

**Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)**  
**20-07-2024 A.A. 2023/2024, quinto appello**

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

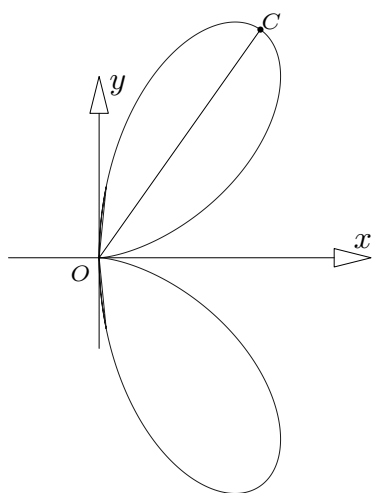
Matricola

**CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio**

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo  
 1)\* (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**)



Sia  $(x^2 + y^2)^2 = 8xy^2$  l'equazione del bordo delle due figure curvilinee.  $C$  è il punto di massima distanza dall'origine. 1) Si calcoli l'area della figura curvilinea interna alla "foglia" superiore e a destra del segmento  $OC$  2) Dal punto  $(0, 0, a)$ ,  $a > 0$  si conduca la congiungente con ciascun punto dell'interno della "foglia" superiore. Si genera un volume conico che bisogna calcolare (Usare coordinate polari e Gauss-Green. Inoltre serve  $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$  e  $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$ . Per 2) ricordare che il segmento congiungente due punti di coordinate  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  è  $\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Le coordinate per parametrizzare il volume diventano quindi  $(r, t, \lambda)$ . Per risolvere 2) non è necessario avere risolto prima 1) )

**2)** (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}), & x, t > 0 \quad a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \end{cases}$$

dove  $f(u) = \int_0^u yg(u-y)dy$  e  $g(y)$  è la funzione che vale 1 per  $0 \leq y < 1$ , 2 per  $1 \leq y < 2$  e 0 per  $y \geq 2$ . (Non è necessario ma conviene scrivere  $g(u) = aH(u-u_1) + bH(u-u_2) + cH(u-u_3)$  con  $a, b, c, u_1, u_2, u_3$  opportuni)

**3)** (9 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale  $\omega = \frac{2x + xy^4}{y^2}dx + \frac{3y^5 - 2x^2 + xy^5}{y^3}dy$ . Si calcoli  $\int_{\underline{\gamma}} \omega$  con  $\underline{\gamma} = (\cos t, 2 + \sin t)$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

**4) (11 punti) Solo per Elettronica&Internet**

Si calcolino i punti di estremo della funzione  $f(x, y) = y^2 + y$  soggetta al vincolo  $x^3 + y^2 - 3x + \frac{4y^3}{3} - \frac{1}{12} = 0$  e se ne stabilisca la natura (Per uno dei punti bisogna sapere che l'unica soluzione reale dell'equazione  $16z^3 + 12z^2 - 25 = 0$  è il numero  $z_0 \sim 0.96$ . Per un altro dei punti bisogna sapere che l'unica soluzione reale dell'equazione  $16z^3 + 12z^2 + 23 = 0$  è il numero  $z_1 \sim -1.44$ . Lasciarli indicati nel corso della risoluzione e solo alla fine tenere conto del loro valore per stimare facilmente determinate espressioni)

**Soluzione 1)** 1) In coordinate polari la curva è  $r^4 = 8r^3 \cos t \sin^2 t$  da cui  $r = 8CS^2$  e  $CSr \geq 0$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ . La curva è  $x = 8C^2S^2$ ,  $y = 8CS^3$ .

Il punto  $C$  si trova (prendiamo  $0 \leq t \leq \pi/2$ )

$$\frac{dr(t)}{dt} = 8S(2C^2 - S^2) \geq 0 \iff \tan t \leq \sqrt{2} \iff t \leq \arctan \sqrt{2} = t_0$$

Il punto  $C$  è quindi  $(8\frac{1}{3}\frac{2}{3}, 8\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}) = (\frac{16}{9}, \frac{16\sqrt{2}}{9})$

