Ing. Elettronica& Internet, Informatica (frontale e online), A.A.2022–2023

Giornale delle lezioni e materiale svolto a lezione ma non presente sulle dispense

Gli esercizi per casa e non svolti a lezione iniziano con ♠ e finiscono con ♠♠

L'inizio di esercizi e/o argomenti svolti a lezione ma non presenti sulle dispense è contraddistinto con • e la fine con ••

Le dispense del Prof.Tauraso sono divise in 4 capitoli. Le pagine da studiare dopo ogni lezione si riferiscono al capitolo relativo

Le prime 6 ore circa di lezione non sono coperte dalle dispense di Tauraso. Il materiale verrà qui esposto

Lezione del 26/09/2022 Annullata per elezioni

Lezione 1 105 min. 1 del 27/09/2022 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Nozioni di topologia in $\mathbf{R}^n$. Distanza, sfera aperta, sfera chiusa, frontiera della sfera. Nozione di punti interni di un insieme e di punto isolato

Distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$ (o norma di $\underline{x} - \underline{x}'$)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i')^2\right)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \{\|\underline{x} - \underline{x}'\|,\ \text{dist}(\underline{x}, \underline{x}'),\ \rho(\underline{x}, x')\} \tag{1.1}$$

Se $n = 1$ si ottiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i')^2\right)^{1/2} = |x_1 - x_1'|$$

Se $n = 2$ si ottiene

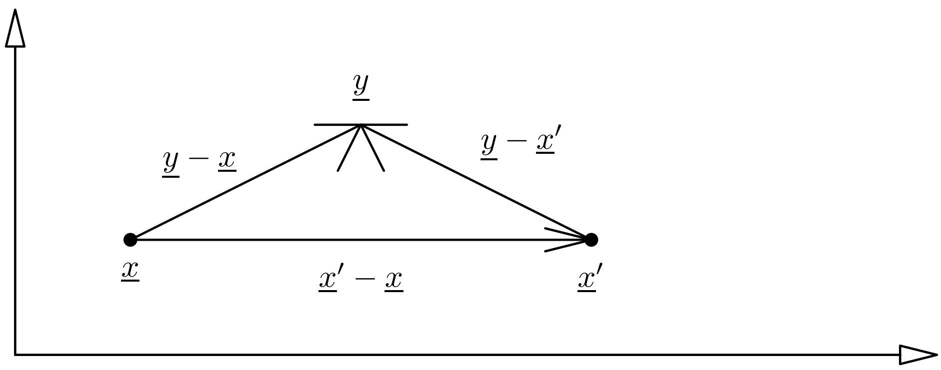
$$\big((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2\big)^{1/2}$$

che è l'usuale teorema di Pitagora imparato alle scuole medie.

La distanza fra due punti soddisfa

$$\begin{array}{ll} 1)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| \ge 0, & 2)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{x}' \\ 3)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| = \|\underline{x}' - \underline{x}\| & 4)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| \le \|\underline{x} - \underline{y}\| + \|\underline{y} - \underline{x}'\| \end{array}$$

La 4) è la disuguaglianza triangolare disegnata: in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due. L'uguaglianza si ha solo quando il triangolo degenera e i lati si allineano lungo un segmento.



Definizione Dato $\underline{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, e dato un numero reale positivo r, l'insieme

$$B_r(\underline{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\}$$

si dice *sfera aperta di centro* $\underline{x}_0$ *e raggio* r. A volte la parola “aperta” viene omessa.

L'insieme

$$\overline{B}_r(\underline{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \le r\}$$

si dice *sfera chiusa di centro* $\underline{x}_0$ *e raggio* r.

L'insieme

$$\partial B_r(\underline{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| = r\}$$

si dice *frontiera* di $B_r(\underline{x}_0)$

Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$. Un punto $\underline{x} \in E$ è detto *punto interno ad* E se

$$\exists\ r > 0 :\ B_r(\underline{x}) \subset E$$

♠ **Esercizio** La *sfera aperta* $B_r(\underline{\xi})$ è un insieme aperto ossia tutti i suoi punti sono interni. Infatti se $\underline{x} \in B_r(\underline{\xi})$ allora

$$\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^2\right)^{1/2} \doteq d < r$$

Consideriamo ora la sfera aperta $B_{r-d}(\underline{x})$ e quindi

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} < r - d$$

Sia $\underline{y} \in B_{r-d}(\underline{x})$. Abbiamo

$$\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

Eleviamo al quadrato

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 + 2\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i)$$

La disuguaglianza di Cauchy–Schwarz ci dà

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i) \le \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

per cui otteniamo

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 \le \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 +$$

$$+ 2\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = ((r-d)+d)^2 = r^2$$

♠♠

Definizione $\underline{y} \in E$ è *punto isolato* se

$$\exists\ r > 0: \ B_r(\underline{y}) \cap E \backslash \{\underline{y}\} = \emptyset$$

Definizione $\underline{y}$ *è punto di accumulazione per E (in simboli* $\underline{y} \in E'$*)* se

$$\forall\ r > 0 \ B_r(\underline{y}) \cap E \backslash \{\underline{y}\} \neq \emptyset$$

In altre parole parole, ogni sfera aperta contenente $\underline{y}$ deve contenere almeno un punto di E. In termini di successioni si traduce in

$$\exists\ \{\underline{x}_n\} : \ \underline{x}_n \in E, \ \underline{x}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underline{y} \ \wedge \ \forall\ m\ \exists\ n > m : \underline{x}_n \neq \underline{y}$$

Definizione *Se* $E \subset \mathbf{R}^n$, $E^c = \mathbf{R}^n \backslash E$ *è detto insieme complementare*

Definizione *La frontiera di E*, ∂E, *è definita come l'insieme dei punti (non necessariamente appartenenti a E) tali che qualunque sia la sfera aperta contenente il punto, tale sfera contiene sia punti di E che punti del complementare* E^c*.*

In formule

$$\underline{y} \in \partial E \text{ se } \forall\ r > 0 \ B_r(\underline{y}) \cap E \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(\underline{y}) \cap E^c \neq \emptyset$$

Definizione di limite per funzioni di più variabili

Definizione *Sia* $\underline{x}_0 \in E'$ *e* $l \in \mathbf{R}$*. Diremo che*

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \qquad (f(\underline{x}) \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}_0]{} l) \quad \text{se} \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \cap E \backslash \{\underline{x}_0\} \ \Rightarrow \ |f(\underline{x}) - l)| < \varepsilon$$

Per $l = +\infty$ si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty$ se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \cap E \backslash \{\underline{x}_0\} \ \Rightarrow \ f(\underline{x}) > M$

Per $l = -\infty$ si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = -\infty$ se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \cap E \backslash \{\underline{x}_0\} \ \Rightarrow \ f(\underline{x}) < M$

Sia $B \subset E$. $f|_B(\underline{x})$ è la funzione f ristretta all'insieme B e supponiamo che $\underline{x}_0 \in B'$. Vale il

Teorema

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \iff \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f|_C(\underline{x}) = l$$

per ogni restrizione $f|_C$ *tale che* $\underline{x}_0 \in C$*. Il valore* l *può essere finito oppure infinito*

Dimostrazione $\Longrightarrow$ L'ipotesi è $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ e sia $\underline{x}_0 \in C'$ con $C \subset A$. Dobbiamo far vedere che

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \cap C \backslash \{\underline{x}_0\} \implies |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$$

ma $\underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \cap C \backslash \{\underline{x}_0\} \subset \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \cap A \backslash \{\underline{x}_0\}$ quindi $|f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$ e quindi $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f|_C(\underline{x}) = l$.

$\Longleftarrow$ L'ipotesi (che chiamiamo Proposizione $\mathcal{P}$) è $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f|_C(\underline{x}) = l$ per ogni restrizione $f|_C$. Dobbiamo far vedere che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ (che chiamiamo Proposizione $\mathcal{Q}$). Quindi dobbiamo far vedere che $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ e invece noi dimostriamo che $\not{\mathcal{Q}} \implies \not{\mathcal{P}}$. Poiché $\mathcal{P}$ non può essere negata essendo l'ipotesi, segue che l'ipotesi $\not{\mathcal{Q}}$ è falsa.

$\not{\mathcal{Q}}$ vuol dire una delle due possibilità

1) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x})$ non esiste

2) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l' \neq l$

Cominciamo con 1).

Vuol dire che

$$\forall\ R\ \exists\ \varepsilon > 0\colon \forall\delta\ \exists\ \underline{x} \in B_\delta(\underline{x}_0) \cap A\backslash\{\underline{x}_0\}\colon |f(\underline{x}) - R| \geq \varepsilon$$

Prendiamo $R = l$ e una successione $\delta_n = 1/n$ la quale genera una successione di punti $\{\underline{x}_{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\underline{x}_n \in B_{\frac{1}{n}}(\underline{x}_0) \cap A\backslash\{\underline{x}_0\}$. Sia $C = \{\underline{x}_{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$. Chiaramente $\underline{x}_0 \in C'$ ed è evidente che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f|_C(\underline{x})$ non può essere uguale l il che è impossibile

Se ne conclude che era falsa quella parte dell'ipotesi $\not Q$ per cui $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ non esiste.

2) Supponiamo che esista $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l' \neq l$. Ma allora per la prima parte del teorema ($\Longrightarrow$) per ogni restrizione il limite deve essere l' e questo è impossibile.

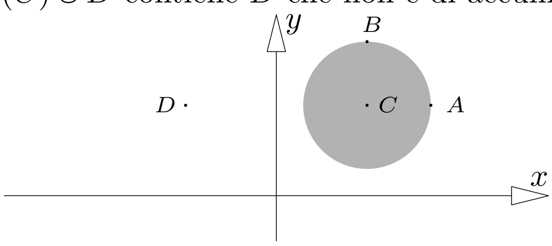
Quindi abbiamo mostrato che tanto 1) che 2) sono impossibili ossia $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ esiste ed è uguale a l.

Lezione 2 105 min. del 29/09/2022 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Definizione di insieme aperto, chiuso. Nozione di continuità di una funzione

Un esempio in $\mathbf{R}^2$. Il cerchio in figura è $B_r(C)$, $r = 0.7$, $C = (1, 1)$. I punti A e B sono sia di accumulazione che di frontiera ma non interni. Il punto C è di accumulazione e interno ma non di frontiera

La frontiera dell'insieme $B_r(C) \cup D$ contiene D che non è di accumulazione.



Esercizio

Dimostrare oppure fornire un controesempio a:

1) un punto interno è di accumulazione

2) un punto di accumulazione è interno

3) un punto di frontiera è interno

4) un punto di frontiera è di accumulazione

5) un punto di accumulazione o è interno o di frontiera

6) un punto di frontiera o è di accumulazione o è isolato

Esercizio Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R}\colon x = 1/n,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Trovare i seguenti insiemi A', $\overset{\circ}{A}$, ∂A, $A\backslash A'$, $\overline{A}$

Esercizio Sia dato l'insieme $I = (0, 1) \subset \mathbf{R}$. Trovare I', $\overset{\circ}{I}$, ∂I, $\overline{I}$, $I\backslash I'$, (che insieme è quest'ultimo?)

Esercizio Sia dato l'insieme $A = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, y = 0\}$. Trovare A', $\overset{\circ}{A}$, ∂A, $A \backslash A'$, $\overline{A}$

Esercizio Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : x = 1/n + 1/m,\ n = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots\}$. Trovare i seguenti insiemi A', $\overset{\circ}{A}$, ∂A, $A \backslash A'$, $\overline{A}$

Esercizio Sia dato l'insieme $A = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : z = x + y, x^2 + y^2 \leq 1 \ldots\}$. Trovare i seguenti insiemi A', $\overset{\circ}{A}$, ∂A, $A \backslash A'$, $\overline{A}$

Definizione di derivata parziale rispetto a x e y.

Definizione (derivata parziale) *Il limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(\underline{x}))$$

è la derivata parziale rispetto a x_j $1 \leq j \leq n$ della funzione calcolata nel punto $\underline{x}$. Una funzione è derivabile in $\underline{x}$ se ammette tutte le derivate parziali in $\underline{x}$

La derivata parziale j–esima può essere scritta anche come $\partial_j f(\underline{x})$, $\partial_{x_j} f(\underline{x})$, $f_{x_j}(\underline{x})$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x})$, $D_{\underline{e}_j} f(\underline{x})$. Il vettore applicato in $\underline{x}$ dato da tutte le n derivate parziali verrà scritto come $\underline{\partial} f(\underline{x})$ ed è detto *gradiente (in $\underline{x}$)* . Le derivate parziali sono un caso particolare delle *derivate direzionali*

Lezione 3 105 min. del 03/10/2022 Non presente sulle dispense di Tauraso fino agli integrali esclusi

Derivate direzionali, differenziabilità .

