4)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(h_1, -\frac{\sqrt{q}h_1}{4}) \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 6y^2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ -\sqrt{q}h_1/4 \end{pmatrix} \right] \Bigg|_{(q, \sqrt{q}, q)} =$$

$$= (h_1, \frac{-\sqrt{q}h_1}{4}) \begin{pmatrix} q/2 & 0 \\ 0 & 4q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ -\sqrt{q}h_1/4 \end{pmatrix} = h_1^2(q/2 + q^2/4) \quad \text{(minimo)}$$

$\left(\sqrt{2}-1, -\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}-1\right) \doteq (q, \sqrt{q}, q)$. Come il precedente

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
22–01–2024 A.A. 2023/2024, primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome **compito (C)**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1)* (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Calcolare

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\Big|y^2-\frac{1}{4}x|x|\Big|dx\,dy$$

L'integrale è somma di diversi contributi che vanno scritti con chiarezza.

1–C Soluzione Detta $f(x,y)$ la funzione integranda, si verifica $f(x,y)=f(x,-y)$ e inoltre, se il punto di ccordinate (x,y) sta nel dominio di integrazione $x^2+y^2\leq 1$, ci sta anche il punto $(x,-y)$. Possiamo scrivere quindi

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\Big|y^2-\frac{1}{4}x|x|\Big|dx\,dy=2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0}}\Big|y^2-\frac{1}{4}x|x|\Big|dx\,dy=$$
$$=2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0,\,x\geq 0}}\Big|y^2-\frac{x^2}{4}\Big|dx\,dy+2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq 0,\,x\leq 0}}\Big|y^2+\frac{x^2}{4}\Big|dx\,dy\doteq I+J$$

I.

$$y^2-\frac{x^2}{4}\geq 0\iff |y|\geq |x|/2\iff y\geq x/2$$

Quindi spezziamo e poi passiamo a coordinate polari $x=r\cos t$, $y=r\sin t$. $y\geq x/2$ diventa $\arctan t\geq 1/2$ ($t_0=\arctan(1/2)$)

$$I=2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ y\geq\frac{x}{2}\geq 0}}(y^2-\frac{x^2}{4})dx\,dy+2\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ \frac{x}{2}\geq y\geq 0}}(\frac{x^2}{4}-y^2)dx\,dy=$$
$$=2\int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1 r\,r^2(\sin^2 t-\frac{1}{4}\cos^2 t)dr+2\int_0^{t_0}dt\int_0^1 r\,r^2(\frac{1}{4}\cos^2 t-\sin^2 t)dr=$$
$$=2\int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1 r\,r^2(\frac{1-\cos(t)}{2}-\frac{1}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}t)dr+2\int_0^{t_0}dt\int_0^1 r\,r^2(\frac{1}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}-\frac{1-\cos(2t)}{2})dr=$$
$$=\left(\frac{3\pi}{32}-\frac{3t_0}{16}+\frac{7\sin(2t_0)}{32}\right)+\left(\frac{-3t_0}{16}+\frac{5\sin(2t_0)}{32}\right)=\frac{3\pi}{32}-\frac{3t_0}{8}+\frac{3}{8}2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=$$
$$=\frac{3\pi}{32}-\frac{3t_0}{8}+\frac{3}{10}$$

J.

$$2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\ x\le 0}} \Big|y^2+\frac{x^2}{4}\Big| dx\,dy = 2\int_0^1 r\,dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}+\frac{1}{4}\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dr = \frac{5\pi}{32}$$

$I+J=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3t_0}{8}+\dfrac{3}{10}$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=-x+t, \quad x,t>0 \quad a>0\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u_x(0,t)=\sin(2t)\end{cases}$$

2–C Soluzione In trasformata di Laplace $v(x,p)$ l'equazione diventa

$$p^2v-a^2v_{xx}=\frac{-x}{p}+\frac{1}{p^2}, \quad v_x(0,p)=\frac{2}{4+p^2}$$

La soluzione della omogenea è al solito $\alpha e^{-px/a}$. La soluzione della non omogenea è $b+cx$.

$$p^2(b+cx)-a^2(b+cx)_{xx}=\frac{-x}{p}+\frac{1}{p^2} \implies b=\frac{1}{p^4}\ c=\frac{-1}{p^3}$$

$v(x,p)$ è la somma delle due quindi

$$v(x,p)=\alpha e^{-px/a}+\frac{1}{p^4}-\frac{x}{p^3}$$

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}-\frac{1}{p^3}=\frac{2}{4+p^2} \implies \alpha=\frac{-a}{p^4}-\frac{2a}{p(4+p^2)}$$

$$v(x,p)=\left(\frac{-a}{p^4}-\frac{2a}{p(4+p^2)}\right)e^{-px/a}+\frac{1}{p^4}-\frac{x}{p^3}$$

Inoltre scriviamo

$$v(x,p)=\left(\frac{-a}{p^4}-\frac{a}{2p}+\frac{ap}{2(4+p^2)}\right)e^{-px/a}+\frac{1}{p^4}-\frac{x}{p^3}$$

Detto $\hat t=t-x/a$ risulta

$$u(x,t)=\left(\frac{-\hat t^3}{6}-\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\hat t)}{2}\right)aH(\hat t)+\frac{t^3}{6}-\frac{xt^2}{2}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x-4)(x^2+4)}$

Si indichi il percorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

3–C Soluzione Il percorso è analogo a quello che trovate a pag.9 della lezione del 2/11/2023. L'unica differenza consiste nel fatto che il cerchietto piccolo è centrato in $z=1$ anziché in $z=4$.

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x-4)(x^2+4)} = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re} e^{ix}\, dx}{(x-4)(x^2+4)} = \mathrm{Re}\left(\pi i \frac{e^{4i}}{20} + 2\pi i \frac{e^{2i^2}}{4i(2i-4)}\right) =$$
$$= \frac{-\pi \sin 4}{20} - \frac{\pi}{10e^2}$$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la seguente funzione $f(x,y) = \dfrac{y^4}{2} + \dfrac{x^3}{6} \doteq z$ soggetta al vincolo $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura.

4–C Soluzione

$$L(x,y,\lambda) = \frac{y^4}{2} + \frac{x^3}{6} - \lambda(y^2 - \frac{x^2}{4} - 1)$$
$$\frac{x^2}{2} + \lambda\frac{x}{2} = 0, \quad 2y^3 - \lambda 2y = 0, \quad y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$$

Le soluzioni (x,y,λ) sono

$$(-2, \pm\sqrt{2}, 2), \quad (0, \pm 1, 1)$$

Sono tutti punti non singolari.

$(-2,\sqrt{2},2)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(-2/2, 2\sqrt{2})\cdot(h_1,h_2) = (-1, 2\sqrt{2})\cdot(h_1,h_2) = -h_1 + 2\sqrt{2}h_2 = 0$ da cui $\underline{h} = (2\sqrt{2}h_2, h_2)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(2\sqrt{2}h_2, h_2)\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 6y^2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}h_2 \\ h_2 \end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(-2,\sqrt{2},2)} =$$
$$= (2\sqrt{2}h_2, h_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}h_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

Non possiamo decidere nulla con la procedura appena usata.

$(-2,-\sqrt{2},2)$. Come sopra

$(0,1,1)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(0,2)\cdot(h_1,h_2) = 2h_2 = 0$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(h_1, 0)\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 6y^2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(0,1,1)} =$$
$$= (h_1, 0)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} = h_1^2/2 \text{ (minimo)}$$

$(0,-1,1)$. Come il precedente.

Per risolvere i punti $(-2,\pm\sqrt{2},2)$ e anche per risolvere gli altri punti si poteva anche scrivere $y^2 = 1 + x^2/4$ e sostituire nella funzione ottenendo $x^4/32 + x^3/6 + x^2/4 + 1$ che derivata diventa $x(x+2)^2 \geq 0$ da cui $x=0$ minimo e $x=-2$ sella. I punti $(-2,\pm\sqrt{2},2)$ sono quindi delle selle.

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
22–01–2024 A.A. 2023/2024, primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome **compito (D)**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1)* (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**) Calcolare

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \Big| y^2 + x|x| \Big| dx\, dy$$

L'integrale è somma di diversi contributi che vanno scritti con chiarezza.

1–D Soluzione Detta $f(x,y)$ la funzione integranda, si verifica $f(x,y)=f(x,-y)$ e inoltre, se il punto di ccordinate (x,y) sta nel dominio di integrazione $x^2+y^2\le 1$, ci sta anche il punto $(x,-y)$. Possiamo scrivere quindi

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \Big| y^2 + x|x| \Big| dx\, dy = 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0}} \Big| y^2 + x|x| \Big| dx\, dy =$$
$$= 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\ x\ge 0}} \Big| y^2 + x^2 \Big| dx\, dy + 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\ x\le 0}} \Big| y^2 - x^2 \Big| dx\, dy =$$
$$= 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\ x\le 0}} \Big| y^2 + x^2 \Big| dx\, dy + 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\ x\ge 0}} \Big| y^2 - x^2 \Big| dx\, dy$$

e abbiamo riottenuto il caso (A). Oppure possiamo procedere nel seguente modo partendo da

$$2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\ x\ge 0}} \Big| y^2 + x^2 \Big| dx\, dy + 2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0,\ x\le 0}} \Big| y^2 - x^2 \Big| dx\, dy = I + J$$

I.

$$2\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}$$

J.

$$y^2 - x^2 \ge 0 \iff |y| \ge |x| \iff y \ge -x$$

per cui otteniamo

$$J = \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge -x\ge 0}} (y^2-x^2) dx\, dy + \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ -x\ge y\ge 0}} (x^2-y^2) dx\, dy$$

$$2\int_0^1 r^3 dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\cos(2t)) dt + 2\int_0^1 r^3 dr \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos(2t) dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

da cui $I+J=1/2+\pi/4$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale
$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=-x-t, \quad x,t>0 \quad a>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u_x(0,t)=\cos(2t) \end{cases}$

2–D Soluzione In trasformata di Laplace $v(x,p)$ l'equazione diventa

$$p^2v-a^2v_{xx}=\frac{-x}{p}-\frac{1}{p^2}, \quad v_x(0,p)=\frac{p}{4+p^2}$$

La soluzione della omogenea è al solito $\alpha e^{-px/a}$. La soluzione della non omogenea è $b+cx$.

$$p^2(b+cx)-a^2(b+cx)_{xx}=\frac{-x}{p}-\frac{1}{p^2} \implies b=\frac{-1}{p^4}\ c=\frac{-1}{p^3}$$

$v(x,p)$ è la somma delle due quindi

$$v(x,p)=\alpha e^{-px/a}-\frac{1}{p^4}-\frac{x}{p^3}$$

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}-\frac{1}{p^3}=\frac{p}{4+p^2} \implies \alpha=\frac{-a}{p^4}-\frac{a}{4+p^2}$$
$$v(x,p)=\left(\frac{-a}{p^4}-\frac{a}{4+p^2}\right)e^{-px/a}-\frac{1}{p^4}-\frac{x}{p^3}$$

Inoltre scriviamo Detto $\hat{t}=t-x/a$ risulta

$$u(x,t)=\left(\frac{-\hat{t}^3}{6}-\frac{\sin(2\hat{t})}{2}\right)aH(\hat{t})-\frac{t^3}{6}-\frac{xt^2}{2}$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x-2)(x^2+4)}$

Si indichi il percorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

3–D Soluzione Il percorso è analogo a quello che trovate a pag.9 della lezione del 2/11/2023. L'unica differenza consiste nel fatto che il cerchietto piccolo è centrato in $z=0$ anziché in $z=2$.

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x-2)(x^2+4)}=V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}e^{ix}\,dx}{(x-2)(x^2+4)}=\mathrm{Im}\left(\frac{\pi i e^{2i}}{8}+2\pi i\frac{e^{-2}}{(2i-2)4i}\right)=$$
$$=\frac{\pi\sin 2}{8}-\frac{\pi e^{-2}}{8}$$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la seguente funzione $f(x,y)=\frac{-x^4}{2}+\frac{y^3}{6}\doteq z$ soggetta al vincolo $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura.

4–D Soluzione

$$L(x,y,\lambda)=\frac{-x^4}{2}+\frac{y^3}{6}-\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$$

Il sistema

$$y(y-\lambda)=0,\quad -x(x^2+\lambda)=0$$

ha come soluzioni

$$(0,\lambda),\quad (\pm\sqrt{-\lambda},0),\quad (\pm\sqrt{-\lambda},\lambda),$$

e poi tenendo conto che deve essere $4x^2+y^2=4$ si hanno le soluzioni (x,y,λ)

$$(0,2,2),\quad (0,-2,-2),\quad (-1,0,-1),\quad (1,0,-1),\quad \Big(\pm\sqrt{\sqrt{2}+1},-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1\Big),$$

Sono tutti punti non singolari.

$(0,2,2)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(0,1)\cdot(h_1,h_2)=0$ da cui $\underline{h}=(h_1,0)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(h_1,0)\left(\begin{pmatrix}-6x^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}h_1\\ 0\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(0,2,2)}=$$
$$=(h_1,0)\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ 0\end{pmatrix}=-4h_1^2\quad\text{(massimo)}$$

$(0,-2,-2)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(0,-1)\cdot(h_1,h_2)=0$ da cui $\underline{h}=(h_1,0)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(h_1,0)\left(\begin{pmatrix}-6x^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}h_1\\ 0\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(0,-2,-2)}=$$
$$=(h_1,0)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ 0\end{pmatrix}=4h_1^2\quad\text{(minimo)}$$

$(-1,0,-1)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(-1,0)\cdot(h_1,h_2)=0$ da cui $\underline{h}=(0,h_2)$. Poi dobbiamo studiare il segno della forma quadratica

$$\left[(0,h_2)\left(\begin{pmatrix}-6x^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\ h_2\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(-1,0,-1)}=$$
$$=(0,h_2)\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ h_2\end{pmatrix}=h_2^2/2\quad\text{(minimo)}$$

$(1,0,-1)$. Stessa conclusione

$$\left[(0,h_2)\left(\begin{pmatrix}-6x^2 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\ h_2\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(-1,0,-1)}=$$
$$=(0,h_2)\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ h_2\end{pmatrix}=h_2^2/2\quad\text{(minimo)}$$

$\Big(\sqrt{\sqrt{2}+1}, -\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1\Big) \doteq (\sqrt{-q}, q, q)$. La tangenzialità al vincolo degli spostamenti è data da $(2\sqrt{-q}, q/2, 0)\cdot(h_1, h_2) = 0$ da cui $\underline{h} = (\sqrt{-q}h_2/4, h_2)$.

$$\left[(\frac{\sqrt{-q}h_2}{4}, h_2)\left(\begin{pmatrix} -6x^2 & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \sqrt{-q}h_2/4 \\ h_2\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{(\sqrt{-q}, q, q,)} =$$

$$= (\frac{\sqrt{-q}h_2}{4}, h_2)\begin{pmatrix} 4q & 0 \\ 0 & q/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{-q}h_2/4 \\ h_2\end{pmatrix} = h_2^2(q/2 + a^2/4) < 0 \quad \text{(massimo)}$$

$\Big(-\sqrt{\sqrt{2}+1}, -\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1\Big)$. Stessa cosa