Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
10–09–2024 A.A. 2023/2024, sesto appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

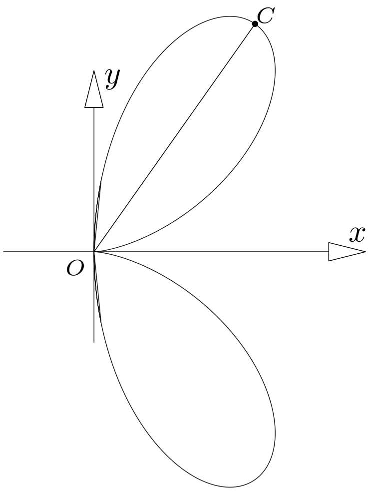
CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

È vietato l'uso della calcolatrice, del telefonino o di qualsiasi supporto non cartaceo

1) (10 punti per **elettronica&Internet** e 12 per **informatica**)



Sia $(x^2+y^2)^2 = 8xy^2$ l'equazione del bordo delle due figure curvilinee. C è il punto di massima distanza dall'origine. 1) Si calcoli l'area della figura curvilinea interna alla "foglia" superiore e a destra del segmento OC 2) Dal punto $(0,0,a)$, $a>0$ si conduca la congiungente con ciascun punto dell'interno della "foglia" superiore. Si genera un volume conico che bisogna calcolare (Usare coordinate polari e Gauss–Green. Inoltre serve $\cos(\arctan x)=1/\sqrt{1+x^2}$ e $\sin(\arctan x)=x/\sqrt{1+x^2}$. Per 2) ricordare che il segmento congiungente due punti di coordinate $\underline{x}$ e $\underline{y}$ è $\lambda\underline{x}+(1-\lambda)\underline{y}$ con $0\le\lambda\le 1$. Le coordinate per parametrizzare il volume diventano quindi (r,t,λ). Per risolvere 2) non è necessario avere risolto prima 1))

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a}), \quad x,t>0 \quad a>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u(0,t)=0 \end{cases}$$

dove $f(u) = \displaystyle\int_0^u y g(u-y)dy$ e $g(y)$ è la funzione che vale 1 per $0\le y<1$, 2 per $1\le y<2$ e 0 per $y\ge 2$. (Non è necessario ma conviene scrivere $g(u)=aH(u-u_1)+bH(u-u_2)+cH(u-u_3)$ con a,b,c,u_1,u_2,u_3 opportuni)

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{2x+xy^4}{y^2}dx + \dfrac{3y^5-2x^2+xy^5}{y^3}dy$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ con $\underline{\gamma} = (\cos t, 2+\sin t)$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Si calcolino i punti di estremo della funzione $f(x,y) = y^2 + y$ soggetta al vincolo $x^3 + y^2 - 3x + \dfrac{4y^3}{3} - \dfrac{1}{12} = 0$ e se ne stabilisca la natura (Per uno dei punti bisogna sapere che l’unica soluzione reale dell’equazione $16z^3+12z^2-25=0$ è il numero $z_0\sim 0.96$. Per un altro dei punti bisogna sapere che l’unica soluzione reale dell’equazione $16z^3+12z^2+23=0$ è il numero $z_1\sim -1.44$. Lasciarli indicati nel corso della risoluzione e solo alla fine tenere conto del loro valore per stimare facilmente determinate espressioni)

Soluzione 1) 1) In coordinate polari la curva è $r^4 = 8r^3 \cos t \sin^2 t$ da cui $r = 8CS^2$ e $CSr \geq 0$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. La curva è $x = 8C^2S^2$, $y = 8CS^3$.

Il punto C si trova (prendiamo $0 \leq t \leq \pi/2$)

$$\frac{dr(t)}{dt} = 8S(2C^2 - S^2) \geq 0 \iff \tan t \leq \sqrt{2} \iff t \leq \arctan\sqrt{2} = t_0$$

Il punto C è quindi $(8\frac{1}{3}\frac{2}{3}, 8\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}) = (\frac{16}{9}, \frac{16\sqrt{2}}{9})$

Usiamo Gauss–Green. Poi andiamo da O verso C lungo il bordo della foglia $\underline{\gamma} = (8C^2S^2, 8CS^3)$, $0 \leq t \leq t_0$.

$$\frac{1}{2}\int_{\underline{\gamma}}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}(8C^2S^2(-8S^4 + 24C^2S^2) - 8CS^3(-16CS^3 + 16C^3S))dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{t_0} 64C^2S^2 dt = 8\int_0^{t_0}\sin^2(2t)dt = 8\int_0^{t_0}\frac{1-\cos(4t)}{2}dt = 4t_0 - \sin(4t_0)$$
$$= 4\arctan\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Poi andiamo da C verso O sul segmento di equazione $y = \sqrt{2}x$. Facciamo il calcolo andando da O verso C e cambiamo segno. La curva è $\underline{\gamma}(t) = (t, \sqrt{2}t)$, $0 \leq t \leq 16/9$ per cui

$$\frac{1}{2}\int_{\underline{\gamma}}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{16}{9}}(t\sqrt{2} - \sqrt{2}t)dt = 0$$

2) Il segmento che congiunge il vertice del volume conico con un punto generico all'intermo della foglia superiore è $(x, y, z) = \lambda(0, 0, a) + (1-\lambda)(x, y, 0) = ((1-\lambda)rC, (1-\lambda)rS, \lambda a)$ il cui Jacobiamo è $ar(1-\lambda)^2$ e quindi il volume è

$$a\int_0^1(1-\lambda)^2 d\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^{8CS^2}rdr = \frac{a}{3}32\int_0^{\frac{\pi}{2}}C^2S^4 dt =$$
$$= \frac{32a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2t)}{4}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{4a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2t)dt = \frac{4a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(4t)}{2}dt = \frac{a\pi}{3}$$

Soluzione 2) $g(u) = H(u) + H(u-1) - 2H(u-2)$ quindi $\mathcal{L}(u * g) = \frac{1}{p^3} + \frac{e^{-p}}{p^3} - \frac{2e^{-2p}}{p^3}$ e $\mathcal{L}\left(f(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a})\right) = e^{-px/a}\left(\frac{1}{p^3} + \frac{e^{-p}}{p^3} - \frac{2e^{-2p}}{p^3}\right)$ quindi dobbiamo risolvere $p^2v(x,p) - a^2v^{xx}(x,p) = e^{-px/a}F(p)$, $v(0,p) = 0$. Al solito la soluzione della non omogenea è $v(x,p) = cxe^{-px/a}$ da cui

$$p^2cxe^{-px/a} - a^2(\frac{-2pc}{a} + \frac{cp^2x}{a^2})e^{-px/a} = e^{-px/a}F(p) \implies c = F(p)/(2ap)$$

e quindi $v(x,p) = \alpha e^{-px/a} + e^{-px/a}\frac{xF(p)}{2ap}$. $v(0,p) = 0$ implica $\alpha = 0$ da cui $v(x,p) = \frac{x}{2a}e^{-px/a}\left(\frac{1}{p^4} + \frac{e^{-p}}{p^4} - \frac{2e^{-2p}}{p^4}\right)$ da cui

$$u(x,t) = \frac{x}{2a}\left(\frac{1}{6}(t - \frac{x}{a})^3H(t - \frac{x}{a}) + \frac{1}{6}(t - 1 - \frac{x}{a})^3H(t1 - 1 - \frac{x}{a}) - \frac{1}{3}(t - 2 - \frac{x}{a})^3H(t - 2 - \frac{x}{a})\right)$$

Soluzione 3)
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{2x+xy^4}{y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{3y^5-2x^2+xy^5}{y^3}=2xy-y^2$$
quindi
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2x+xy^4}{y^2}+\frac{y^3}{3}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3y^5-2x^2+xy^5}{y^3}-x^2y\right]=0$$
$\tilde\omega \doteq \left[\frac{2x+xy^4}{y^2}+\frac{y^3}{3}\right]dx+\left[\frac{3y^5-2x^2+xy^5}{y^3}-x^2y\right]dy=\omega+\frac{y^3}{3}dx-x^2ydy$ quindi $\omega=\tilde\omega-\frac{y^3}{3}dx+x^2ydy$. $\tilde\omega$ è evidentemente esatta nel semipiano superiore per cui cambiamo percorso per andare dal punto $(0,1)$ al punto $(0,3)$ e procediamo pungo il segmento verticale $\underline{\sigma}(t)=(0,t)$ $1\le t\le 3$ da cui $\int_{\underline{\sigma}}\tilde\omega=\int_1^3 3t^2dt=26$. Inoltre
$$\int_{\underline{\gamma}}\frac{y^3}{3}dx-x^2ydy=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2+\sin t)^3(-\sin t)dt}{3}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(2+\sin t)\cos tdt=\frac{-17\pi}{8}-\frac{8}{3}$$
Il risultato è $\frac{-17\pi}{8}-\frac{8}{3}-(-26)=\frac{70}{3}-\frac{17\pi}{8}$

Soluzione 4) $F(x,y)=y^2+y-\lambda(x^3+y^2+\frac{4y^3}{3}-3x+\frac{1}{12})$ da cui
$$2y+1-\lambda(2y+4y^2)=0,\qquad -3\lambda(x^2-1)=0,\qquad x^3+y^2+\frac{4y^3}{3}-3x+\frac{1}{12}=0$$
Dalla seconda $\lambda=0$. Dalla prima $y=-1/2$. Dalla terza $x^3+\frac14-\frac16-3x+\frac{1}{12}=0$ quindi $x^3-3x=0$. Le soluzioni sono $P_1=(0,-1/2,0)$, $P_2=(\sqrt3,-1/2,0)$, $P_3=(-\sqrt3,-1/2,0)$. Sono tutti punti regolari in quanto
$$(3x^2-3,2y+4y^2)\big|_{P_1}=(-3,0),\quad (3x^2-3,2y+4y^2)\big|_{P_2}=(6,0),\quad (3x^2-3,2y+4y^2)\big|_{P_3}=(6,0)$$
Sempre dalla seconda equazione abbiamo $x=\pm1$.

$x=1$. Dalla terza si ha $16y^3+12y^2-25=0$ $y=y_0$. Dalla seconda $\lambda=1/(2y)=1/(2y_0)$, (P_4)

$x=-1$. Dalla terza si ha $16y^3+12y^2+23=0$ $y=y_1$. Dalla seconda $\lambda=1/(2y)=1/(2y_1)$, (P_5)

$(3x^2-3,2y+4y^2)\big|_{P_4}=(0,2y_0+4y_0^2)\neq(0,0)$ in quanto $y_0\sim1$. $(3x^2-3,2y+4y^2)\big|_{P_5}=(0,2y_1+4y_1^2)\neq(0,0)$, in quanto $y_1\sim-1.44$. Sono punti regolari

Ora identifichiamo la natura dei punti.

P_1. Tangenzialità. $(-3,0)\cdot(a,b)=0$ quindi $a=0$. Abbiamo
$$(0,b)\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=2b^2 \text{ minimo}$$
Per P_2 e P_3 è lo stesso in quanto $\lambda=0$.

P_4. Tangenzialità. $(0,2y_0+4y_0^2)\cdot(a,b)=0$ quindi $b=0$, in quanto $2y_0+4y_0^2\neq0$
$$(a,0)\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}-\frac{1}{2y_0}\begin{pmatrix}3&0\\0&2y_0+4y_0^2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=$$
$$=(a,0)\begin{pmatrix}-3/(2y_0)&0\\0&1-2y_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=\frac{-3a^2}{2y_0}\text{ massimo}$$

P_5. Tangenzialità. $(0, 2y_1 + 4y_1^2) \cdot (a, b) = 0$ quindi $b = 0$, in quanto $2y_1 + 4y_1^2 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&(a,0)\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2y_1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2y_1 + 4y_1^2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= (a,0)\begin{pmatrix} -3/(2y_1) & 0 \\ 0 & 1 - 2y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-3a^2}{2y_1} \text{ massimo}
\end{aligned}
$$