Definizione (derivata direzionale) *Dato il vettore $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tale che $v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2 = 1$. Il limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \ldots, x_n + v_n t) - f(\underline{x}))$$

dicesi derivata direzionale della funzione nel punto $\underline{x}$

Osservazioni i) Abbreviando si scrive $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(\underline{x} + t\underline{v}) - f(\underline{x}))$. La derivata direzionale in $\underline{x}$ (che si badi bene è un numero reale e non un vettore) si indica talvolta con $D_{\underline{v}} f(\underline{x})$. Con $\underline{v} = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ (1 al j-esimo posto) si ottiene f_{x_j}.
L'espressione $\underline{x} + t\underline{v}$ rappresenta l'equazione parametrica della retta passante per $\underline{x}$ ed avente direzione data da $\underline{v}$. Quindi, al variare di t,

$$f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \ldots, x_n + v_n t) \overset{\text{def}}{=} f(\underline{x} + t\underline{v})$$

è l'insieme dei valori delle ordinate della funzione quando ci si muove sulla retta in questione.

Definizione (differenziabilità) *Una funzione è differenziabile in $\underline{x}$ se è ivi derivabile e*

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial} f(\underline{x}) \cdot \underline{h})) = 0$$

Se una funzione è differenziabile in ogni punto del suo dominio si dice che è differenziabile

Esercizio Una funzione può essere derivabile ma non differenziabile in un punto. Sia data la funzione $\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

e lo stesso per f_y quindi $f(\underline{x})$ è derivabile nell'origine. Per essere differenziabile deve accadere che

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h})) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{f(\underline{0}+\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2} = 0$$

ma è impossibile; basta prendere la restrizione $h_1 = h_2$, $h_2 \to 0$.

Teorema (continuità delle funzioni differenziabili) *Se una funzione è differenziabile allora è continua*

Dimostrazione

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \underline{\partial} f(\underline{x}_0)\cdot\underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$$

La parte destra tende a zero quando $\underline{h}\to\underline{0}$ e quindi anche la parte sinistra che è la continuità

Teorema (del differenziale) *Se una funzione ha derivate parziali continue in un punto allora è differenziabile in quel punto*

Applicazione alla funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \underline{x}\neq\underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}$

Risposta ad una domanda posta da alcuni studenti

Alcuni studenti hanno chiesto se esiste una strategia per capire se una data funzione ammette limite e/o è continua in un determinato punto. Si possono dare delle linee guida.

1) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste e valga l. In tal caso non resta che dimostrarlo usando i vari teoremi sulla somma, prodotto, quoziente di funzioni. A volte bisogna maggiorare o minorare a seconda dei casi. È il caso della funzione $(x^2y)/(x^2+y^2)$

2) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste ma non si sa quanto valga. In tal caso si può prendere una particolare restrizione e calcolare il limite su tale restrizione, diciamo che valga l. A questo punto non resta che dimostrare che il limite è effettivamente l.

3) Ci si convince che il limite non esiste. In tal caso: o si si dimostra che il limite non esiste lungo una particolare restrizione della funzione o si trovano due restrizioni lungo le quali i limiti esistono ma sono diversi

Nel secondo caso rientra la funzione $(xy)/(x^2+y^2)$

• Verificare se esiste o meno $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ dove $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y-x} & \underline{x}\neq\underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}$

Il limite non esiste. Prendiamo la restrizione $y = x+\sqrt{x}$ ed otteniamo

$$f(x, x+\sqrt{x}) = \frac{x^2+x^2+2x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} \to 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x, x+x^3) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2+2x^4+x^3}{x^3} \nexists$$

e quindi il limite non esiste

Esercizio Sia data la funzione di una variabile: $f(x) = 0$ se $x\neq 0$, $f(0) = 1$. e si consideri la funzione di due variabili $g(x,y) = f(x)$. Dire in quali punti ammette limite.

Significato geometrico della nozione di gradiente

Sia fata $f\colon A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenziabile e $\underline{x}^0 \in \overset{\circ}{A}$.

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x}^0+\underline{h})-f(\underline{x}^0)-\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot \underline{h})=0$$

quindi $f(\underline{x}^0+\underline{h})=f(\underline{x}^0)+\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{h}+o(\|\underline{h}\|)$ Sia $\|\underline{v}\|=1$ da cui

$$f(\underline{x}^0+t\underline{v})-f(\underline{x}^0)=t\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v}+o(\|t\underline{v}\|) \iff \frac{\Delta f_{\underline{v}}}{t}\doteq\frac{1}{t}(f(\underline{x}^0+t\underline{v})-f(\underline{x}^0)=\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v}+o(1)$$

Ora prendiamo $\underline{w}=\underline{\partial} f(\underline{x}^0)/\|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|$ nell'ipotesi che $\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\neq\underline{0}$.

$$\frac{\Delta f_{\underline{w}}}{t}\doteq\frac{1}{t}(f(\underline{x}^0+t\underline{w})-f(\underline{x}^0)=\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{w}+o(1)=\|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|+o(1)$$

e da Cauchy–Schwarz sappiamo che $|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v}|\le\|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|\|\underline{v}\|=\|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|$. L'uguaglianza si ha solo nel caso $\underline{v}=\underline{w}$.

$$\frac{\Delta f_{\underline{w}}}{t}-\frac{\Delta f_{\underline{v}}}{t}=\|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|-\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v}+o(1)>0$$

per ogni $t>0$ e sufficientemente piccolo. Se ne conclude che la direzione data dal gradiente è quella di massima crescita o decrescita se $t<0$ della funzione.

Tranne alcuni esercizi d'ora in poi il materiale sarà preso dalle dispense di Tauraso

Integrali multipli

Pag. 1,2,3,4,5,6.

Di pag.5 solo il teorema 1 con le parole "normale rispetto ad almeno uno degli assi" al posto di "misurabile"

Lezione 4 105 min. del 04/10/2022

Esercizi sugli integrali multipli. Teorema 5 pag.13 (sostituire "normale rispetto ad almeno uno degli assi" a "misurabile")

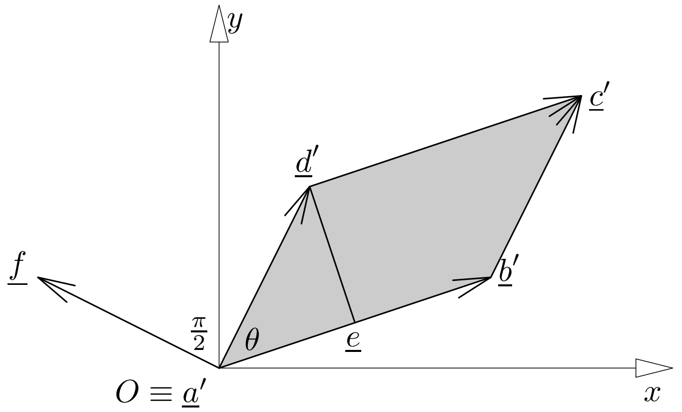
• *"Spiegazione" della comparsa del determinante della matrice iacobiana nel cambio di variabili.* Supponiamo di voler eseguire il cambio di coordinate (ricordo che $\underline{x}=(x,y)$, $\underline{u}=(u,v)$,) $\underline{x}\doteq\underline{\varphi}(\underline{u})=(\alpha(\underline{u}),\beta(\underline{u}))$. Prendiamo nel piano (u,v) il rettangolo di vertici $\underline{a}=(u_0,v_0)$, $\underline{b}=(u_1,v_0)$, $\underline{c}=(u_1,v_1)$, $\underline{d}=(u_0,v_1)$. La trasformazione manda i quattro punti in

$$\underline{a}'=\underline{\varphi}(u_0,v_0),\quad \underline{b}'=\underline{\varphi}(u_1,v_0),\quad \underline{c}'=\underline{\varphi}(u_1,v_1),\quad \underline{d}'=\underline{\varphi}(u_0,v_1)$$

ed i vettori $\underline{b}-\underline{a}$, $\underline{d}-\underline{a}$ diventano per il teorema di Lagrange

$$\underline{b}'-\underline{a}'=\underline{\varphi}(u_1,v_0)-\underline{\varphi}(u_0,v_0)=\Big(\underline{\varphi}_u(\xi,v_0)\Big)\cdot(u_1-u_0),\qquad u_0\le\xi\le u_1$$

$$\underline{d}'-\underline{a}'=\underline{\varphi}(u_0,v_1)-\underline{\varphi}(u_0,v_0)=\Big(\underline{\varphi}_v(u_0,\eta)\Big)\cdot(v_1-v_0),\qquad v_0\le\eta\le v_1$$



$\underline{f} - \underline{a}'$ è ortogonale a $\underline{d}' - \underline{a}'$ e quindi, se quest'ultimo ha coordinate

$$((\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0), (\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0))$$

$\underline{f} - \underline{a}'$ ha coordinate (oppure l'opposto ma a noi serve il modulo)

$$(-(\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0), (\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0))$$

L'area è data da

$$|\underline{b}'-\underline{a}'|\cdot|\underline{e}-\underline{d}'| = |\underline{b}'-\underline{a}'|\cdot|\underline{d}'-\underline{a}'|\cdot|\sin\theta| = |\underline{b}'-\underline{a}'|\cdot|\underline{d}'-\underline{a}'|\cdot|\cos(\theta+\frac{\pi}{2})| =$$
$$= \underbrace{|(\underline{b}'-\underline{a}', \underline{f}-\underline{a}')|}_{prodotto\ scalare} =$$
$$= |-(\varphi_1)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0)(\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0) + (\varphi_2)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0)(\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0)| =$$
$$= |Det(M)|$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0) & (\varphi_1)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0) & (\varphi_2)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,\eta) & (\varphi_1)_u(\xi,v_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,\eta) & (\varphi_2)_u(\xi,v_0) \end{pmatrix}(u_1-u_0)(v_1-v_0)$$

Nell'integrale $u_1 \to u_0$, $v_1 \to v_0$ e $u_1 - u_0$ diventa dx, $v_1 - v_0$ diventa dv. Per il teorema del confronto (Carabinieri) $\xi \to u_0$, $\eta \to v_0$ e quindi

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,\eta) & (\varphi_1)_u(\xi,v_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,\eta) & (\varphi_2)_u(\xi,v_0) \end{pmatrix}(u_1-u_0)(v_1-v_0) \to \begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,v_0) & (\varphi_1)_u(u_0,v_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,v_0) & (\varphi_2)_u(u_0,v_0) \end{pmatrix} du\,dv$$

ed ecco spiegato il ruolo della matrice Jacobiana.

Esercizi

Calcolare $\displaystyle\iint_D |y-x^2|dx\,dy$ dove D è nell'ordine: • i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.12/5]** •• ♠ ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.41/30]** iii) L'insieme defnito da $x^2 \le |y| \le 1$. **[R.8/5]** ♠♠

Calcolare $\displaystyle\iint_D |\,x|y| - x^2|dx\,dy$ dove D è il quadrato di centro l'origine e lato lungo 2. **[R.3/2]**

Svolgimento La funzione integranda **e** il dominio di integrazione sono simmetrici rispetto allo scambio $(x,y) \to (x,-y)$ quindi integriamo per $y \ge 0$ e poi moltiplichiamo per 2. Il calcolo è

$$\int_0^1 dx \int_0^x dyx(-y+x) + \int_0^1 dx \int_x^1 dyx(y-x) + \int_{-1}^0 dx \int_0^1 dy(-x)(y-x) = \frac{3}{4}$$

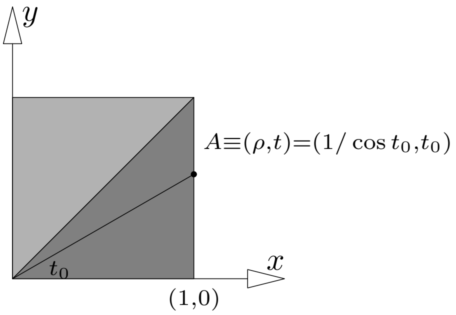
♠ Calcolare $\displaystyle\iint_D |y-x^3|dx\,dy$ dove D è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.16/7]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.8/7]** iii) L'insieme defnito da $x^2 \le |y| \le 1$. **[R.8/5]**

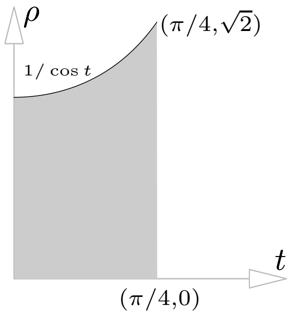
Calcolare il volume del seguente insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon 0 \le z \le r - \sqrt{x^2+y^2}\}$ (cono) **R.**$\pi r^3/3$ ♠♠

Degli esercizi di Tauraso sugli integrali multipli, fare tutti quelli dal num.1 al num.9

Lezione 5 105 min. del 06/10/2022

• Calcolare l'area del quadrato usando coordinate polari.





