

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
21-09-2024 A.A. 2023/2024, settimo appello

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

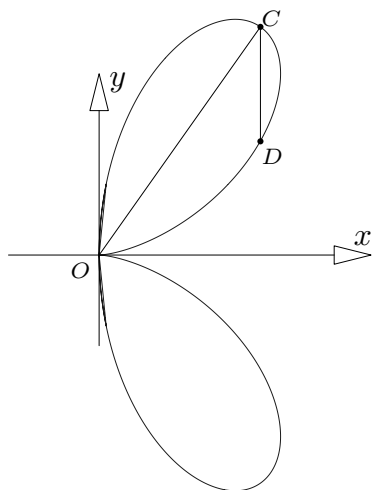
Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo
1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**)



Sia $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$ l'equazione del bordo delle due figure curvilinee. C è il punto di massima distanza dall'origine ed ha la stessa ascissa di D . 1) Si calcoli l'area della figura curvilinea interna alla "foglia" superiore e a destra del segmento CD ($\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ e $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$).

Soluzione In coordinate polari la curva è $r^4 = 8r^3 \cos t \sin^2 t$ da cui $r = 8CS^2$ e $CSr \geq 0$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. La curva è $x = 8C^2S^2$, $y = 8CS^3$. Il punto C si trova (prendiamo $0 \leq t \leq \pi/2$)

$$\frac{dr(t)}{dt} = 8S(2C^2 - S^2) \geq 0 \iff \tan t \leq \sqrt{2} \iff t \leq \arctan \sqrt{2} = t_0$$

Il punto C è quindi $(8\frac{1}{3}\frac{2}{3}, 8\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}) = (\frac{16}{9}, \frac{16\sqrt{2}}{9})$

Per avere D dobbiamo risolvere l'equazione ($y \geq 0$)

$$\left(y^2 + \frac{256}{81}\right)^2 = 8\frac{16}{9}y^2 \implies y^2 + \frac{256}{81} = \frac{8y\sqrt{2}}{3} \implies y = \frac{8\sqrt{2}}{9}, \quad y = \frac{16\sqrt{2}}{9}$$

a noi interessa $y = 8\sqrt{2}/9$, $D = (16/9, 8\sqrt{2}/9)$. Ne discende

$$\frac{8CS^3}{8C^2S^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \tan(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \vartheta = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{2}$$

Aplichiamo Gauss-Green. Se $t_0 = \arctan \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\underline{\gamma}} (x dy - y dx) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-t_0}^{t_0} (8C^2 S^2 (-8S^4 + 24C^2 S^2) - 8CS^3 (-16CS^3 + 16C^3 S)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-t_0}^{t_0} 64C^2 S^4 dt = 32 \int_{\frac{\pi}{2}-t_0}^{t_0} \frac{\sin^2(2t)}{4} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = 4 \int_{\frac{\pi}{2}-t_0}^{t_0} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt - \frac{4}{3} \sin^3(2t) \Big|_{\frac{\pi}{2}-t_0}^{t_0} = \\ &= 2(2t_0 - \frac{\pi}{2}) - \frac{\sin(4t_0)}{2} - \frac{\sin(4t_0)}{2} - \frac{2}{3} \sin^3(2t_0) + \frac{2}{3} \sin^3(2t_0) = 4t_0 - \pi + \frac{4\sqrt{2}}{9} \sim 1.3 \end{aligned}$$

Il segmento verticale che da C scende verso D contribuisce con $-\frac{1}{2} \int_{\frac{8\sqrt{2}}{9}}^{\frac{16\sqrt{2}}{9}} \frac{16}{9} dy = \frac{-64\sqrt{2}}{81}$. La somma dei due contributi è $4 \arctan \sqrt{2} - \pi - \frac{32\sqrt{2}}{81} \sim 1.12$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t - \frac{x}{a}) H(t - \frac{x}{a}), & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \end{cases}$$

dove $f(u) = \int_0^u yg(u-y)dy$ e $g(y)$ è la funzione che vale -1 per $0 \leq y < 1$, 2 per $1 \leq y < 2$ e -1 per $y \geq 2$. (Non è necessario ma conviene scrivere $g(u) = aH(u-u_1) + bH(u-u_2) + cH(u-u_3)$ con a, b, c, u_1, u_2, u_3 opportuni)

Soluzione $g(y) = -H(y) + 3H(y-1) - 3H(y-2)$ per cui $\mathcal{L}(f) = \frac{-1}{p^3} + \frac{3e^{-p}}{p^3} - \frac{3e^{-2p}}{p^3} \doteq F(p)$.