Usiamo Gauss–Green. Poi andiamo da  $O$  verso  $C$  lungo il bordo della foglia  $\underline{\gamma} = (8CS^2, 8C^2S^2)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\underline{\gamma}} (xdy - ydx) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} (8C^2S^2(-8S^4 + 24C^2S^2) - 8CS^3(-16CS^3 + 16C^3S))dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} 64C^2S^4dt = 32 \int_0^{t_0} \frac{\sin^2(2t)}{4} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = 4 \int_0^{t_0} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt - \frac{4}{3} \sin^3(2t) \Big|_0^{t_0} = \\ &= 2t_0 - \frac{\sin(4t_0)}{2} - \frac{4}{3} \sin^3(2t_0) = 2t_0 - \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{4}{3} \frac{16\sqrt{2}}{27} = \\ &= 2t_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{73\sqrt{2}}{81} = 2 \arctan(\sqrt{2}) - \frac{100\sqrt{2}}{81} \sim 0.165 \end{aligned}$$

Poi andiamo da  $C$  verso  $O$  sul segmento di equazione  $y = \sqrt{2}x$ . Facciamo il calcolo andando da  $O$  verso  $C$  e cambiamo segno. La curva è  $\underline{\gamma}(t) = (t, \sqrt{2}t)$ ,  $0 \leq t \leq 16/9$  per cui

$$\frac{1}{2} \int_{\underline{\gamma}} (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int_0^{16/9} (t\sqrt{2} - \sqrt{2}t)dt = 0$$

2) Il segmento che congiunge il vertice del volume conico con un punto generico all'interno della foglia superiore è  $(x, y, z) = \lambda(0, 0, a) + (1 - \lambda)(x, y, 0) = ((1 - \lambda)rC, (1 - \lambda)rS, \lambda a)$  il cui Jacobiano è  $ar(1 - \lambda)^2$  e quindi il volume è

$$\begin{aligned} a \int_0^1 (1 - \lambda)^2 d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{8CS^2} r dr &= \frac{a}{3} 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} C^2 S^4 dt = \\ &= \frac{32a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2t)}{4} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{4a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t) dt = \frac{4a}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt = \frac{a\pi}{3} \end{aligned}$$

**Soluzione 2)**  $g(u) = H(u) + H(u - 1) - 2H(u - 2)$  quindi  $\mathcal{L}(u * g) = \frac{1}{p^3} + \frac{e^{-p}}{p^3} - \frac{2e^{-2p}}{p^3}$

e  $\mathcal{L}\left(f(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a})\right) = e^{-px/a} \left(\frac{1}{p^3} + \frac{e^{-p}}{p^3} - \frac{2e^{-2p}}{p^3}\right)$  quindi dobbiamo risolvere  $p^2v(x, p) - a^2v^{xx}(x, p) = e^{-px/a}F(p)$ ,  $v(0, p) = 0$ . Al solito la soluzione della non omogenea è  $v(x, p) = cxe^{-px/a}$  da cui

$$p^2cxe^{-px/a} - a^2\left(\frac{-2pc}{a} + \frac{cp^2x}{a^2}\right)e^{-px/a} = e^{-px/a}F(p) \implies c = F(p)/(2ap)$$

e quindi  $v(x, p) = \alpha e^{-px/a} + e^{-px/a} \frac{x F(p)}{2ap}$ .  $v(0, p) = 0$  implica  $\alpha = 0$  da cui  $v(x, p) = \frac{x}{2a} e^{-px/a} \left( \frac{1}{p^4} + \frac{e^{-p}}{p^4} - \frac{2e^{-2p}}{p^4} \right)$  da cui

$$u(x, t) = \frac{x}{2a} \left( \frac{1}{6} \left( t - \frac{x}{a} \right)^3 H\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{6} \left( t - 1 - \frac{x}{a} \right)^3 H\left(t - 1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{3} \left( t - 2 - \frac{x}{a} \right)^3 H\left(t - 2 - \frac{x}{a}\right) \right)$$

### Soluzione 3)

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{2x + xy^4}{y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{3y^5 - 2x^2 + xy^5}{y^3} = 2xy - y^2$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{2x + xy^4}{y^2} + \frac{y^3}{3} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{3y^5 - 2x^2 + xy^5}{y^3} - x^2 y \right] = 0$$

$\tilde{\omega} \doteq \left[ \frac{2x + xy^4}{y^2} + \frac{y^3}{3} \right] dx + \left[ \frac{3y^5 - 2x^2 + xy^5}{y^3} - x^2 y \right] dy = \omega + \frac{y^3}{3} dx - x^2 y dy$  quindi  $\omega = \tilde{\omega} - \frac{y^3}{3} dx + x^2 y dy$ .  $\tilde{\omega}$  è evidentemente esatta nel semipiano superiore per cui cambiamo percorso per andare dal punto  $(0, 1)$  al punto  $(0, 3)$  e procediamo lungo il segmento verticale  $\underline{\sigma}(t) = (0, t)$   $1 \leq t \leq 3$  da cui  $\int_{\underline{\sigma}} \tilde{\omega} = \int_1^3 3t^2 dt = 26$ . Inoltre

$$\int_{\underline{\gamma}} \frac{y^3}{3} dx - x^2 y dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 + \sin t)^3 (-\sin t) dt}{3} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (2 + \sin t) \cos t dt = \frac{-17\pi}{8} - \frac{8}{3}$$

Il risultato è  $\frac{-17\pi}{8} - \frac{8}{3} - (-26) = \frac{70}{3} - \frac{17\pi}{8}$

**Soluzione 4)**  $F(x, y) = y^2 + y - \lambda(x^3 + y^2 + \frac{4y^3}{3} - 3x + \frac{1}{12})$  da cui

$$2y + 1 - \lambda(2y + 4y^2) = 0, \quad -3\lambda(x^2 - 1) = 0, \quad x^3 + y^2 + \frac{4y^3}{3} - 3x + \frac{1}{12} = 0$$

Dalla seconda  $\lambda = 0$ . Dalla prima  $y = -1/2$ . Dalla terza  $x^3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - 3x + \frac{1}{12} = 0$  quindi  $x^3 - 3x = 0$ . Le soluzioni sono  $P_1 = (0, -1/2, 0)$ ,  $P_2 = (\sqrt{3}, -1/2, 0)$ ,  $P_3 = (-\sqrt{3}, -1/2, 0)$ . Sono tutti punti regolari in quanto

$$(3x^2 - 3, 2y + 4y^2)|_{P_1} = (-3, 0), \quad (3x^2 - 3, 2y + 4y^2)|_{P_2} = (6, 0), \quad (3x^2 - 3, 2y + 4y^2)|_{P_3} = (6, 0)$$

Sempre dalla seconda equazione abbiamo  $x = \pm 1$ .

$x = 1$ . Dalla terza si ha  $16y^3 + 12y^2 - 25 = 0$   $y = y_0$ . Dalla prima  $\lambda = 1/(2y) = 1/(2y_0)$ ,  $(P_4)$   
 $x = -1$ . Dalla terza si ha  $16y^3 + 12y^2 + 23 = 0$   $y = y_1$ . Dalla prima  $\lambda = 1/(2y) = 1/(2y_1)$ ,  $(P_5)$   
 $(3x^2 - 3, 2y + 4y^2)|_{P_4} = (0, 2y_0 + 4y_0^2) \neq (0, 0)$  in quanto  $y_0 \sim 1$ .  $(3x^2 - 3, 2y + 4y^2)|_{P_5} = (0, 2y_1 + 4y_1^2) \neq (0, 0)$ , in quanto  $y_1 \sim -1.44$ . Sono punti regolari

Ora identifichiamo la natura dei punti.

$P_1$ . Tangenzialità.  $(-3, 0) \cdot (a, b) = 0$  quindi  $a = 0$ . Abbiamo

$$(0, b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = 2b^2 \text{ minimo}$$

Per  $P_2$  e  $P_3$  è lo stesso in quanto  $\lambda = 0$ .

$P_4$ . Tangenzialità.  $(0, 2y_0 + 4y_0^2) \cdot (a, b) = 0$  quindi  $b = 0$ , in quanto  $2y_0 + 4y_0^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} (a, 0) \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2y_0} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2y_0 + 4y_0^2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = (a, 0) \begin{pmatrix} -3/(2y_0) & 0 \\ 0 & 1 - 2y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-3a^2}{2y_0} \text{ massimo} \end{aligned}$$

$P_5$ . Tangenzialità.  $(0, 2y_1 + 4y_1^2) \cdot (a, b) = 0$  quindi  $b = 0$ , in quanto  $2y_1 + 4y_1^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} (a, 0) \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2y_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2y_1 + 4y_1^2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = (a, 0) \begin{pmatrix} -3/(2y_1) & 0 \\ 0 & 1 - 2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-3a^2}{2y_1} \text{ massimo} \end{aligned}$$