L'area è due volte l'area della metà inferiore.

$$\iint_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2:x\in[0,1],\ 0\le y\le x\}} dxdy = \iint_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2:t\in[0,\pi/4],\ 0\le\rho\le 1/\cos t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano} d\rho\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1/\cos t} \rho\, d\rho\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\cos t}}\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'area è due volte la quantità trovata. ••

Esempio 6 pag.15, esemppio 7 pag.16

• Calcolare il volume dell'insieme in $\mathbf{R}^3$ definito da $x^2+y^2 \le z \le 1+x+y$. **R.**$9\pi/4$

Svolgimento Integriamo per fili. Avendo in mente la figura di pag.20 delle dispense di Tauraso, dobbiamo trovare l'insieme D' e per farlo intersechiamo il paraboloide e il piano ottenendo $(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}$. L'insieme D' è quindi $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{3}{2}\right\}$. $\varphi_1(x,y) = x^2+y^2$ e $\varphi_2(x,y) = 1+x+y$. Integrando “per fili” l'integrale è pertanto

$$\iint_{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}} (1+x+y-x^2-y^2)dx$$

Passiamo a coordinate polari nel piano centrate in $(1/2,1/2)$, $x = 1/2+\sqrt{3/2}r\cos t$, $y = 1/2+\sqrt{3/2}r\sin t$, e l'integrale diventa

$$\int_0^1 dr\, r\int_0^{2\pi} (1+\frac{1}{2}+\frac{3r^2}{2}) = \frac{9\pi}{4}$$

••

♠ Calcolare il volume che soddisfa le relazioni $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1+x+y$ ♠♠

Lezione 6 105 min. del 10/10/2022

Coordinate polari sferiche

• Sia dato il volume $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ avente densità di massa costante δ. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Sia $\underline{y}_0 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto $\underline{y}_0$ stia sull'asse z ossia abbia coordinate $(0, 0, \zeta)$. Il potenziale generato da V in $\underline{y}_0$ è (G è la costante gravitazionale) $I = \iiint_V \dfrac{-\delta G dxdydz}{dist(\underline{x}, \underline{y}_0)}$. L'integrale diventa

$$-\delta G \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^r d\rho \frac{\rho^2 \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}} = \frac{-2\pi\delta G}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(|\rho + \zeta| - |\rho - \zeta|).$$

Si è usato il fatto che

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\rho\zeta}\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}\right) = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}}$$

Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta > r$ e $\zeta \le r$.

Primo caso. Sia $\zeta > r$. L'integrale è

$$\frac{-2\pi\delta G}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) = \frac{-2\pi\delta G}{\zeta} \int_0^r d\rho 2\rho^2 = \frac{-4\pi}{3}\delta G \frac{r^3}{\zeta} = \frac{-MG}{\zeta}$$

Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso. Se $r > \zeta > 0$ otteniamo invece

$$\frac{-2\pi\delta G}{\zeta}\left(\int_0^\zeta d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) + \int_\zeta^r \rho(\rho + \zeta - (\rho - \zeta))d\rho\right) = 2\pi\delta G(\frac{1}{3}\zeta^2 - r^2) = \frac{MG}{r^3}(\frac{\zeta^2}{2} - \frac{3}{2}r^2)$$

e si può notare che per $\zeta = r$ le due formule coincidono. Si può notare anche che nel secondo caso il potenziale è armonico quindi generante oscillazioni. Se ipoteticamente praticassimo un tunnel che corre dal polo nord al polo sud e facessimo cadere un punto materiale, questi oscillerebbe continuamente fra i due poli ••

coordinate cilindriche

• Calcolare il volume della regione definita da $\{x^2 + y^2 + z^2 \le 2z, z \le 2(x^2 + y^2)\}$ usando coordinate cilindriche

Calcolo del volume definito da $\{x, y \ge 0, x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le xy\}$ usando coordinate cilindriche ••

volumi dei solidi di rotazione

• Volumi di rotazione. Nel piano (z, y) si abbia un insieme chiuso e limitato (ad esempio un poligono) che non intersechi né l'asse z né l'asse y (oppure intersechi almeno uno degli assi in un insiene avente area nulla) e lo si ruoti intorno all'asse z di α radianti. Il volume della regione ottenuta è

$$\alpha \iint_D y\, dy\, dz$$

Se invece ruotiamo intorno all'asse y abbiamo

$$\alpha \iint_D z\, dy\, dz$$

Ragionamento intuitivo Sia $C_{y,z}$ la circonferenza ottenuta a partire da (y, z) e ruotando di 360 gradi intorno a z. Possiamo pensare che il volume di rotazione sia $\bigcup_{y,z \in D} C_{y,z}$. Un facile disegno mostra che se $(y', z') \neq (y, z)$ allora $C_{y',z'} \cap C_{y,z} = \emptyset$. Per il calcolo del volume dovrei "sommare" la lunghezza di tutte le circonferenze $C_{y,z}$ al variare di (y, z) in D. Ciascuna circonferenza è lunga $2\pi y$ e la "somma" è $\displaystyle\iint_D 2\pi y \, dy \, dz$ appunto.

Se la rotazione avviene intorno all'asse y, allora il volume è

$$2\pi \iint_D z \, dy \, dz$$

Dimostrazione rigorosa nel caso della rotazione intorno all'asse z. Siano (u, v) le coordinate dell'insieme D. Le coordinate (x, y, z) sono $x = u \cos t$, $y = u \sin t$, $z = v$ e l'insieme è

$$V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon (u, v) \in D, x = u \cos t, y = u \sin t, z = v, 0 \leq t \leq \alpha\}$$

e l'integrale è

$$|V| = \iiint_V dx \, dy \, dz = \int_0^\alpha dt \iint_D \underbrace{u}_{iacobiano} du \, dv = \alpha \iint_D u \, du \, dv$$

Calcolo del volume $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \leq 2(x^2 + y^2)\}$ usando la formula dei solidi di rotazione••

Lezione 7 105 min. del 11/10/2022

Teorema 3 pag.5. Integrazione per sezioni pag.21 e applicazione al calcolo del volume della sfera.

• **Superfici** Sia $\underline{\varphi} \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ (ci limitiamo a superfici che dipendono da due parametri ed il cui grafico è contenuto in $\mathbf{R}^3$.)

Definizione *Sia $D = \overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$ un insieme in $\mathbf{R}^2$ e sia $\underline{\varphi}$ una applicazione da D a valori in $\mathbf{R}^3$. $\underline{\varphi} \overset{\text{def}}{=} (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))$ con le seguenti condizioni: i) $\alpha, \beta, \gamma, \in C^1(D; \mathbf{R})$ ii) il rango della matrice $J = \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}$ è due iii) $(u, v) \neq (u', v')$ implica $\underline{\varphi}(u, v) \neq \underline{\varphi}(u', v')$ per ogni $(u, v), (u', v') \in D$;*

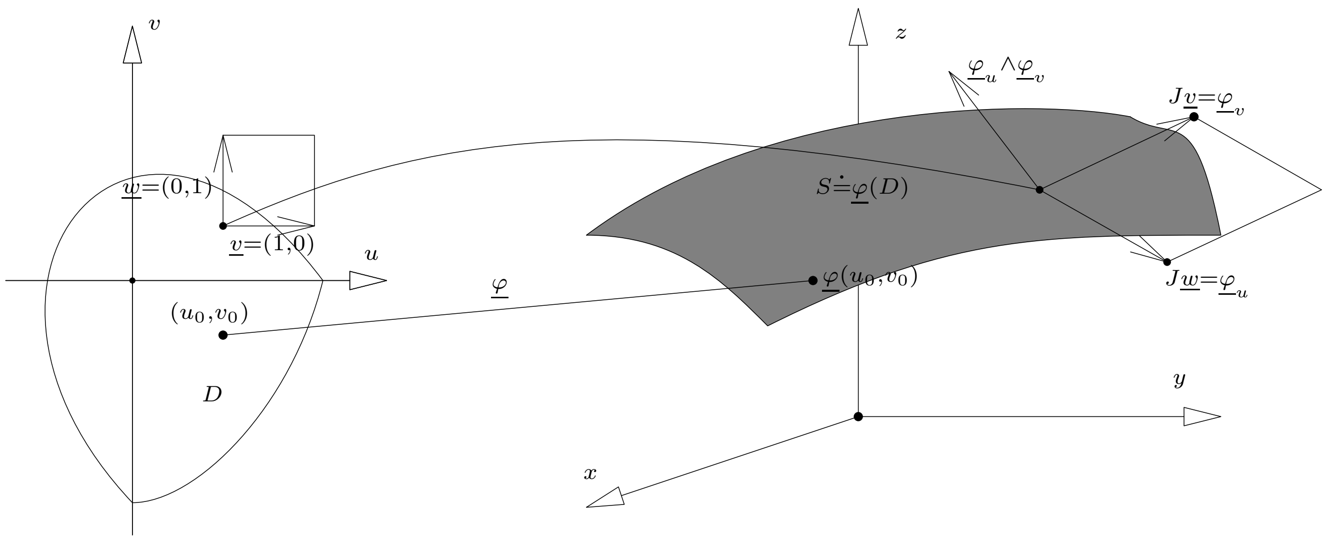
La *ii)* è equivalente a dire che la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine due è non nulla ossia

$$\sqrt{\left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|^2} \neq 0$$

La superficie descritta è detta *regolare.*

Sia $I_1 = \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}\right|$, $I_2 = \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|$, $I_3 = \left|\begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|$

Osservazion1 La matrice J definisce un operatore lineare che manda vettori a due componenti in vettori a tre componenti. Il rango pari a due garantisce che due vettori linearmente indipendenti vengono mandati in due vettori linearmente indipendenti.



La matrice J applicata al vettore $(1,0)$ produce il vettore $\underline{\varphi}_u \doteq (\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ mentre applicata al vettore $(0,1)$ produce $\underline{\varphi}_v \doteq (\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$

$$\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_u & \beta_u & \gamma_u \\ \alpha_v & \beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \underline{i}(\beta_u\gamma_v - \beta_v\gamma_u) - \underline{j}(\alpha_u\gamma_v - \gamma_u\alpha_v) + \underline{k}(\alpha_u\beta_v - \beta_u\alpha_v)$$

per cui il modulo delle componenti del prodotto vettoriale corrispondono a (I_1, I_2, I_3). Il rettangolo definito dai vettori $\underline{\varphi}_u$ e $\underline{\varphi}_v$ giace sul piano tangente alla superficie e la sua area è pari a $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$. L'equazione del piano tangente a (x_0, y_0, z_0) è data da $(\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot (\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v)(u_0, v_0) = 0$ dove $\underline{x}_0 = \underline{\varphi}(u_0, v_0)$.

I vettori tangenti in un qualsiasi punto $\underline{\varphi}(u_0, v_0)$ sono combinazione lineare dei due vettori $\underline{\varphi}_u(u_0, v_0)$ e $\underline{\varphi}_v(u_0, v_0)$. Infatti prendiamo una curva giacente su $\underline{\varphi}(D)$ ossia $\big(\alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \gamma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\big) \doteq \underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t))$ dove $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ è una curva tale che $\underline{\gamma}(t_0) = (u_0, v_0)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t)) &= \Big(\alpha_u\gamma_1' + \alpha_v\gamma_2', \beta_u\gamma_1' + \beta_v\gamma_2', \gamma_u\gamma_1' + \gamma_v\gamma_2'\Big) = \\ &= \gamma_1'(\alpha_u\underline{i} + \beta_u\underline{j} + \gamma_u\underline{k}) + \gamma_2'(\alpha_v\underline{i} + \beta_v\underline{j} + \gamma_v\underline{k}) \end{aligned}$$

Definizione *Si definisce area della superficie l'integrale doppio* $\displaystyle\iint_D dudv \underbrace{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}_{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$ ed a volte lo si indica con $\displaystyle\iint_S d\sigma$ dove S è il grafico della superficie in questione.

Se abbiamo una funzione $f(x,y,z)$ possiamo definire
l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S f(\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v))d\sigma$

Si possono risolvere gli esercizi di Tauraso fino a pag.12.

• Nozione di *superficie cartesiana* ossia il grafico della superficie $z = f(x,y)$ $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. In tal caso la parametrizzazione è del tutto ovvia, $x = \alpha(u,v) = u$, $y = \beta(u,v) = v$, $z = \gamma(u,v) = f(u,v)$. In forma vettoriale si ha $u\underline{i} + v\underline{j} + f(u,v)\underline{k}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$; $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} =$

$\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$. Se $f(x,y)\in C^1(D)$ allora la superficie cartesiana soddisfa tutte le tre condizioni $i), ii)$ e $iii)$. Infatti la $i)$ è chiaramente verificata. Per la $ii)$ basta verificare ad esempio che la matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inoltre la $iii)$ è verificata sempre grazie al fatto che sia la prima che la seconda componente della superficie è data da funzioni iniettive.

Calcolo dell'area della superficie definita da $z=R-\sqrt{x^2+y^2}$, $z\geq 0$.

Calcolo dell'area della superficie definita da $z=x^2+y^2$, $z\leq 2$.

Calcolo dell'area della sfera di raggio R. ••

• Vediamo cosa ci dà l'equazione del piano tangente $(\underline{x}-\underline{x}_0)\cdot(\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v)(u_0,v_0)=0$ nel caso del cilindro $x^2+y^2=1$ la cui parametrizzazione è $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=u$, $0\leq t\leq 2\pi$ $\underline{\varphi}_t\wedge\underline{\varphi}_u = \cos t\ \subset\ i+\sin t\underline{j}$ e $\underline{x}_0=(\cos t_0,\sin t_0,u_0)$. $(\underline{x}-\underline{x}_0)\cdot(\underline{\varphi}_t\wedge\underline{\varphi}_u)(t_0,u_0)=(x-\cos t_0)\cos t_0+(y-\sin t_0)\sin t_0=0$ quindi $x\cos t_0+y\sin t_0=1$ da cui $xx_0+yy_0=1$ e per ogni (x_0,y_0) è un piano tangente parallelo all'asse z.

Stessa cosa con la sfera. $x=\sin t\cos\tau$, $y=\sin t\sin\tau$, $z=\cos t$. $\underline{\varphi}_t\wedge\underline{\varphi}_\tau=\sin^2 t\cos\tau\underline{i}+\sin^2 t\sin\tau\underline{j}+\cos t\sin t\underline{k}$.

$$
\begin{aligned}
&(\underline{x}-\underline{x}_0)\cdot(\underline{\varphi}_t\wedge\underline{\varphi}_\tau)(t_0,\tau_0)=\\
&=\sin^2 t_0\cos\tau_0(x-\sin t_0\cos\tau_0)+\sin^2 t_0\sin\tau_0(y-\sin t_0\sin\tau_0)+\sin\tau_0\cos\tau_0(x-\cos\tau_0)=\\
&=x\sin^2 t_0\cos\tau_0+y\sin^2 t_0\sin\tau_0-\sin^3 t_0\cos^2\tau_0-\sin^3 t_0\sin^2\tau_0-\cos^2 t_0\sin t_0=\\
&=\sin t_0(xx_0+yy_0+zz_0)=\sin t_0 \implies (xx_0+yy_0+zz_0)=1, \quad t_0\neq 0,\pi
\end{aligned}
$$

Da ultimo una superficie cartesiana. $x=u$, $y=v$, $z=f(u,v)$ $\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v=-f_u\underline{i}-f_v\underline{j}+\underline{k}$ e quindi

$$(\underline{x}-\underline{x}_0)\cdot(\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v)(u_0,v_0)=-(x-x_0)f_u(x_0,y_0)-(y-y_0)f_v(u_0,v_0)+(z-z_0)=0$$

formula ben nota. ••

Lezione 8 105 min. del 13/10/2022

Generalità sulle curve. Integrali curvilinei di prima specie.

Lezione 9 105 min. del 17/10/2022

Integrali curvilinei di seconda specie. Forme differenziali.

Lezione 10 105 min. del 18/10/2022

Forme chiuse; forme chiuse su semplicemente connessi; Esercizi su;

Lemma di Gauss-Green (solo enunciato senza esercizi)

Lezione 11 105 min. del 20/10/2022

Esercizi sulle forme differenziali e sul Lemma di Gauss-Green. Area dell cardioide $x^2+y^2\leq x+\sqrt{x^2+y^2}$ e della Lemniscata di Bernoulli $(x^2+y^2)^2\leq x^2-y^2$. Prime nozioni sulle serie.

16:00–17:15 Ricevimento

Lezione 12 105 min. del 24/10/2022

Serie a termini di segno costante (definitivamente). Criterio del confronto. Serie a termini di segno alterno e con termine generale monotòno; serie assolutamente convergenti. Serie geometrica.

Da qui fino al 28/11 il programma riguarda solo gli studenti di Informatica

Serie di potenze nel campo complesso. Nozione di funzione complessa e primi esempi

Lezione 13 105 min. del 25/10/2022

Funzioni complesse. continuità e derivazione di funzioni complesse; Significato di integrale nei complessi e qualche esempio

Lezione 14 105 min. del 27/10/2022

Formula di Cauchy, serie di Taylor, serie di potenze, esempi

Lezione del 31/10/2022 (annullata)

Lezione 15 105 min. del 03/11/2022

Serie di Laurent, Teorema dei residui

16:00–16:50 Ricevimento

Lezione 16 105 min. del 04/11/2022 registrata a casa in sostituzione di quella del 31/10/2022

Integrali reali risolti coi numeri complessi

Esercizi

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2-x)^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2+x)^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(1+x^2+x)^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(1+x^2-x)^2}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)dx}{x^2+b^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos(ax)dx}{(x^2+b^2)^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(ax)dx}{(x^2+b^2)^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2(ax)dx}{x^2+b^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)dx}{x^2+bx+b^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ax)dx}{x^2+bx+b^2}$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1+p^2-2p\cos\vartheta}$ con $|p|<1$ e $|p|>1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{1+p^2-2p\cos\vartheta}$ con $|p|<1$ e $|p|>1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{1+p^2-2p\cos\vartheta}$ con $|p|<1$ e $|p|>1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\vartheta)d\vartheta}{1+p^2-2p\cos\vartheta}$ con $|p|<1$ e $|p|>1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2\vartheta)d\vartheta}{1+p^2-2p\cos\vartheta}$ con $|p|<1$ e $|p|>1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{a+b\cos\vartheta}$ con $a>b>0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{a+b\sin\vartheta}$ con $a>b>0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{(a+b\cos\vartheta)^2}$ con $a>b>0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{(a+b\sin\vartheta)^2}$ con $a>b>0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{a+b\cos\vartheta}$ con $a>b>0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{(a+b\cos\vartheta)^2}$ con $a>b>0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\cos\vartheta}\cos(n\vartheta-\sin\vartheta)d\vartheta$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\cos\vartheta}\sin(n\vartheta-\sin\vartheta)d\vartheta$,

Lezione 17 105 min. del 07/11/2022

Esercizi calcolo integrali complessi; prime nozioni sulla Trasformata di Laplace.

Ripercorrendo il calcolo dell'integrale $I \doteq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)dx}{x^2+b^2}$ eseguito alla fine della lezione del 4/11/2022 si arriva a

$$\mathrm{Im}\left(2\pi i \mathrm{Res}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=ib}\right) = \mathrm{Im}\left(2\pi i\frac{ibe^{-ab}}{2ib}\right) = \pi e^{-ab}$$

mentre ad inizio della lezione di oggi ho detto che il risultato era $\dfrac{\pi e^{-a}}{b}$. All fine della lezione del 4/11/2022 ho calcolato I ma poi ho preso erroneamente $b=1$ ottenendo πe^{-a} (il risultato corretto nel caso $b=1$ e in ogni caso, sostituendo $y = xb$, $b>0$, l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx$ diventa $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\sin(aby)}{y^2+1}dy = \pi e^{-ab}$)

Poi ho fatto notare come $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{\pi e^{-a}}{b} = 0$ anche se il limite è eseguito sulla formula sbagliata. Il limite sulla formula corretta è zero lo stesso $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\pi e^{-ab} = 0$ purché $a\neq 0$ e questo non sorprende in quanto la funzione integranda tende a zero per $b\to+\infty$. Quello che potrebbe sorprendere è il fatto che se $b\neq 0$ $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\pi e^{-ab} = 0$ dal momento che $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}$ non esiste a patto che $x\neq 0$ ma x assume infiniti valori. Allora ho introdotto l'integrale $J(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin^2(ax)dx}{x^2+b^2}$ (come integrale di Cauchy o del valor principale) pensando che $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} J(a,b)\neq 0$. In altre parole volevo far vedere che quando $a\to+\infty$, $\sin(ax)$ "media a zero" ma $\sin^2(ax)$ no. Purtroppo

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\sin^2(ax)dx}{x^2+b^2} = 0$$

dal momento che $\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{x\sin^2(ax)dx}{x^2+b^2} = 0$ (funzione integranda dispari) e quindi $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} J(a,b) = 0$.

Modifichiamo allora il tutto prendendo

$$I_1 \doteq \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(ax)dx}{x^2+bx+b^2} = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}dx}{x^2+bx+b^2}$$

Come al solito passiamo alla funzione complessa $f(z) = \dfrac{ze^{iaz}}{z^2+bz+b^2}$. $z^2+bz+b^2=0$ per $z = \dfrac{b}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$. Detta z_1 la soluzione nel semipiano superiore ($a>0$) otteniamo

$$I_1 = \mathrm{Im}\left(2\pi i\mathrm{Res}\frac{ze^{iaz}}{z^2+bz+b^2}\Big|_{z=z_1}\right) = \mathrm{Im}\left(2\pi i\frac{z_1e^{iaz_1}}{2z_1+b}\right) = \mathrm{Im}\left(2\pi i\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\frac{e^{ia(\frac{b}{2}(-1+i\sqrt{3}))}}{i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-ab\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\frac{ab}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{ab}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-ab\sqrt{3}}{2}}\sin\left(\frac{ab}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow[b\neq 0, a\to+\infty]{} 0$$

Facciamo vedere ora che

$$\lim_{a\to+\infty} I_2(a,b) = \lim_{a\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin^2(ax)dx}{x^2+bx+b^2} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-x\cos(2ax)}{x^2+bx+b^2}dx \underbrace{=}_{integrale\ di\ Cauchy}$$

$$= \lim_{a\to 0}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{x-x\cos(2ax)}{x^2+bx+b^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{xdx}{x^2+bx+b^2}dx+$$
$$-\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(2ax)}{x^2+bx+b^2}dx \neq 0$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{xdx}{x^2+bx+b^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{(2x+b)dx}{x^2+bx+b^2}dx - \frac{b}{2}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+bx+b^2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{R^2+Rb+b^2}{R^2-Rb+b^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x}{\sqrt{3}b}+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big|_{-R}^{R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(\frac{-\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{-\pi}{\sqrt{3}}$$

Ora calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(2ax)}{x^2+bx+b^2}dx =$$
$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i\mathrm{Res}\frac{ze^{i2az}}{z^2+bz+b^2}\Big|_{z=z_1}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i\frac{z_1e^{i2az_1}}{2z_1+b}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\frac{e^{ia(\frac{b}{2}(-1+i\sqrt{3}))}}{i\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-ab\sqrt{3}}{2}}\Big(-\cos\frac{ab}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{ab}{2}\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-ab\sqrt{3}}{2}}\sin\Big(\frac{ab}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)\xrightarrow[b\neq 0,a\to+\infty]{}0$$

Ho quindi dimostrato che $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a,b) = \dfrac{-\pi}{\sqrt{3}} \neq 0$

È da notare inoltre che $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin(ax)}{x^2+1}dx = \lim\limits_{a\to 0}\pi e^{-a} = \pi$ e quindi $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin(ax)}{x^2+1}dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{x\sin(ax)}{x^2+1}dx = 0.$

Lezione 18 105 min. del 08/11/2022

Trasformata di Laplace. Proprietà ed esempi

Lezione 19 105 min. del 10/11/2022

Trasformata di Laplace, esempi. Prodotto di convoluzione e relativa trasformata di Laplace. Antitrasformata di Laplace

Lezione 20 105 min. del 14/11/2022

Trasformata di Laplace, esercizi. Delta di Dirac. Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie e premesse della equazione di D'Alembert

Lezione 21 105 min. del 15/11/2022

Trasformata di Laplace, esercizi su Equazione di D'Alembert

Esercizi

♠ a) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p)\stackrel{\rm def}{=}\mathcal{L}(u(x,t))$. La variabile x fa da "spettatore" e non viene coinvolta nella trasformata di Laplace.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = p\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p),$$
$$\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p) - pu_t(x,0) = p^2v(x,p)$$

$\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\rm def}{=}v(0,p) = Be^{-pT}$ per cui rispetto a $v(x,p)$ l'equazione differenziale alle derivate parziali diventa l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} a^2v'' - p^2v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$$

e la soluzione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta = Be^{-pT}$ e quindi la soluzione è $v(x,p) = Be^{-pT-\frac{xp}{a}}$. Quindi otteniamo $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = B\delta(t-T-\dfrac{x}{a})$ che rappresenta un impulso (è chiaramente una approssimazione) viaggiante verso destra con velocità a. Dopo il passaggio dell'impulso il punto torna nello stato di quiete.

La soluzione del sistema $\begin{cases} a^2v'' - p^2v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ può ricercarsi anche attraverso l'uso della trasformata di Laplace. Va osservato però che l'equazione è del secondo ordine ma disponiamo solo della condizione iniziale su $v(0,p)$. La condizione su $v_x(0,p)$ la lasciamo indicata e ce la "giochiamo" al momento giusto. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p)\stackrel{\rm def}{=}h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore"). $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2h(s,p) - sBe^{-pT} - v_x(0,p)$ per cui l'equazione ordinaria diventa

$$a^2s^2h(s,p) - sa^2Be^{-pT} - a^2v_x(0,p) - p^2h(s,p) = 0 \implies h(s,p) = \frac{sa^2Be^{-pT} + a^2v_x(0,p)}{a^2s^2 - p^2}$$

Facendo l'antitrasformata di Laplace si ottiene

$$v(x,p) = v.p.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} e^{sx}h(s,p)ds = \frac{B}{2}e^{-pT}(e^{\frac{p}{a}x} + e^{-\frac{p}{a}x}) + \frac{v_x(0,p)a}{2p}\big(e^{\frac{p}{a}x} - e^{-\frac{p}{a}x}\big)$$

Poiché vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione $|u(x,t)| \leq Me^{M't}$ per ogni $x > 0$, con costanti M ed M' positive si deve avere $\dfrac{B}{2}e^{-pT}e^{\frac{p}{a}x} + \dfrac{v_x(0,p)a}{2p}e^{\frac{p}{a}x} = 0$ da cui $v_x(0,p) = -\dfrac{Bp}{a}e^{-pT}$ e quindi $v(x,p) = Be^{-pT-\frac{p}{a}x}$

b) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u(0,t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p) - u_t(x,0) = p^2v(x,p) - A\omega$. $\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\rm def}{=}v(0,p) = \mathcal{L}(A\sin(\omega t)) = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$$\begin{cases} p^2v(x,p) - A\omega = a^2v'' \\ v(0,p) = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$$

La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi

$\alpha=0$. La condizione iniziale impone $\beta=\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\dfrac{A\omega}{p^2}$. $v(x,p)=(\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\dfrac{A\omega}{p^2})e^{-\frac{px}{a}}+\dfrac{A\omega}{p^2}$.
$u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=AH(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\omega(t-\frac{x}{a})\big]+A\omega t$
Controlliamo che le condizioni iniziali sono verificate dalla soluzione.
$u(x,0)=AH(-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(-\frac{x}{a})-\omega(-\frac{x}{a})\big]=0$ in quanto $H(-\frac{x}{a})=0$ essendo $x>0$ e $a>0$.
$u_t(x,0)=A\delta(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\omega(t-\frac{x}{a})\big]+AH(-\frac{x}{a})\big[\omega\cos\omega(t-\frac{x}{a})-\omega\big]+A\omega=A\omega$ in quanto il primo pezzo si annulla per ogni valore di t il secondo pezzo è nullo per le stesse ragioni di prima.
$u(0,t)=AH(t)\big[\sin\omega t-\omega t\big]+A\omega t=AH(t)\sin\omega t=A\sin(\omega t)$

c) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0,t>0,a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=A\omega,\ u_x(0,t)=B\sin(\omega t)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-u_t(x,0)=p^2v(x,p)-A\omega$. $\mathcal{L}(u_x(0,t))\stackrel{\text{def}}{=}v_x(0,p)=\mathcal{L}(B\sin(\omega t))=\dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è
$\begin{cases} p^2v(x,p)-A\omega=a^2v'' \\ v_x(0,p)=\dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2},\end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. Di conseguenza si ha $v(x,p)=\dfrac{A\omega}{p^2}-\dfrac{B\omega a}{p(p^2+\omega^2)}e^{-x\frac{p}{a}}$ da cui $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=A\omega t-H(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})$
Verifichiamo le condizioni iniziali:
$u(x,0)=H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1+\cos\omega(-\frac{x}{a})=0$
$u_t(x,0)=A\omega-\delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a}))-H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}\sin\omega(-\frac{x}{a})=0$
$u_x(0,t)=\frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})+H(t)B\sin\omega t=B\sin(\omega t)$

d) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t) \quad x>0,t>0,a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p)=0\end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. $v_x(0,p)=0$ impone $\dfrac{p}{a}(\alpha-\beta)=0$ e quindi $\beta=0$ da cui $v(x,p)=\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=\dfrac{1}{\omega^2}(t\omega-\sin\omega t)$

e) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=B\delta(t-T)\end{cases}$

$v(x,p)\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{L}(u(x,t))$, $\mathcal{L}(u_t(x,t)=p\mathcal{L}(u(x,t))-u(x,0)=pv(x,p)-\sin x$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p\mathcal{L}(u_t(x,t))-u_t(x,0)=p(pv(x,p)-\sin x)=p^2v(x,p)-p\sin x$, $\mathcal{L}(u_{xx}(x,t))=(\mathcal{L}(u(x,t)))_{xx}=v_{xx}(x,p)$ $\mathcal{L}(u_x(x,t))=(\mathcal{L}(u(x,t)))_x=v_x(x,p)=\int_0^{+\infty}dte^{-pt}B\delta(t-T)=e^{-pT}$ per cui nella

funzione $v(x,p)$ l'equazione diventa la equazione differenziale ordinaria $\begin{cases} p^2v - p\sin x = a^2 v_{xx} \\ v_x(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$
che possiamo scrivere anche come
$\begin{cases} p^2v - p\sin x = a^2 v'' \\ v'(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ L'equazione per $v(x,p)$ è del secondo ordine (come per $u(x,t)$) e la condizione iniziale è solo per $v_x(0,p)$. Se ne deduce che manca una condizione per poter trovare l'unica soluzione che cerchiamo. La seconda condizione apparentemente mancante deriva dal fatto che vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A'. Ciò vuol dire che deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$. Per risolvere la equazione ordinaria utilizziamo di nuovo la trasformata di Laplace. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p) \overset{\text{def}}{=} h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore." $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2h(s,p) - sv(0,p) - Be^{-pT}$ per cui l'equazione ordinaria diventa $p^2h(s,p) - p\mathcal{L}(\sin x) = a^2s^2h(s,p) - a^2sv(0,p) - a^2Be^{-pT}$ ossia $h(s,p) = \dfrac{p}{(s^2+1)(p^2-a^2s^2)} + \dfrac{-a^2sv(0,p) - a^2Be^{-pT}}{p^2-a^2s^2}$. Antitrasformando si ha $v(s,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}(e^{-\frac{xp}{a}} - e^{\frac{px}{a}}) + \dfrac{v(0,p)}{2}(e^{\frac{px}{a}} + e^{-\frac{px}{a}}) + \dfrac{B}{2}(e^{\frac{px}{a}-pT} - e^{-\frac{px}{a}-pT})$. Il limite $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ impone $-\dfrac{a}{p^2+a^2} + v(0,p) + Be^{-pT} = 0$ e quindi $v(0,p) = \dfrac{a}{p^2+a^2} - Be^{-pT}$. Dunque si ottiene $v(x,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{p^2+a^2}e^{-\frac{p}{a}x} - Be^{-\frac{p}{a}x-pT}$. Antitrasformando si ha la soluzione $u(x,t) = \sin x\cos at + H(t-\dfrac{x}{a})\sin(at-x) - aBH(t-\dfrac{x}{a}-T)$. Verifichiamo le condizioni iniziali. $u(x,0) = \sin x$ chiaramente. $u_t(x,t) = -a\sin x\sin at + \delta(t-\dfrac{x}{a})\sin(at-x) + aH(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\dfrac{x}{a}-T) = -a\sin x\sin at + (\sin(at-x))\Big|_{t=x/a} + aH(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\dfrac{x}{a}-T) = -a\sin x\sin at + aH(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)$ e per $t=0$ otteniamo zero. Ora analizziamo $u_x(x,t) = \cos x\cos(at) - \dfrac{1}{a}\delta(t-\dfrac{x}{a})\sin(at-x) - H(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) + B\delta(t-\dfrac{x}{a}-T) = \cos x\cos(at) - H(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) + B\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)$ e per $x=0$ abbiamo $u_x(0,t) = \cos(at) - \cos(at) + B\delta(t-T)$

e1) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = H(x-x_0),\ x_0>0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - H(x-x_0)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p) - pH(x-x_0)$ e quindi otteniamo $\begin{cases} p^2v - pH(x-x_0) - a^2v_{xx} = 0 \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$
Definiamo $\mathcal{L}(v(x,p)) = h(s,p)$,

$$\mathcal{L}(v_x(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p), \qquad \mathcal{L}(v_{xx}(x,p)) = s(sh(s,p) - v(0,p)) - v_x(0,p)$$

e l'equazione diventa

$$p^2h(s,p) - \frac{pe^{-sx_0}}{s} - a^2s^2h(s,p) + a^2sv(0,p) + a^2v_x(0,p) = 0$$

ossia $p^2h(s,p) - \dfrac{pe^{-sx_0}}{s} - a^2s^2h(s,p) + a^2v_x(0,p) = 0$,

$$h(s,p) = \frac{pe^{-sx_0}}{s(p^2-a^2s^2)} + \frac{a^2v_x(0,p)}{p^2-a^2s^2} = \frac{e^{-sx_0}}{ps} - \frac{e^{-sx_0}s}{p(s^2-p^2/a^2)} + \frac{v_x(0,p)}{s^2-p^2/a^2}$$

da cui segue $v(x,p) = \dfrac{H(x-x_0)}{p} - \dfrac{1}{p}\cosh(\dfrac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0) + \dfrac{a}{p}v_x(0,p)\sinh(\dfrac{p}{a}x)$. Ora dobbiamo annullare i termini che non tendono a zero per $\text{Re}p \to +\infty$.

Se $x > x_0$ gli unici termini che non tendono a zero sono $\dfrac{-1}{p}e^{\frac{p}{a}(x-x_0)} + \dfrac{a}{p}v_x(0,p)e^{\frac{p}{a}x}$ per cui $v_x(0,p) = \dfrac{1}{a}e^{\frac{-px_0}{a}}$ e la soluzione diventa

$$v(x,p) = \frac{H(x-x_0)}{p} - \frac{1}{p}\cosh(\frac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0) + \frac{1}{p}\sinh(\frac{p}{a}x)e^{\frac{-px_0}{a}}$$

e $\lim\limits_{\text{Re}p\to+\infty} v(x,p) = 0$ tanto per $x \geq x_0$ che per $x < x_0$. Infatti

$$v(x,p) = \begin{cases} \dfrac{e^{-p(x-x_0)/a}}{2p} - \dfrac{e^{-p(x+x_0)/a}}{2p} & x \geq x_0 \\ \dfrac{e^{p(x-x_0)/a}}{2p} - \dfrac{e^{-p(x+x_0)/a}}{2p} & x < x_0 \end{cases}$$

Antitrasformando abbiamo $\Delta x \doteq x - x_0$.

$$u(x,t) = H(\Delta x)H(t) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a}) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a}) - \frac{1}{2}H(t-\frac{x+x_0}{a})$$

$$u(x,0) = H(\Delta x) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a}) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{-\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}H(\frac{\Delta x}{a}) - \frac{1}{2}H(-\frac{x+x_0}{a})$$

Se $x < x_0$ ogni termine è nullo. Se $x > x_0$ sopravvive $H(\Delta x) - \dfrac{H(\Delta x)}{2}H(\dfrac{\Delta x}{a}) + \dfrac{1}{2}H(\dfrac{\Delta x}{a}) = 1$

$$u_t(x,t) = H(\Delta x)\delta(t) - \frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t+\frac{\Delta x}{a}) - \frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t-\frac{\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}\delta(t+\frac{\Delta x}{a}) - \frac{1}{2}\delta(t-\frac{x+x_0}{a})$$

Sia $x \geq x_0$.

$$H(\Delta x) - \frac{H(\Delta x)}{2}\delta(\frac{\Delta x}{2}) - \frac{H(\Delta x)}{2}\delta(-\frac{\Delta x}{2}) + \frac{1}{2}\delta(\frac{\Delta x}{2}) - \frac{1}{2}\delta(-\frac{x+x_0}{2}) = H(\Delta x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Abbiamo usato la formula $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)$ e se $f(x) \equiv a$ è una costante $a\delta(x-x_0) = a$.
Sia $x < x_0$. $H(x-x_0) = 0$.

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\delta(\frac{\Delta x}{2}) - \frac{1}{2}\delta(-\frac{x+x_0}{2}) = 0$$

$$u(0,t) = \frac{1}{2}H(t-\frac{x_0}{a}) - \frac{1}{2}H(t-\frac{x_0}{a}) = 0$$

e2) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = H(x-x_0),\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2 v(x,p) - H(x-x_0)$ e quindi otteniamo $\begin{cases} p^2 v - H(x-x_0) - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$

Definiamo $\mathcal{L}(v(x,p)) = h(s,p)$,

$$\mathcal{L}(v_x(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p), \qquad \mathcal{L}(v_{xx}(x,p)) = s(sh(s,p) - v(0,p)) - v_x(0,p)$$

e l'equazione diventa

$$p^2h(s,p)-\frac{e^{-sx_0}}{s}-a^2s^2h(s,p)+a^2sv(0,p)+a^2v_x(0,p)=0$$

ossia $p^2h(s,p)-\dfrac{e^{-sx_0}}{s}-a^2s^2h(s,p)+a^2v_x(0,p)=0,$

$$h(s,p)=\frac{e^{-sx_0}}{s(p^2-a^2s^2)}-\frac{a^2v_x(0,p)}{p^2-a^2s^2}=\frac{e^{-sx_0}}{p^2s}-\frac{e^{-sx_0}s}{p^2(s^2-p^2/a^2)}+\frac{v_x(0,p)}{s^2-p^2/a^2}$$

da cui segue $v(x,p)=\dfrac{H(x-x_0)}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}\cosh(\dfrac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0)+\dfrac{a}{p}v_x(0,p)\sinh(\dfrac{p}{a}x)$. Ora dobbiamo annullare i termini che non tendono a zero per Re$p\to+\infty$.

Se $x>x_0$ gli unici termini che non tendono a zero sono $\dfrac{-1}{2p^2}e^{\frac{p}{a}(x-x_0)}+\dfrac{a}{2p}v_x(0,p)e^{\frac{p}{a}x}$ per cui $v_x(0,p)=\dfrac{1}{pa}e^{\frac{-px_0}{a}}$ e la soluzione diventa

$$v(x,p)=\frac{H(x-x_0)}{p^2}-\frac{1}{p^2}\cosh(\frac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0)+\frac{1}{p^2}\sinh(\frac{p}{a}x)e^{\frac{-px_0}{a}}$$

e $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to+\infty}v(x,p)=0$ tanto per $x\geq x_0$ che per $x<x_0$. Antitrasformando abbiamo $\Delta x\doteq x-x_0$.

$$\begin{aligned}u(x,t)&=tH(\Delta x)H(t)-(t+\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})-(t-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a})+\\&+\frac{1}{2}(t+\frac{\Delta x}{a})H(t+\frac{\Delta x}{a})-\frac{1}{2}(t-\frac{x+x_0}{a})H(t-\frac{x+x_0}{a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u(x,0)=-(\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a})-(-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a})+\frac{1}{2}(\frac{\Delta x}{a})H(\frac{\Delta x}{a})+\\&-\frac{1}{2}(-\frac{x+x_0}{a})H(-\frac{x+x_0}{a})=-(\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a})-(-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a})+\frac{1}{2}(\frac{\Delta x}{a})H(\frac{\Delta x}{a})\end{aligned}$$

Se $x<x_0$ tutti i termini sono nulli. Se $x=x_0$ $\Delta x=0$. Se $x>x_0$ il secondo termine è nullo e la somma del primo e terzo è zero.

$$\begin{aligned}u_t(x,t)&=H(\Delta x)H(t)+tH(\Delta x)\delta(t)-\frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})-(t+\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t+\frac{\Delta x}{a})+\\&-\frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a})-(t-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t-\frac{\Delta x}{a})+\frac{1}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})+\\&+\frac{1}{2}(t+\frac{\Delta x}{a})\delta(t+\frac{\Delta x}{a})-\frac{1}{2}H(t-\frac{x+x_0}{a})-\frac{1}{2}(t-\frac{x+x_0}{a})\delta(t-\frac{x+x_0}{a})=\\&=H(\Delta x)H(t)-\frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})-\frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a})+\frac{1}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})+\\&-\frac{1}{2}H(t-\frac{x+x_0}{a})\end{aligned}$$

Per $t=0$ diventa

$$\begin{aligned}u_t(x,0)&=H(\Delta x)-\frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a})-\frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a})+\frac{1}{2}H(\frac{\Delta x}{a})-\frac{1}{2}H(-\frac{x+x_0}{a})=\\&=H(\Delta x)-\frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a})=H(\Delta x)\text{ per ogni }x\neq x_0\end{aligned}$$

f) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v(0,p) = \dfrac{A\lambda}{\lambda^2+p^2} \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. $v(0,p) = \dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}$ impone $v(x,p) = \Big(\dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2} - \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big)e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = H(t-\dfrac{x}{a})\big(A\sin\lambda(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\dfrac{x}{a}) - \dfrac{t}{\omega}\big) - \dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) + \dfrac{t}{\omega}$

g) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x + \sin(\omega t) \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{x}{p} + \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a}{p^4}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{x}{p^3} + \dfrac{\omega}{p^2(\omega^2+p^2)}$ da cui $u(x,t) = \dfrac{a}{6}(t-\dfrac{x}{a})^3 H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{1}{2}xt^2 H(t) - \dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) + \dfrac{t}{\omega}$

h) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2 - 2\dfrac{a}{\omega^3}\Big)H(t-\dfrac{x}{a}) + H(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

i) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = A\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v_x(0,p) = Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} - \dfrac{aA}{p}e^{-pT-\frac{p}{a}x}$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} - \frac{aA}{p}e^{-pT-\frac{p}{a}x}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2 - 2\dfrac{a}{\omega^3}\Big)H(t-\dfrac{x}{a}) + H(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t) - aAH(t-T-\dfrac{x}{a})$

l) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) & x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=0, \ u(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

m) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) & x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=0, \ u(0,t)=A\delta(T-t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v(0,p)=Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} + Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} + Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t) + A\delta(t-T-\dfrac{x}{a})$

n) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t + \sin(\omega x) & x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=0, \ u(0,t)=A\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{\sin(\omega x)}{p} \\ v(0,p)=Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è

$v(x,p) = (\dfrac{1}{p^4} + \dfrac{\sin(\omega x)}{p(p^2+a^2\omega^2)}) + e^{-\frac{p}{a}x}(Ae^{-pT} - \dfrac{1}{p^4})$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}v(x,p) =$$
$$= \frac{t^3}{3} + \frac{\sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \frac{1}{2a^2\omega^2}\big(\sin\omega(x+at) + \sin\omega(x-at)\big) - \frac{1}{3}H(t-\frac{x}{a})(t-\frac{x}{a})^3 + A\delta(t-T-\frac{x}{a})$$

o) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t\sin(\omega x) & x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=0, \ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\sin(\omega x)}{p^2} \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a\omega}{p^3(p^2+a^2\omega^2)}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{\sin(\omega x)}{p^2(p^2+a^2\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}v(x,p) = \dfrac{1}{2a\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2 H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{1}{a^3\omega^3}\cos\omega(at-x)H(t-\dfrac{x}{a}) - \dfrac{1}{a^3\omega^3}H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{t\sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \dfrac{\sin(\omega x)}{a^3\omega^3}\sin(a\omega t)$

$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} - \dfrac{aA\lambda}{p(p^2+\lambda^2)} e^{-\frac{x}{a}p}$ da cui $u(x,t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \dfrac{t}{\omega} - \dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) - \dfrac{aA}{\lambda}H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{aA}{\lambda}\cos\lambda(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

p) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 1,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - 1 - a^2 v'' = 0 \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$ ossia $v(x,p) = -\dfrac{1}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t) = t - (t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

q) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 1,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - 1 - a^2 v'' = 0 \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ ossia $v(x,p) = \dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t) = t$

r) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - x - a^2 v'' = 0 \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$ ossia $v(x,p) = \dfrac{x}{p^2} - \dfrac{x}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t) = xt - xtH(t-\dfrac{x}{a})$

s) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = 1,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - p - a^2 v'' = 0 \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ ossia $v(x,p) = \dfrac{1}{p}$ da cui $u(x,t) = H(t)$

t) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = 1,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - p - a^2 v'' = 0 \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$ ossia $v(x,p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t) = H(t) - H(t-\dfrac{x}{a})$

u) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = 1,\ u_t(x,0) = x,\ u_x(0,t) = H(t-T) \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - p - x - a^2 v'' = 0 \\ v_x(0,p) = \dfrac{e^{-pT}}{p} \end{cases}$ ossia $v(x,p) = \dfrac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x} - \dfrac{a}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x - pT} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t) = \dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2 H(t-\dfrac{x}{a}) - a(t-\dfrac{x}{a}-T)H(t-\dfrac{x}{a}-T) + (1+tx)H(t)$

Verifichiamo che la $u(x,t)$ trovata soddisfi effettivamente l'equazione data e le sue condizioni iniziali. $u_t(x,t) = a(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2\delta(t-\dfrac{x}{a}) - aH(t-\dfrac{x}{a}-T) - a(t-\dfrac{x}{a}-T)\delta(t-$

$\frac{x}{a} - T) + tH(t) + (1+tx)\delta(t) = a(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a}) - aH(t-\frac{x}{a}-T) + xH(t) + 1$

$u_{tt}(x,t) = aH(t-\frac{x}{a}) + a(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a}) + a\delta(t-\frac{x}{a}-T) + x\delta(t) = aH(t-\frac{x}{a}) + a\delta(t-\frac{x}{a}-T) + x\delta(t) =$
$aH(t-\frac{x}{a}) + a(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a}) + a\delta(t-\frac{x}{a}-T) + x\delta(t) = aH(t-\frac{x}{a}) + a\delta(t-\frac{x}{a}-T)$

$u_x(x,t) = -(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})^2\delta(t-\frac{x}{a}) + H(t-\frac{x}{a}-T) + (t-\frac{x}{a}-T)\delta(t-\frac{x}{a}-T) + tH(t) =$
$-(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a}) + H(t-\frac{x}{a}-T) + tH(t)$

$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a}) + \frac{1}{a}(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a}-T) = \frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a}-T)$

ed appare evidente che $u_{tt} - a^2u_{xx} \equiv 0$. Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo $u(x,0) = H(0) = 1$, $u_t(x,0) = xH(0) = x$, $u_x(0,t) = -tH(t) + H(t-T) + tH(t) = H(t-T)$

v) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 1 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p) - 1 - a^2v'' = \frac{1}{p} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - (\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3})e^{-\frac{p}{a}x}$

da cui $u(x,t) = t - \frac{1}{2}t^2 - \Big((t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})^2\Big)H(t-\frac{x}{a})$

w) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=\delta(t-T) \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p) - p - x - a^2v'' = 0 \\ v_x(0,p) = e^{-pT} \end{cases}$ ossia $v(x,p) = \frac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x} - \frac{a}{p}e^{-\frac{p}{a}x - pT} +$
$\frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t) = \frac{a}{2}(t-\frac{x}{a})^2H(t-\frac{x}{a}) - aH(t-\frac{x}{a}-T) + (1+tx)H(t)$

x) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = e^{-rt} \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p) - a^2v'' = \frac{1}{p+r} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e e la soluzione è $v(x,p) = \frac{1}{p^2(p+r)} -$
$\frac{1}{p^2(p+r)}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}v(x,p) = \frac{t}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-rt}}{r^2} - (t-\frac{x}{a})\frac{1}{r}H(t-$
$\frac{x}{a}) + \frac{1}{r^2}H(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{r^2}e^{-r(t-\frac{x}{a})}H(t-\frac{x}{a})$

y) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = e^{-rx} \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p) - a^2v'' = \frac{e^{-rx}}{p} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \frac{e^{-rx}}{p(p^2-a^2r^2)} -$
$\frac{e^{-px/a}}{p(p^2-a^2r^2)}$ da cui $u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}v(x,p) = \frac{-e^{-rx}}{a^2r^2} + \frac{e^{-rx}}{a^2r^2}\cosh(art)H(t) -$
$\frac{1}{a^2r^2}\cosh(art-rx)H(t-\frac{x}{a}) + \frac{1}{a^2r^2}H(t-\frac{x}{a})$

z) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t-\dfrac{x}{x_0}) \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\cos\dfrac{x}{x_0}-\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\sin\dfrac{x}{x_0} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione

è $v(x,p)=-\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}e^{-px/a}+\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\cos\dfrac{x}{x_0}-\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\dfrac{x}{x_0}$

Si devono distinguere due casi: 1) $\omega\neq\dfrac{a}{x_0}$ e 2) $\omega=\dfrac{a}{x_0}$.

Cominciamo da 1).

$u(x,t)=V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\Big(\dfrac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\omega t-\dfrac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\dfrac{x_0}{a}\sin\dfrac{a}{x_0}t\Big)H(t-\dfrac{x}{a})+$

$+\dfrac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\cos\dfrac{x}{x_0}\sin\omega t-\dfrac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\sin\dfrac{x}{x_0}\cos(\omega t)+\dfrac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\dfrac{x_0}{a}\cos\dfrac{x}{x_0}\sin\dfrac{a}{x_0}t-\dfrac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\dfrac{x}{x_0}\cos\dfrac{a}{x_0}t+$

Ora esaminiamo il caso in cui $\omega=\dfrac{a}{x_0}$.

$v(x,p)=\dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\cos x\dfrac{\omega}{a}-\dfrac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\sin x\dfrac{\omega}{a}-\dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}e^{-px/a}$

da cui $u(x,t)=\Big(-\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t)+\dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t)\Big)\cos x\dfrac{\omega}{a}-\dfrac{t}{2\omega}\sin x\dfrac{\omega}{a}\sin(t\omega)+\Big(\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t-\dfrac{x}{a})-$
$\dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t-\dfrac{x}{a})\Big)H(t-\dfrac{x}{a})$ ♠♠

Lezione 22 105 min. del 17/11/2022

Esercizi equazione di D'Alembert. Prime nozioni sul Valor principale

Dalle 16:00 alle 17:00 Ricevimento

Lezione 23 105 min. del 21/11/2022

Valor Principale (non presente sulle dispense di Tauraso e non so se è presente nelle videolezioni; ne dubito).

La nozione di V.P. viene da Cauchy ed infatti sono anche detti integrali secondo Cauchy. Conviene partire con l'esempio ($a<0$, $b>0$) $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x}=\lim_{r\to0^-}\int_a^r\frac{dx}{x}+\lim_{s\to0^+}\int_s^b\frac{dx}{x}=-\infty+\infty$ **Si eseguono gli integrali, poi si eseguono i due limiti e poi si somma** e nessuno dei due esiste.

Cambiamo ora prescrizione

$$\lim_{r\to0^+}\left(\int_a^{-r}\frac{dx}{x}+\int_r^b\frac{dx}{x}\right)=\lim_{r\to0^+}(\ln(r)-\ln(-a)+\ln(b)-\ln r)=\ln\frac{b}{|a|}$$

Si pone $s=-r$, si eseguono gli integrali, si somma e poi si esegue il limite e come si vede, risulta un ben preciso valore.

Lo stesso risultato si ottiene con

$$\lim_{r\to0^+}\left(\int_a^{-r-f(r)}\frac{dx}{x}+\int_{r+g(r)}^b\frac{dx}{x}\right)=\lim_{r\to0^+}\left(\ln\frac{|-r-f(r)|}{r+g(r)}+\ln\frac{b}{-a}\right)\xrightarrow[r\to0^+]{}\ln\frac{b}{|a|}$$

con $-r-f(r)<0$, $r+g(r)>0$ e $\displaystyle\lim_{x\to0}f(r)/r=\lim_{x\to0}g(r)/r=0$

Se invece di $1/x$ si fosse preso $1/|x|$, anche l'integrale con il V.P. non avrebbe dato un risultato finito. Infatti avremmo ottenuto

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\int_a^{-r}\frac{dx}{-x}+\int_r^b\frac{dx}{x}\right)=\lim_{r\to 0^+}\left(-\ln(r)+\ln(-a)+\ln(b)-\ln r\right)\xrightarrow[r\to 0^+]{}+\infty$$

La nozione di V.P. si estende anche ad integrali impropri su tutto l'asse reale. Si voglia calcolare ad esempio l'integrale

$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+x+1}dx$. La sua definizione è la seguente

$$I=\lim_{B\to-\infty}\int_B^0 f(x)dx+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx$$

Si eseguono gli integrali, poi si eseguono i due limiti e poi si somma .

È facile verificare che sia il primo che il secondo limite tendono a $+\infty$ per cui l'integrale improprio non esiste. Infatti ad esempio il secondo dà

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(A^2+A+1)-\arctan\frac{2A+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=+\infty\xrightarrow[A\to+\infty]{}+\infty$$

È inessenziale calcolare il secondo integrale ai fini della verifica dell'esitenza dell'integrale improprio.

Cambiamo prescrizione ed eseguiamo

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^0 f(x)dx+\int_0^A f(x)dx\right)$$

Si pone $B=-A$, si eseguono gli integrali, si somma e poi si esegue il limite

In tal caso si ottiene

$$\frac{-\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(A^2-A+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{-2A+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln(A^2+A+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2A+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

il cui limite è $-\pi/\sqrt{3}$.

Esercizio

$$J\doteq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx\doteq I_1+I_2+I_3$$

I_2 non è in realtà un intgrale improprio in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$ ed inoltre

$$\left|\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\right|\leq\frac{1}{x^3}$$

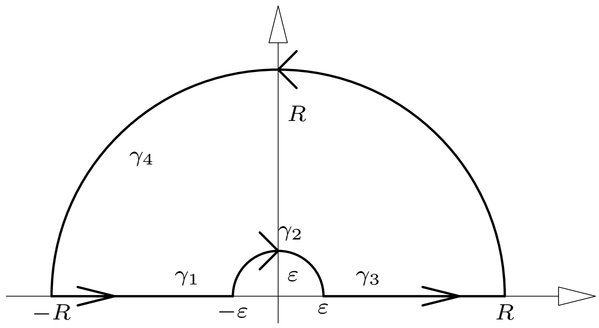
per cui anche I_1 ed I_3 convergono. L'integrale improprio J dunque esiste ma per poterlo calcolare dobbiamo scrivere la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

ed a questo punto l'origine diventa un punto di singolarità per la funzione da cui la necessità di definire l'integrale solo come valor principale ossia

$$VP\ \mathrm{Im}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\Big)$$

Il cammino su cui integrare è il seguente se $a>0$ e quello opposto (che gira in senso orario) se $a<0$.



Eseguendo gli integrali e prendendo i limiti $\varepsilon\to 0$ $R\to+\infty$, si ottiene

$$\oint_\gamma \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \Big(VP\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\Big) - i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0}$$

e quindi

$$\Big(VP\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\Big) - i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0} = 2\pi i Res\left(\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\right) = 2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib}$$

da cui

$$\Big(VP\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\Big) = 2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib} + i\frac{\pi}{b^2} = i\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

La parte immaginaria è $\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$ ed è il valore dell'integrale cercato. Notare che per $a\to 0$, il risultato tende a zero come ci aspettiamo che sia ponendo $a=0$ nell'integrale originale. Se invece $b\to 0$, il risultato è illimitato come ci si aspetta dal fatto che l'integrale originario diventa un integrale improprio non convergente.

L'esplicitazione dei calcoli lungo le componenti della curva è la seguente

$$\Big|\int_{\gamma_4} f(z)dz\Big| = \Big|\int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}(R^2e^{2it}+b^2)}Rie^{it}dt\Big| = \Big|\int_0^\pi \frac{e^{iaR(\cos t+i\sin t)}}{Re^{it}(R^2e^{2it}+b^2)}Rie^{it}dt\Big| =$$

$$= \Big|\int_0^\pi \frac{e^{iaR\cos t}e^{-aR\sin t}}{(R^2e^{2it}+b^2)}dt\Big| \le \int_0^\pi \frac{|e^{iaR\cos t}e^{-aR\sin t}|}{|R^2e^{2it}+b^2|}dt = \int_0^\pi \frac{|e^{-aR\sin t}|}{|R^2e^{2it}+b^2|}dt \underbrace{\le}_{0\le t\le\pi}$$

$$\le \int_0^\pi \frac{1}{|(R^2e^{2it}+b^2)|}dt \underbrace{\le}_{R>b} \int_0^\pi \frac{1}{|(R^2-b^2)|}dt = \frac{\pi}{R^2-b^2}\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iat}}{t(t^2+a^2)}dt, \qquad \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iat}}{t(t^2+a^2)}dt$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0}\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon e^{-it}(\varepsilon^2e^{i2t}+b^2)}(-i)\varepsilon e^{-it}dt = \int_{-\pi}^{0}\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{(\varepsilon^2e^{i2t}+b^2)}(-i)dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{-i\pi}{b^2}$$

Ove non fosse chiaro, siamo passati da $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$ **a** $\displaystyle\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$ **in quanto** $\sin z$ **è illimitata sia nel semipiano superiore che nel semipiano inferiore e quindi ci sarebbe impossibile usare la variabile complessa a meno di scrivere**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{2ix(x^2+b^2)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iax}}{2ix(x^2+b^2)}dx$$

e "chiudere" nel semipiano superiore il primo e nel semipiano inferiore il secondo. ••

In generale sia $f(z)$ una funzione tale che esiste ed è finito $\displaystyle\lim_{z\to z_0} f(z)$. Detta $\gamma(t)=z_0+\varepsilon e^{-it}$ $-\pi\le t\le 0$, si ha

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{-\pi}^{0}\frac{f(z_0+\varepsilon e^{-it})}{\varepsilon e^{-it}}(-1)\varepsilon e^{-it}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -i\pi f(z_0)$$

♠ Esercizi sul valor principale. $\displaystyle VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x(ax^2+bx+c)}dx$ con $b^2-4ac<0$.

$az^2+bz+c=0$ se e solo se $\displaystyle z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\doteq\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $z_1-z_2=i\sqrt{-\Delta}/a$.

$$\begin{aligned}I &= \frac{i\pi}{c}+2\pi i Res(\frac{1}{z(az^2+bz+c)})\Big|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{c}+2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z_1(z-z_1)(z-z_2)} = \\ &= \frac{i\pi}{c}+\frac{2\pi i}{a\frac{i\sqrt{-\Delta}}{a}\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}} = \frac{i\pi}{c}+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi}{-b+i\sqrt{-\Delta}} = \frac{i\pi}{c}+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi(-b-i\sqrt{-\Delta})}{4ac} = \\ &= \frac{-\pi b}{\sqrt{4ac-b^2}c}\end{aligned}$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \mathrm{Im}\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx\right) = \pi\frac{a}{|a|},$$

Svolgimento Sia $a>0$. Il cammino è uguale ai precedenti con gli stessi nomi dati alle stesse curve.

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \mathrm{Im}\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx\right)$$

$$\Big|\int_{\gamma_4} f(z)dz\Big| = \Big|\int_0^{\pi}\frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}}Rie^{it}dt\Big| = \Big|\int_0^{\pi}e^{iaR(\cos t+i\sin t)}idt\Big| \le \int_0^{\pi}e^{-aR\sin t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-aR\sin t}dt$$

Ora osserviamo che $\sin t\ge(2t)/\pi$ con $0\le t\le\pi/2$ La minorazione segue dalla concavità di $\sin t$ per $0\le t\le\pi/2$ e quindi giace sopra la secante che collega i punti $(0,0)$ con $(\pi/2,1)$. Ne segue

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-aR\sin t}dt \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{-aR2t}{\pi}}dt = \frac{\pi}{aR}(1-e^{-aR}) \to 0 \ per\ R\to+\infty$$

A lezione ho semplicemente detto: dato il segno di a, (ad esmpio positivo) per stabilire se chiudere sopra o sotto prendiamo $z=iR$ (chiudiamo sopra) e scriviamo $e^{iaz}=e^{-aR}\to 0$. Non ho però eseguito l'integrale lungo γ_4.

$$\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_3}f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iat}}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iat}}{t}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0,R\to+\infty]{} VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iat}}{t}dt$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon e^{-it}} \varepsilon(-i)e^{-it}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -i\pi$$

Riunendo i contributi abbiamo

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}}{t} dt - i\pi = 2\pi i \sum \mathrm{Res} f(z) = 0$$

da cui il risultato prendendo la parte immaginaria.

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx = \pi\frac{1-a}{b^2} + \frac{\pi}{b^2}(e^{-b}-e^{-ab})$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2-x+1)}dx = \pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}(|b|-|a|), \qquad VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x(x^2+bx+b^2)}dx,$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x(x^2-x+1)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}} \cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right), \quad VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(4a^2x^2-\pi^2)}dx$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)(x^2+1)}dx \qquad VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)}{x^2(x^3+a^3)}dx$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(4a^2x^2+\pi^2)}dx \quad VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x/a)-\sin^2(2\pi x/a)}{x^2(x^3+a^3)}dx$$

Svolgiamo $VP\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}-\sin^2\frac{2\pi x}{a}}{x^2(x^3+a^3)}dx = VP\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}-1+\cos\frac{4\pi x}{a}}{x^2(x^3+a^3)}dx$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\frac{1}{x(x^3+a^3)}dx = i\pi\left[\lim_{x\to 0}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3+a^3}\right]+$$

$$+i\pi\left[\lim_{x\to -a}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\lim_{x\to -a}\frac{1}{x^2+ax+a^2}\right]+2\pi i\mathrm{Res}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\frac{1}{x(x^3+a^3)}\Big|_{z=ae^{i\pi/3}}=$$

$$= i\pi\frac{2\pi i}{a^4}+2\pi i\left(\frac{1}{6a^4}(i\sqrt{3}-1)\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2\pi^2}{a^4}+\frac{\pi}{3a^4}(-\sqrt{3}-i)\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e l'integrale è $\displaystyle\frac{-\pi^2}{a^4}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3a^4}\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}$

♠ Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

Svolgimento (prima maniera) L'integrale improprio converge in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$, e $\displaystyle|\frac{\sin^2 x}{x^2}| \le 1/x^2$

Integriamo per parti

$$\frac{-\sin^2 x}{x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{x}dx = \pi$$

Seconda maniera Scriviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}dx = VP\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right)-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\cos(2x)}{x^2}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2}dx\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right)-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{2i\varepsilon e^{-it}}(-i)\varepsilon e^{-it}}{\varepsilon^2 e^{-2it}}dt+\underbrace{\int_0^{+\pi}\frac{e^{2iRe^{it}}}{R^2e^{2it}}Rie^{it}dt}_{\to 0 \ per \ R\to+\infty}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{0}\frac{-ie^{it}}{\varepsilon}(1+2i\varepsilon e^{-it}+O(\varepsilon^2))\right] = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\frac{2}{\varepsilon}+2\pi+O(\varepsilon^2)\right) = \pi$$

Nel passaggio dal quinto al sesto uguale si è applicato il teorema dei residui. ♠♠

♠ Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$

Svolgimento (prima maniera) Sappiamo che $\sin^3 x = (3\sin x - \sin(3x))/4$ e l'integrale improprio converge per le stesse motivazioni di prima.

$$VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{x^3}dx = \mathrm{Im}\left(VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3e^{ix}-e^{i3x}}{x^3}dx\right)$$

Passiamo alla funzione complessa $f(z)=\dfrac{3e^{iz}-e^{i3z}}{z^3}$ e integriamo secondo il cammino di pag.24

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)dt \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$$
$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R} f(t)dt \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$
$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_0^{\pi}\frac{3e^{iRe^{it}}-e^{3iRe^{it}}}{R^3e^{3it}}Rie^{it}dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$
$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0}(-i)\varepsilon e^{-it}\frac{3e^{i\varepsilon e^{-it}}-e^{3i\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon^3e^{-3it}}dt =$$
$$= \int_{-\pi}^{0}(-i)e^{2it}\frac{3+3i\varepsilon e^{-it}-\frac{3\varepsilon^2}{2}e^{-i2t}-1-i3\varepsilon e^{-it}+\frac{9}{2}\varepsilon^2e^{-2it}+O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2} = -3i\pi+O(\varepsilon)$$

Sappiamo che $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} f(z)dz = 2\pi i\sum \mathrm{Res} f(z) = 0$ e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - 3i = 0 \implies \mathrm{Im}\left(VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3e^{ix}-e^{i3x}}{x^3}dx\right) = \frac{3\pi}{4}$$

seconda maniera

Integrando per parti si ha $I = -\frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\sin^2 x\cos x}{x^2}dx$. L'integrale è uguale a $\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}dx$ ed integrando di nuovo per parti si ottiene

$$-\frac{3}{2}\frac{\cos x - \cos^3 x}{x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sin x + 3\sin x\cos^2}{x}dx = -\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x} + \frac{9}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x - \sin^3 x}{x}dx =$$
$$= 3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{9}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x - \sin 3x}{4x}dx = (3 - \frac{27}{8} + \frac{9}{8})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{3}{4}\pi$$

♠♠

Lezione 24 105 min. del 22/11/2022

Esercizi sugli integrali col valor principale e integrali con potenze razionali

Lezione 25 105 min. del 24/11/2022

Ricevimento dalle 16:00 alle 16:45

♠ Calcoliamo $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)} \doteq V.P.\int_0^{+\infty}F(x)dx$ dove p, q sono interi relativi con $|p/q| < 1$, $a > 0$. Inoltre $F(x)$ soddisfa

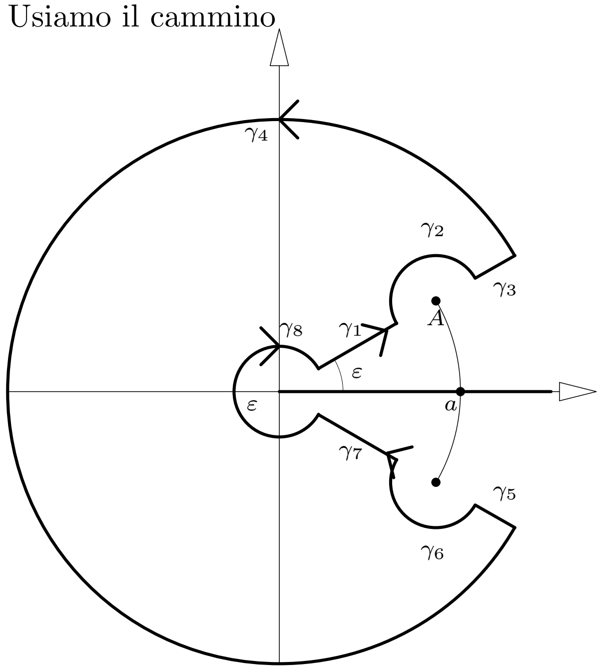
1) $\int_0^1 \frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)}$ esiste eventualmente come integrale improprio

2) $f(z)$ una funzione olomorfa su tutto il piano complesso tranne un numero finito di poli o singolarità essenziali che non devono stare sul semiasse reale positivo

3) $\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{|z||f(z)|}{z^{\frac{p}{q}}(z-a)} = 0$. ♠♠

Rispetto ai casi già studiati di valor principale, in questo caso abbiamo una singolarità lungo il taglio del piano complesso

Usiamo il cammino



$A = ae^{i\varepsilon}$, $\gamma_1(t) = te^{i\varepsilon}$ $\quad \varepsilon \le t \le a - r$

$\gamma_2(t) = ae^{i\varepsilon} + re^{-it}$ $\quad -\pi \le t \le 0$,

$\gamma_3(t) = te^{i\varepsilon}$ $\quad a + r \le t \le R$

$\gamma_4(t) = Re^{it}$ $\quad \varepsilon \le t \le 2\pi - \varepsilon$

$\gamma_5(t) = -te^{i(2\pi-\varepsilon)}$ $\quad -R \le t \le -a - r$

$\gamma_6(t) = (ae^{i\varepsilon} + re^{-it})e^{i(2\pi-\varepsilon)}$ $\quad -2\pi \le t \le -\pi$,

$\gamma_7(t) = -te^{i(2\pi-\varepsilon)}$ $\quad -a + r \le t \le -\varepsilon$

$\gamma_8(t) = \varepsilon e^{-it}$ $\quad \varepsilon - 2\pi \le t \le -\varepsilon$

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3} f(z)dz = V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)}$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0}\frac{f(ae^{i\varepsilon}+re^{-it})(-i)re^{-it}dt}{(ae^{i\varepsilon}+re^{-it})^{\frac{p}{q}}\,(ae^{i\varepsilon}+re^{-it}-a)}\xrightarrow[R\to\infty,r\to 0,\varepsilon\to 0]{} -if(a)a^{\frac{-p}{q}}\pi$$

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{f(Re^{-it})iRe^{it}dt}{R^{\frac{p}{q}}e^{it\frac{p}{q}}(Re^{it}-a)}\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_5\cup\gamma_7} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R}^{-a-r}\frac{f(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})(-dt)e^{i(2\pi-\varepsilon)}}{(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})^{\frac{p}{q}}(-te^{i(2\pi-\varepsilon)}-a)}+$$
$$+\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-a+r}^{-\varepsilon}\frac{f(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})(-dt)e^{i(2\pi-\varepsilon)}}{(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})^{\frac{p}{q}}(-te^{i(2\pi-\varepsilon)}-a)}=$$
$$=\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\left[\int_{-R}^{-a-r}\frac{f(-t)(-dt)}{(-t)^{\frac{p}{q}}e^{i2\pi\frac{p}{q}}(-t-a)}+\int_{-a+r}^{0}\frac{f(-t)(-dt)}{(-t)^{\frac{p}{q}}e^{i2\pi\frac{p}{q}}(-t-a)}\right]=$$
$$\underbrace{=}_{\tau=-t} V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)(-d\tau)}{\tau^{\frac{p}{q}}e^{i2\pi\frac{p}{q}}(\tau-a)} = -e^{-i2\pi\frac{p}{q}}V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau^{\frac{p}{q}}(\tau-a)}$$

$$\int_{\gamma_6} f(z)dz = \int_{-2\pi}^{-\pi}\frac{f((ae^{i\varepsilon}+re^{-it})e^{i(2\pi-\varepsilon)})(-i)re^{-it}e^{i(2\pi-\varepsilon)}dt}{(ae^{i\varepsilon}+re^{-it})^{\frac{p}{q}}\,e^{i(2\pi-\varepsilon)\frac{p}{q}}((ae^{i\varepsilon}+re^{-it})e^{i(2\pi-\varepsilon)}-a)}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}$$
$$\to\int_{-2\pi}^{-\pi}\frac{f((a+re^{-it}))(-i)re^{-it}dt}{(a+re^{-it})^{\frac{p}{q}}\,e^{i2\pi\frac{p}{q}}((a+re^{-it})-a)}\xrightarrow[r\to 0]{} -i\pi f(a)a^{\frac{-p}{q}}e^{-i2\pi\frac{p}{q}}$$

Riunendo il tutto si ha

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_8} F(z)dz =$$
$$= V.P.\int_0^{+\infty}\frac{F(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)}(1-e^{-i2\pi p/q}) - i\pi(1+e^{-i2\pi p/q})f(a)a^{\frac{-p}{q}} = 2\pi\sum \mathrm{Res}F(z)$$

da cui

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)} = i\pi f(a)a^{\frac{-p}{q}}\frac{1+e^{-i2\pi p/q}}{1-e^{-i2\pi p/q}}+\frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi p/q}}\sum\mathrm{Res}F(z)=$$
$$=\pi f(a)a^{\frac{-p}{q}}\cot\frac{\pi p}{q}+\frac{2\pi i}{1-e^{-i2\pi p/q}}\sum\mathrm{Res}F(z)$$

L’argomento è immediatamente generalizzabile a funzioni del tipo $\dfrac{f(x)}{x^{\frac{p}{q}}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$ con $0<a_1<a_2<\ldots<a_n$.

Esercizi

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)},\ \ V.P.\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)(x^2+1)},\ \ V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x^2+1)},$$
$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x^3+1)},\ \ V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-4)(x^3-1)},\ \ V.P.\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x-8)(x^3+1)}$$

Usiamo la formula per risolvere

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-4)(x^3-1)}=V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{-1/2}(x-4)(x-1)(x^2+x-1)}=$$
$$=\pi\Big(\frac{4^{\frac12}}{64-1}\cot\frac{-\pi}{2}+\frac{1^{\frac12}}{(1-4)(1^2-1+1)}\cot\frac{-\pi}{2}\Big)+\frac{2\pi i}{2}\left[\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}-4}\frac{1}{3e^{\frac{4i\pi}{3}}}+\frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{4i\pi}{3}}-4}\frac{1}{3e^{\frac{2i\pi}{3}}}\right]=$$
$$=\pi i\left[\frac{2}{9-i\sqrt3}-\frac{2}{9+i\sqrt3}\right]=\frac{-\pi\sqrt3}{42}$$

Risolviamo poi

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(x-8)(x^3+1)}=\frac{2\pi}{1+8^3}\cot\frac{-\pi}{3}+\frac{2\pi i}{-2i\sin\frac{\pi}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}}\left[\frac{e^{\frac{-i5\pi}{9}}}{(e^{\frac{i\pi}{3}}-8)}+\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{-9}+\frac{e^{\frac{-i7\pi}{9}}}{(e^{\frac{i5\pi}{3}}-8)}\right]\frac13=$$
$$=\frac{-2\pi}{513\sqrt3}+\frac{2\pi}{27\sqrt3}-\frac{2\pi}{3\sqrt3}\left[\frac{e^{\frac{-i8\pi}{9}}}{(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}-8)}+\frac{e^{\frac{-i10\pi}{9}}}{(\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}-8)}\right]=$$
$$=\frac{-2\pi}{513\sqrt3}+\frac{2\pi}{27\sqrt3}-\frac{2\pi}{3\sqrt3}\frac{15\cos\frac{\pi}{9}-2\sqrt3\sin\frac{\pi}{9}}{228}$$

Lezione 26 105 min. del 27/11/2022 (lezione sotitutiva della lezione persa il 26/09/2022 causa elezioni politiche

Ultima lezione per Informatica; Esercizi su tutto il programma.

Lezione 27 105 min. del 28/11/2022 (prima lezione del programma esclusivo di Elettronica&Internet

Estremi per funzioni di più variabili (teoria)

Lezione 28 105 min. del 29/11/2022

Estremi per funzioni di più variabili (teoria e esercizi)

Lezione 29 105 min. del 01/12/2022

Estremi per funzioni di più variabili (teoria e esercizi). Teorema delle funzioni implicite

Lezione 30 105 min. del 05/12/2022

Teorema delle funzioni implicite

Lezione 31 105 min. del 06/12/2022

Teorema delle funzioni implicite e estremi vincolati. Teoria e esercizi

Lezione 32 105 min. del 12/12/2022

Esercizi sui moltiplicatori di Lagrange con 1 e 2 moltiplicatori. Curve in $\mathbf{R}^3$. Integrali curvilinei di prima specie

Calcoliamo la lunghezza della curva $x=\gamma_1(t)=t\cos t$, $y=\gamma_2(t)=t\sin t$, $z=\gamma_3(t)=t$, $0\le t\le\sqrt2$. È una spitale che parte da $(0,0,0)$ e si svolge sulla falda superiore del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$L(\underline{\gamma}) = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 + (\gamma_3')^2} dt = \int_0^2 \sqrt{2+t^2} dt \underbrace{=}_{t=\sqrt{2}x} \int_0^1 2\sqrt{1+x^2} dx \underbrace{=}_{x=\tan\varphi}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2d\varphi}{(\cos\varphi)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\varphi d\varphi}{\sin\varphi(\cos\varphi)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{2}{\sin\varphi} \frac{1}{2\cos^2\varphi}\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} - \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{2\cos^2\varphi} \frac{-\cos\varphi}{\sin^2\varphi} d\varphi \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\sqrt{2} - \frac{1}{\sin\varepsilon\cos^2\varepsilon} + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi} \right) \right] =$$

$$= 2\sqrt{2} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{\sin\varepsilon\cos^2\varepsilon} + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)} + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sin^2\varphi} \right] =$$

$$= 2\sqrt{2} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{\sin\varepsilon\cos^2\varepsilon} - \ln\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sin\varphi}\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \right] =$$

$$= \sqrt{2} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{\sin\varepsilon\cos^2\varepsilon} + \frac{1}{\sin\varepsilon} - \ln\tan\frac{\pi}{8} + \ln\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) \right] = \sqrt{2} - \ln\tan\frac{\pi}{8} =$$

$$= \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$$

Lezione 33 105 min. del 13/12/2022

Integrali curvilinei di seconda specie (forme differenziali) in $\mathbf{R}^3$

Lezione 34 105 min. del 15/12/2022

Esercizi sulle forme differenziali in $\mathbf{R}^3$. Teoremi di Stokes e di Gauss

Lezione 35 105 min. del 19/12/2022

Esercizi sui Teoremi di Stokes e di Gauss. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme

Lezione 36 105 min. del 20/12/2022

Successioni e serie di funzioni

Lezione 37 105 min. del 22/12/2022

Successioni e serie di funzioni. Serie di Fourier

Lezione 38 105 min. del 09/01/2023

Serie di Fourier, teoria e esercizi

Lezione 39 60 min. del 10/01/2023 (fine corso)

Serie di Fourier, teoria e esercizi.