Se $\mathcal{L}(u) = v(x, p)$ si ha

$$p^2 v - v_{xx} = e^{-px/a} F(p), \quad v(0, p) = 0$$

la cui soluzione è $v(x, p) = \alpha e^{-px/a} + \frac{x F(p)}{2pa} e^{-px/a}$ e $v(0, p) = \alpha = 0$ da cui $v(x, p) = \frac{x F(p)}{2pa} e^{-px/a}$

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} v(x, p) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{x}{2a} \left(\frac{-1}{p^4} + \frac{3e^{-p}}{p^4} - \frac{3e^{-2p}}{p^4} \right) e^{-px/a} \right]$$

$$u(x, t) = \frac{x}{2a} \left(\frac{-1}{6} \hat{t}^3 H(\hat{t}) + \frac{1}{2} (\hat{t}-1)^3 H(\hat{t}-1) - \frac{1}{2} (\hat{t}-2)^3 H(\hat{t}-2) \right), \quad \hat{t} = t - x/a$$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale

$\omega = \frac{y + 2y^2 - 1 + 4x + 4x^2 + x^3}{(2+x)^2(1+y)} dx + \frac{x}{2+x} dy$. Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ con $\underline{\gamma} = (\sqrt{1-(t-1)^2}, t)$, $0 \leq t \leq 2$ (esporre esplicitamente tutti i calcoli necessari)

Soluzione

$$\left(\frac{y + 2y^2 - 1 + 4x + 4x^2 + x^3}{(2+x)^2(1+y)} \right)_y - \left(\frac{x}{2+x} \right)_x = \frac{-x}{(1+y)^2}$$

quindi

$$\left(\frac{y + 2y^2 - 1 + 4x + 4x^2 + x^3}{(2+x)^2(1+y)} \right)_y - \left(\frac{x}{2+x} - \frac{x^2}{2(1+y)^2} \right)_x = 0$$

Detta $\tilde{\omega} = \frac{y + 2y^2 - 1 + 4x + 4x^2 + x^3}{(2+x)^2(1+y)}dx + \left(\frac{x}{2+x} - \frac{x^2}{2(1+y)^2}\right)dy$ si ha $\int_{\underline{\gamma}} \tilde{\omega} = \int_{\underline{\gamma}} \omega - \int_{\underline{\gamma}} \frac{x^2}{2(1+y)^2}dy$. $\tilde{\omega}$ è chiusa in un semplicemente connesso per cui possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}} \tilde{\omega} &= \int_{\underline{\sigma}} \tilde{\omega} = 0 \quad \sigma = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 2 \\ &- \int_{\underline{\gamma}} \frac{x^2}{2(1+y)^2}dy = - \int_0^2 \frac{1 - (t-1)^2}{2(1+t)^2}dt = -2 + 2 \ln 3 \end{aligned}$$

3) (11 punti) Solo per Elettronica&Internet

Sia data la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ soggetta alla condizione (vincolo) $x^2 + y^2 + x + y = 0$. Trovare tutti i punti critici vincolati e stabilirne la natura (**esplicitare i calcoli. Bisogna scrivere le equazioni le cui soluzioni sono le coordinate dei punti critici**)

Soluzione Dobbiamo risolvere l'equazione

$$3x^2 + y - \lambda(2x + 1) = 0, \quad 3y^2 + x - \lambda(2y + 1) = 0, \quad x^2 + y^2 + x + y = 0$$

Sottraiamo le prime due

$$3(x+y)(x-y) - (x-y) = 2\lambda(x-y)$$

Primo caso $x = y$. $x^2 + y^2 + x + y = 0$ dà $x = 0$, $x = -1$.

$(0, 0)$ è non singolare in quanto $2x + 1 = 1 \neq 0$ e gli corrisponde $\lambda = 0$. Anche $(-1, -1)$ è non singolare in quanto $2x + 1 = -1$ e gli corrisponde $\lambda = -2$.

Tangenzialità al vincolo degli spostamenti. $(\pm 1, \pm 1) \cdot (a, b) = 0$ implica $a = -b$. La forma quadratica da studiare, conseguente alla matrice hessiana è

$$(-b, b) \begin{pmatrix} 6x - 2\lambda & 1 \\ 1 & 6y - 2\lambda \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,0)} \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = (-b, b) \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = -2b^2 \quad (\text{massimo})$$

$$(-b, b) \begin{pmatrix} 6x - 2\lambda & 1 \\ 1 & 6y - 2\lambda \end{pmatrix} \Big|_{(-1,-1,-2)} \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = (-b, b) \begin{pmatrix} 3b \\ -3b \end{pmatrix} = -6b^2 \quad (\text{massimo})$$

Secondo caso $x \neq y$ da cui

$$3(x+y) - 1 = 2\lambda \tag{1}$$

Ora sommiamo le prime due

$$3(x^2+y^2)+(x+y) = \lambda(2(x+y)+2) = 3(-x-y)+(x+y) = \lambda(2(x+y)+2) \iff 2\lambda+(2\lambda+2)\frac{2\lambda+1}{3} = 0$$

ossia $2\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$ da cui $\lambda = (-3 \pm \sqrt{7})/2$ da cui (tornare alla prima equazione)

$$3x^2 + \frac{1+2\lambda}{3} - x - 2x\lambda - \lambda = 0 \implies x = \frac{3(1+2\lambda) \pm \sqrt{36\lambda^2 + 54\lambda - 27}}{18} = \frac{3(1+2\lambda) \pm \sqrt{3(\lambda^2 - 1)}}{18} \doteq x_{1,2},$$

e solamente $\lambda = (-3 - \sqrt{7})/2$ va bene cui attraverso (1) corrispondono $y_{1,2} = \frac{3(1+2\lambda) \mp \sqrt{3(\lambda^2 - 1)}}{18}$.

Verifica non singolarità punti critici.

$$2x_1 + 1 = 1 + \frac{1 + 2\lambda}{3} + \frac{\sqrt{3(\lambda^2 - 1)}}{9} = \frac{4 + 2\lambda}{3} + \frac{\sqrt{3(\lambda^2 - 1)}}{9} = 0$$

significa

$$\frac{\lambda^2 - 1}{3} = 16 + 16\lambda + 4\lambda^2 \iff 11\lambda^2 + 48\lambda + 49 = 0 \iff \lambda = \frac{-24 \pm \sqrt{37}}{11}$$

e quindi $2x_1 + 1$ è diverso da zero. Chiaramente $2y_2 + 1 = 2x_1 + 1 \neq 0$ quindi i punti sono non singolari.

Cominciamo da (x_1, y_1, λ) . La tangenzialità ci dà $a = \frac{-b(1 + 2y_1)}{1 + 2x_1} \doteq \tilde{a}$ e quindi

$$\begin{aligned} (\tilde{a}, b) \begin{pmatrix} 6x - 2\lambda & 1 \\ 1 & 6y - 2\lambda \end{pmatrix} \Big|_{(x_1, y_1, \lambda)} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \end{pmatrix} &= b^2 \left(\frac{18 + \sqrt{\Delta}}{18} \frac{(1 + 2y_2)^2}{(1 + 2x_1)^2} + \frac{18 - \sqrt{\Delta}}{18} - 2 \frac{1 + 2y_1}{1 + 2x_1} \right) \\ &= \frac{4(\lambda^2 - 1)(5 + \lambda)}{(12 + 6\lambda - \sqrt{3\lambda^2 - 3})^2} b^2 \quad (\text{minimo}) \text{ essendo } 5 + \lambda > 0 \end{aligned}$$

Lo stesso calcolo per il punto (x_2, y_2) porta a

$$\frac{4(\lambda^2 - 1)(1 - \lambda)}{(12 + 6\lambda + \sqrt{3\lambda^2 - 3})^2} b^2 \quad (\text{minimo}) \text{ essendo } 1 - \lambda > 0$$

Regole per la consegna

- 1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile
- 2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.
- 3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile
- 4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti
- 5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.
- 6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito